УДК 532.529

Численное моделирование роста парового пузырька в однородно перегретой жидкости (тепловая энергетическая схема)^{*}

С.П. Актершев, Н.Н. Мезенцева, И.В. Мезенцев

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

В рамках тепловой энергетической схемы численным методом моделируется рост парового пузырька в однородно перегретой жидкости. Результаты численных расчетов хорошо согласуются с решением [3] в широком диапазоне чисел Якоба. Показано, что учет проницаемости межфазной поверхности при высоких значениях числа Стефана дает хорошее совпадение с результатами численных расчетов.

Ключевые слова: растущий паровой пузырек, однородно перегретая жидкость, теоретическая модель, численное моделирование.

1. Постановка задачи

Классическая задача о росте сферического парового пузырька в однородно перегретой жидкости имеет большое значение не только с точки зрения практического применения, но и для понимания основных закономерностей процесса кипения жидкости. Среди различных упрощенных моделей (схем роста), описывающих динамику парового пузырька, наиболее широкую область применения находит тепловая энергетическая схема [1]. Постановка задачи в рамках тепловой энергетической схемы довольно проста. Пусть в бесконечном объеме несжимаемой жидкости, однородно нагретой до температуры $T_{\infty} > T_s$, образовался паровой пузырек с начальным радиусом R_0 (см. рис. 1) и давлением пара в пузырьке, равным давлению в объеме. Тепловой поток на поверхности пузырька полностью расходуется на испарение, а скорость роста парового пузыря определяется величиной плотности теплового потока $q = \lambda (\partial T / \partial r) |_{r=R}$ со стороны перегретой жидкости. Радиус пузырька R(t) вычисляется из уравнения баланса энергии

$$dR/dt = q/(\rho_v L). \tag{1}$$

Поле температуры жидкости T(r, t) рассчитывается из уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > R(t)$$
⁽²⁾

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и Правительства Новосибирской области в рамках проекта № 19-48-540024, а также государственного задания ИТ СО РАН.

[©] Актершев С.П., Мезенцева Н.Н., Мезенцев И.В., 2020





с граничными условиями $T|_{r=R(t)} = T_s$, $T|_{r\to\infty} = T_\infty$ и начальным условием $T(r, 0) = T_\infty$. В уравнении (2) скорость жидкости $u = (R/r)^2 R(1 - \rho_v / \rho_1)$ представляет собой сумму двух составляющих. Первая составляющая, равная $(R/r)^2 R$,

описывает течение, вызванное растущим пузырьком с непроницаемой границей. Вторая составляющая, равная $-(R/r)^2 R(\rho_v / \rho_l)$, обусловлена потоком массы на межфазной поверхности.

Задача (1)–(2) отличается простотой и строгостью математического описания, поэтому она вызывает большой интерес исследователей на протяжении почти ста лет. Анализ размерности дает зависимость радиуса пузырька от времени в виде

$$R(t) = m\sqrt{at}.$$
(3)

Здесь константа *m* (модуль роста) зависит от числа Якоба Ja = $c_p (T_{\infty} - T_s) \rho_1 / \rho_v L$ и безразмерного параметра перегрева (числа Стефана) St = $c_p (T_{\infty} - T_s) / L$. Оба числа определяют отношение энтальпии перегрева жидкости к энтальпии фазового перехода (число Стефана — на единицу массы, а число Якоба — на единицу объема).

В работе [2] впервые был проведен асимптотический анализ проблемы в самой общей постановке, а решение представлено в виде интеграла, задающего неявную связь между числом Якоба, модулем роста и отношением плотностей фаз. Здесь же были исследованы асимптотические ветви полученной квадратуры. Несмотря на значительные усилия признанных научных школ, общее решение проблемы в виде явной формулы для модуля роста, пригодной во всей области изменения режимных параметров, было получено сравнительно недавно в [3]. В этой работе тепловой поток q в уравнении (1) представлен в виде суммы тепловых потоков, отвечающих, соответственно, асимптотическим случаям «быстрого» и «медленного» роста пузыря:

$$q = \lambda \left(T_{\infty} - T_{\rm s} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi at}} \psi + \frac{1}{R} \right). \tag{4}$$

Здесь коэффициент ψ учитывает «проницаемость» межфазной границы. Авторы [3] из анализа интеграла Скрайвена [2] в предельных случаях St \rightarrow 0 и St \rightarrow 1 предложили зависимость ψ (St) в виде

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - St}} - 1 \right).$$
 (5)

Подстановка выражений (3) и (4) в уравнение (1) дает простую итоговую формулу для модуля роста

$$m = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \operatorname{Ja} \psi + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(\operatorname{Ja} \psi \right)^2 + 2 \operatorname{Ja}.$$
 (6)

128

Несмотря на простоту, формула (6) дает результаты, хорошо согласующиеся с данными «точных» численных расчетов [2] в широкой, имеющей практическое значение, области режимных параметров. Как показано в работе [4], некоторое различие, не превышающее 10 %, наблюдается в предельных случаях равенства плотностей фаз (St = Ja) при St \rightarrow 1. В статье [5] был приведен обстоятельный исторический обзор рассматриваемой задачи и проведен анализ формулы (6) в предельных случаях по числу Якоба, числу Стефана, отношению плотностей фаз. Там же было показано, что решение (6) хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Обобщенная аппроксимация (4), которую авторы [3] назвали универсальным аналитическим решением, получена на основе аналитического решения задачи о «тепловом ударе» на неподвижной сфере постоянного радиуса в бесконечном объеме равномерно прогретой твердой среды [6]. Коэффициент $\sqrt{3}$ введен в (4) для согласования с асимптотикой интеграла Скрайвена и асимптотическим анализом Плессета–Цвика [7]. Отметим глубокую аналогию между формулой (4) и выражением $q = \lambda (T_{\infty} - T_s) / \sqrt{\pi at}$ для теплового потока, вызванного скачком температуры на границе плоского полуограниченного массива покоящейся среды [6]. Второе слагаемое в (4) играет заметную роль только в асимптотике Ja $\rightarrow 0$.

На первый взгляд, вызывает сомнение, что специфику рассматриваемой задачи (сферическая симметрия и наличие движения жидкости, окружающей пузырек) можно учесть столь простым образом (посредством коэффициентов $\sqrt{3}$ и ψ). Формула (4), из которой следует решение (6), получена не путем точного решения уравнений (1), (2), а путем решения существенно иной задачи с применением поправочных коэффициентов. По этой причине решение (6) нельзя назвать аналитическим в буквальном смысле слова. Цель настоящей работы — сопоставить решение (6) с результатами численного решения исходных уравнений (1) и (2).

2. Численный метод решения

Введем масштаб расстояния R_m , масштаб времени R_m^2/a , масштаб температуры $\Delta T = T_{\infty} - T_s$ и перейдем к безразмерным переменным, сохраняя для них прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных уравнения (1), (2) примут вид:

$$\frac{dR}{dt} = \operatorname{Ja}\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R},\qquad(7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > R(t).$$
(8)

Начальные условия запишутся следующим образом: $R(0) = R_0$, T(r, 0) = 1. Уравнение (8) решалось в лагранжевых (массовых) переменных, при этом левая часть уравнения представляет собой производную температуры по времени вдоль траектории: $dr/dt = \stackrel{\bullet}{R}(R/r)^2(1-\rho_v/\rho_1)$. Запишем уравнение (8) в разностном виде, введя в жидкости подвижную сетку с узлами $r_j(t)$, j = 1, 2, 3, ..., N + 1. Радиальные координаты узлов r_j определены так, что $r_1(t) \equiv R(t)$, а объемы сферических слоев $V_j = 4\pi (r_{j+1}^3 - r_j^3)/3$ в процессе роста пузырька остаются постоянными. Обозначим как T_j^n температуру жидкости с координатой r_j на момент времени t_n и запишем (8) в виде баланса тепла для сферической ячейки объемом $V_{j-1/2} = 4\pi \cdot r_j^2 (h_j + h_{j-1})/2$:



щина *j*-го слоя, $r_{j+1/2} = r_j + h_j/2$, $r_{j-1/2} = r_j - h_{j-1}/2$. Нетрудно показать, что неявная конечноразностная схема (9) является консервативной. Уравнения (9) решались методом прогонки с использованием граничных условий $T_1^{n+1} = 0$, $T_{N+1}^{n+1} = 1$. Уравнение (7), записанное в разностном виде также по неявной схеме

$$\frac{R^{n+1} - R^n}{\Delta t} = \text{Ja} \cdot \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h_1}$$

решалось совместно с (9) посредством итерационной процедуры. Аналогичный численный алгоритм применялся в работе [8] для расчета динамической стадии роста пузырька при больших значениях перегрева.

Если бы поверхность пузырька была непроницаемой для жидкости, то перемещения узлов определялись бы только первой составляющей скорости в уравнении (2). При этом толщина *j*-го слоя в каждый момент времени вычислялась бы из условия сохранения объема сферического слоя: $h_j = V_j / 4\pi \cdot r_j^2$. Вторая составляющая скорости вызывает смещение *j*-го узла, равное $y_j = \stackrel{\bullet}{R} \Delta t \cdot (R^2 / r_j^2) (\rho_v / \rho_l)$, в направлении границы пузырька. Таким образом, толщина *j*-го слоя на момент времени t_{n+1} рассчитывалась из соотношения $h_j = V_j / 4\pi \cdot r_j^2 + y_j - y_{j+1}$. Все узлы A_j , в которых вычисляются значения T_j^{n+1} , приближаются к границе пузырька (см. рис. 2) и будут последовательно «поглощаться» этой границей. Поэтому расчет температуры на каждом шаге по времени состоял из двух этапов. На первом этапе по уравнению (9) вычислялись значения T_j^{n+1} в «поглощаемых» узлах A_j . На втором этапе вычислялись значения температуры в «непоглощаемых» узлах B_j , которые определяются расширением пузырька с непроницаемой поверхностью. Температура в узлах B_j вычислялась линейной интерполяцией между узлами A_i и A_{i+1} .

3. Результаты расчетов

В численных расчетах был выбран масштаб расстояния $R_m = 10^{-6}$ м. На рис. 3 показаны расчетные кривые R(t) для пузырька с начальным радиусом $R_0 = 2$ мкм при St = = 0,05 и различных значениях Ја. Там же для сравнения приведены теоретические зависимости (3), где модуль роста определяется формулой (6). При таком малом значении St поправка на проницаемость межфазной поверхности $\psi \approx 1$, поэтому траектории узлов сетки вычислялись как для пузырька с непроницаемой поверхностью (из условия сохранения объемов V_i). Из рисунка видно, что результаты расчетов хорошо согласуются





Рис. 3. Радиус пузырька в зависимости от времени при St = 0,05 и различных значениях Ja. Ja = 20 (1), 50 (2), 100 (3); сплошные линии — расчет, символы — теоретическая зависимость (3).

новится бесконечным.

от времени при Ja = 200 и различных значениях St. St = 0,25 (1); 0,5 (2); 0,8 (3); 0,9 (4); сплошные линии —

расчет, символы — теоретическая зависимость (3).

с теоретической зависимостью в широком диапазоне чисел Якоба. Довольно простая формула (4), из которой выведено решение (6), при $\psi = 1$ дает хорошее описание теплового потока на поверхности пузырька. Как оказалось, одного коэффициента $\sqrt{3}$, введенного в выражение $q = \lambda \Delta T / \sqrt{\pi at}$, вполне достаточно для корректного учета сферической симметрии и движения окружающей пузырек жидкости.

Второй важный аспект задачи — влияние проницаемости межфазной поверхности на тепловой поток q в уравнении (1). Если число Стефана не очень мало, то вычисленный из (5) коэффициент ψ может существенно превышать единицу, а если St \rightarrow 1, то $\psi \rightarrow \infty$. Физически это означает, что когда энтальпия перегрева жидкости $c_p \Delta T$ становится равной теплоте испарения L, то каждый элементарный объем жидкости у границы раздела может беспрепятственно превратиться в пар без подвода тепла извне. Таким образом, при St = 1 какие-либо ограничения для скорости фазового превращения исчезают, и модуль скорости роста пузырька в рамках тепловой энергетической схемы ста-

На рис. 4 показаны расчетные кривые R(t) для пузырька с начальным радиусом $R_0 = 1,5$ мкм при Ja = 200 и различных значениях St, здесь же для сравнения приведена теоретическая зависимость (3). Из рисунка видно, что результаты численного расчета хорошо согласуются с универсальным аналитическим решением (6) в том случае, когда поправка у на проницаемость межфазной поверхности существенно превышает единицу. С увеличением параметра St теоретические кривые $R_{\text{theory}}(t)$ лежат выше расчетных кривых (см. кривые 3 и 4). Тем не менее, теоретические кривые 3 и 4 повторяют форму расчетных кривых. Это означает, что зависимость (3) описывает расчетные кривые $R_1(t)$, причем значение константы *m* совпадает с теоретическим значением (6). Разность $\partial R = R_{\text{theory}} - R$ остается постоянной, а относительная «погрешность» $\delta R/R$ убывает с течением времени. Рис. 5 поясняет, что разность δR порождается начальными условиями в численном счете. На рис. 5 показаны расчетные кривые q(t) и приведена для сравнения теоретическая зависимость (4) при Ja = 200 для двух различных значений St. Теоретические данные для теплового потока дают в начальный момент времени бесконечно большое значение, в то время как в численных расчетах значение q(0) всегда конечное. На рис. 5 видно, что в начальной стадии процесса имеется положительная разность δq между теоретическим

Актершев С.П., Мезенцева Н.Н., Мезенцев И.В.



и расчетным значениями теплового потока, но с некоторого момента безразмерного времени τ расчетные кривые q(t) совпадают с теоретическими ($\tau \approx 0.03$ для St =0.25 и $\tau \approx 0.06$ для St = 0.8). Разность $\delta q(t)$, согласно уравнению (1), порождает накопленную в течении

интервала времени τ разность $\delta R = \frac{1}{\rho_v L} \int_0^t \delta q \partial t$. С увеличением коэффициента ψ растет

характерная величина δq в начальной стадии процесса, поэтому разность δR становится заметной только для достаточно больших значений St.

На рис. 6 показаны расчетные кривые K(t), где K — отношение расчетного значения q к тепловому потоку $q_* = \lambda \Delta T \sqrt{3} / \sqrt{\pi at}$, образующему основу формулы (4). Кривые 1-4 соответствуют различным значениям числа Стефана при заданном Ja = 200. Функция K(t) сначала быстро растет, достигая максимума, а затем выходит на «плато». Из рисунка видно, что установившееся значение K_{∞} существенно превышает единицу и растет с увеличением параметра St. Величина K_{∞} соответствует коэффициенту ψ в формуле (4), исходя из этого в таблице приведено сравнение расчетных значений K_{∞} с теоретическими значениями ψ по зависимости (5). Из таблицы видно, что рассчитанные значения K_{∞} очень близки к теоретическим значениям коэффициента ψ , вычисленным по зависимости (5). Разность между ними не превышает 1,3 % во всем исследованном диапазоне чисел Стефана.

Таблица Сравнение расчетных значений К_м с теоретическими значениями *У*

-	-	-	•	•
St	0,25	0,5	0,8	0,9
K_{∞}	1,198	1,531	2,549	3,710
ψ	1,194	1,519	2,583	3,707

Заключение

Разработан численный алгоритм решения исходных уравнений тепловой энергетической схемы, на основе которого проведено численное моделирование роста парового пузырька в однородно перегретой жидкости. Показано, что результаты численных расчетов хорошо согласуются с обобщенной аппроксимацией [3] в широком диапазоне чисел Якоба. В результате численных расчетов определено, что для чисел Стефана, сравнимых с единицей, учет проницаемости межфазной поверхности приводит к значительному увеличению скорости роста пузырька. Предложенная в работе [3] зависимость (5) для коэффициента проницаемости межфазной границы дает хорошее согласование с результатами численных расчетов.

Обозначения

- c_p теплоемкость жидкости, Дж/(кг К),
- *L* удельная теплота парообразования, Дж/кг,
- λ теплопроводность жидкости, Вт/(м·К),
- $\rho_{\rm v}$ плотность пара, кг/м³,
- $\rho_{\rm I}$ плотность жидкости, кг/ м³,
- *T*_s температура насыщения, К,
- T_{∞} температура жидкости вдали от пузырька, К.

Список литературы

- 1. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 374 с.
- 2. Scriven L.E. On the dynamics of phase growth // Chem. Eng. Sci. 1959. Vol. 10, No. 1/2. P. 1–13.
- 3. Авдеев А.А., Зудин Ю.Б. Тепловая энергетическая схема роста парового пузыря (универсальное приближенное решение) // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, № 2. С. 292–299.
- 4. Зудин Ю.Б. Бинарные схемы роста парового пузыря // Инж.-физ. журн. 2015. Т. 88, № 3. С. 559-569.
- 5. Авдеев А.А. Закономерности роста парового пузыря в объеме перегретой жидкости (тепловая энергетическая схема) // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52, № 4. С. 617–632.
- 6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
- Plesset M.S., Zwick S.A. The growth of vapor bubbles in superheated liquids // J. Appl. Phys. 1954. Vol. 25, No. 4. P. 493–500.
- 8. Актершев С.П. Рост парового пузырька в предельно перегретой жидкости // Теплофизика и аэромеханика 2005. Т. 12, № 3. С. 445–457.

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2019 г., после доработки — 29 апреля 2019 г., принята к публикации 4 июня 2019 г.