

УДК 532.51

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СПУТНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ГАЗА

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск 630090
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Проведен теоретический анализ волнового стекания вязких пленок жидкости при наличии спутного турбулентного газового потока. В широком диапазоне значений числа Рейнольдса жидкости и скорости газового потока рассчитаны параметры двумерных стационарно бегущих волн. С использованием полных уравнений Навье — Стокса вычислены гидродинамические характеристики течения жидкости. Волновая поверхность раздела рассматривается как малое возмущение, уравнения для газа линеаризуются в окрестности основного турбулентного течения. Для рассчитанных нелинейных волн, ответвляющихся от плоскопараллельного течения, получены различные “оптимальные” режимы стекания пленок. Показано, что при больших скоростях спутного газового потока вычисленные характеристики волн соответствуют характеристикам волн ряби, наблюдаемым в экспериментах.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, нелинейные волны, спутное и противоточное течение, волны ряби.

1. Введение и постановка задачи. Теоретические исследования пленочных течений начаты в работе [1], в которой получено точное решение уравнений Навье — Стокса в случае свободного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой вертикальной стенке, и в работе [2], где экспериментально и теоретически изучены различные волновые режимы стекания пленки. Большое количество работ посвящено как линейному, так и нелинейному анализу процесса волнообразования при свободном стекании пленки. Например, в [3–5] обнаружены различные волновые явления, возникающие при таком течении: пространственно-временная эволюция пленочных течений, переход двумерных волн в трехмерные, существование различных режимов стекания и т. д.

При противоточном течении газовой фазы и тонкого слоя вязкой жидкости в вертикальном канале возникает такое явление, как захлебывание. Впервые это явление исследовано в работе [6]. Позднее появились работы, посвященные изучению начала захлебывания для течений различных жидкостей и газов в различных каналах (см., например, [7–9]). Отмечено существенное влияние размера канала и физических свойств жидкости и газа на это явление. Предложено большое количество эмпирических зависимостей для предсказания начала захлебывания при наличии противоточного течения. Проблема заключается в том, что предложенные уравнения, описывающие начало процесса захлебывания, не “работают” при существенном отклонении параметров течения от условий экспериментов, на основе которых они были получены [7]. Следовательно, для анализа такого течения необходимо использовать более общие подходы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00259).

© Трифонов Ю. Я., 2013

Спутное течение газовой фазы и тонкого слоя вязкой жидкости в вертикальном канале представляет собой частный случай кольцевого течения, в котором, как правило, возникает дисперсная фаза — капли жидкости, уносимые с поверхности пленки в ядро газового потока и вновь осаждающиеся на нее. В таких течениях волны на поверхности пленки имеют сложную структуру, состоящую из капиллярной ряби и бегущих по ней волн возмущения, амплитуда которых в несколько раз превышает толщину остаточного слоя [3, 10, 11]. Экспериментально показано, что существует критическое значение расхода жидкости, ниже которого ни уноса капель, ни наличия крупных волн не наблюдается даже при очень больших скоростях газа (см., например, [12]). В этих режимах имеет место только мелкая капиллярная рябь, возникающая на обдуваемой газом поверхности пленки даже при очень малых числах Рейнольдса жидкости. Таким образом, задача о спутном волновом течении пленки жидкости и газа в вертикальном канале также имеет ряд особенностей, отсутствующих в задаче о свободном течении пленки.

В работе [13] при расчете реакции турбулентного газа на наличие волновой поверхности раздела с использованием интегральных уравнений для жидкой фазы противоточное течение газа рассматривалось как псевдоламинарное (подход Бенжамина — Майлса [13–16]). Рассчитаны динамические характеристики периодических возмущений при различных значениях безразмерного касательного напряжения. При такой постановке задачи средняя толщина пленки не менялась со временем, а расход жидкости менялся. В работе [14] с использованием полных уравнений Навье — Стокса описана гидродинамика жидкой фазы. Основное внимание уделялось анализу структуры волновых решений в диапазоне параметров, соответствующих началу захлебывания. При этом использовалось условие заданного расхода жидкости, что соответствует условиям эксперимента. В [15, 16] гипотеза Бенжамина — Майлса использовалась в задаче об увлечении пленки жидкости турбулентным газовым потоком в горизонтальном канале. Проведен детальный анализ применимости данной гипотезы при описании воздействия газа на волновую поверхность пленки.

Основной целью данной работы является изучение стационарно бегущих нелинейных волн в спутном течении тонкого слоя вязкой жидкости и турбулентного потока газа в вертикальном канале. Исследование таких решений проводится в широком диапазоне значений числа Рейнольдса жидкости, скорости газа и длины волны.

2. Основные уравнения. Совместное течение жидкой волновой пленки и газа между двумя гладкими вертикальными плоскостями описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями. Поверхность раздела рассматривается как малое возмущение турбулентного потока, поэтому поля скоростей и давления в газе представляются в виде

$$u^g = u_b^g + \hat{u}^g, \quad v^g = \hat{v}^g, \quad P^g = P_b^g + \hat{P}^g.$$

Здесь величины $u_b^g(y)$, $P_b^g(x)$ соответствуют основному решению в случае турбулентного течения между гладкими плоскостями, а возмущения $\hat{u}^g(x, t, y)$, $\hat{v}^g(x, t, y)$, $\hat{P}^g(x, t, y)$ представляют собой реакцию газовой фазы на наличие волновой поверхности раздела. Основные уравнения течения жидкости с граничными условиями на стенке и поверхности раздела, а также линеаризованные уравнения в газовой фазе с условием симметрии вдоль оси канала могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(3 \mp \lambda^f \varepsilon_2 \varepsilon_\rho n^2 \text{Re} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right); \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$u = v = 0, \quad y = 0; \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x}, \quad y = H(x, t); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu} n \left(\frac{d^2 u_b^g}{dy^2} H + \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} + 4\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} \right) \Big|_{y=0} \mp \\ \mp \frac{\lambda^f}{2} \varepsilon_{\rho} n^2 \operatorname{Re} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} \right) \Big|_{y=H(x,t)} = 0; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-\varepsilon_{\rho} n^2 \hat{P}^g + \frac{2\varepsilon \varepsilon_{\mu} n}{\operatorname{Re}} \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} \right) \Big|_{y=0} + \\ + \left(P - \frac{2\varepsilon}{\operatorname{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2} \right) \Big|_{y=H(x,t)} + \frac{(3 \operatorname{Fi})^{1/3}}{\operatorname{Re}^{5/3}} \frac{\varepsilon^2 \partial^2 H / \partial x^2}{[1 + \varepsilon^2 (\partial H / \partial x)^2]^{3/2}} = 0; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{du_b^g}{dy} H + \hat{u}^g \right) \Big|_{y=0} = \frac{1}{n} u \Big|_{y=H(x,t)}, \quad \hat{v}^g \Big|_{y=0} = \frac{1}{n} v \Big|_{y=H(x,t)}; \quad (8)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial t} + u_b^g \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial x} + \hat{v}^g \frac{du_b^g}{dy} = -\frac{\partial \hat{P}^g}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_2 \operatorname{Re}^g} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}^g}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}^g}{\partial x^2} \right); \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial t} + u_b^g \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \hat{P}^g}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2 \operatorname{Re}^g} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}^g}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{v}^g}{\partial x^2} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}^g}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} = 0, \quad \hat{v}^g = 0, \quad y = \frac{1}{2\varepsilon_2}. \quad (12)$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости жидкости в направлении силы тяжести и вдоль оси y соответственно; P — давление в жидкости; $H(x, t)$ — толщина пленки; R — радиус кривизны; λ^f — коэффициент сопротивления турбулентного течения газа в гладком канале; $P_b^g = \pm \lambda^f \varepsilon_2 x / \varepsilon$ — безразмерное давление газа в гладком канале (в случае противотока используется знак “+”, в случае спутного течения — знак “−”). В случае противотока в уравнениях (1), (6) вместо знака “ \mp ” используется знак “−”, в случае спутного течения газа — знак “+”. Изменение скорости газа по нормали к стенке определяет коэффициент сопротивления $(du_b^g / dy) \Big|_{y=0} = \mp 0,5 \lambda^f \varepsilon_2 \operatorname{Re}^g$. При этом учтено, что параметры задачи связаны соотношением $n \varepsilon_{\rho} \operatorname{Re} = \varepsilon_2 \varepsilon_{\mu} \operatorname{Re}^g$.

Уравнения (1)–(12) записаны в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными величинами (с верхним индексом “*”) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, & t &= \frac{u_0 t^*}{L}, & y &= \frac{y^*}{H_0}, & u &= \frac{u^*}{u_0}, & v &= \frac{v^*}{\varepsilon u_0}, & P &= \frac{P^*}{\rho u_0^2}, & H &= \frac{H^*}{H_0}, & u^g &= \frac{(u^g)^*}{u_0^g}, \\ v^g &= \frac{(v^g)^*}{\varepsilon u_0^g}, & P^g &= \frac{(P^g)^*}{\rho_g (u_0^g)^2}, & \text{Re} &\equiv \frac{u_0 H_0}{\nu} \equiv \frac{g(1-\varepsilon_\rho)H_0^3}{3\nu^2}, & \varepsilon &= \frac{H_0}{L}, & \varepsilon_2 &= \frac{H_0}{D}, \\ \varepsilon_\mu &= \frac{\mu_g}{\mu}, & \varepsilon_\rho &= \frac{\rho_g}{\rho}, & n &= \frac{u_0^g}{u_0}, & \text{Re}^g &= \frac{u_0^g D}{\nu_g}, & \text{Fi} &= \frac{(\sigma/\rho)^3}{g(1-\varepsilon_\rho)\nu^4}. \end{aligned}$$

Здесь ν , μ — кинематическая и динамическая вязкости соответственно; ρ — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение; L — период волны; Fi — пленочное число; H_0 , u_0 — толщина и скорость пленки соответственно; $\text{Re} = U_{LS} D_e / (4\nu)$ — число Рейнольдса в жидкости; $U_{LS} = Q_L / S$ — среднерасходная скорость жидкости; $D_e = 4S/p$ — эквивалентный гидравлический диаметр канала ($D_e = 2D$); p — периметр смоченной поверхности канала; Q_L — объемный расход жидкости через поперечное сечение площадью S ; D — расстояние между плоскостями; величины с индексом g соответствуют газу; $u_0^g = 0,5U_{GS}$, $u_0^g = 0,5Q_G/S$ — половина среднерасходной скорости газа U_{GS} ; Q_G — объемный расход газа через поперечное сечение площадью S .

Течение газа предполагается турбулентным. Соответствующие пульсационные члены, обусловленные наличием волновой поверхности раздела, в осредненных уравнениях для газа предполагаются малыми и в (9), (10) опущены. Такой квазиламинарный подход к описанию турбулентного течения газа вдоль слабоволнистой поверхности раздела применялся в работах [13, 14] в случае противоточного течения. Уравнения (4), (8) представляют собой условия прилипания на стенке и межфазной поверхности раздела соответственно, уравнение (5) — кинематическое условие на поверхности раздела, а уравнения (6), (7) — условия равенства касательных и нормальных сил, действующих на малый элемент поверхности раздела со стороны газа и жидкости соответственно. Как отмечено выше, волновая поверхность раздела представляет собой малое возмущение турбулентного течения газа, поэтому условия на поверхности раздела со стороны газовой фазы могут быть разложены в ряд в окрестности невозмущенной границы. В уравнениях (6)–(8) сохранены только первые члены такого разложения. Уравнения (12) представляют собой условия симметрии в середине канала.

В данной работе рассматриваются стационарно бегущие волны ($H(x_1)$, $u(x_1, y)$, $v(x_1, y)$, $P(x_1, y)$, $\hat{u}^g(x_1, y)$, $\hat{v}^g(x_1, y)$, $\hat{P}^g(x_1, y)$). Здесь $x_1 \equiv x - ct$; c — фазовая скорость. В предположении, что скорость газа значительно больше характерной скорости жидкости ($n \gg 1$), “нестационарные” члены $(1/n) \partial \hat{u}^g / \partial t$ и $(1/n) \partial \hat{v}^g / \partial t$ в уравнениях (9), (10), а также правые части $(1/n) u|_{y=H}$ и $(1/n) v|_{y=H}$ в условиях прилипания (8) можно опустить (см. [15, 16]). Условия малости отброшенных членов в уравнениях (9), (10) и левой части уравнения (8) сводятся к неравенствам

$$|\hat{u}^g| \ll u_b^g, \quad \left| \frac{\partial^k \hat{u}^g}{k! \partial y^k} \right|_{y=0} H^{k-1} \ll \left. \frac{du_b^g}{dy} \right|_{y=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

соответственно и должны проверяться после решения задачи. В проведенных расчетах волновая толщина пленки не превышала толщины вязкого подслоя. По-видимому, этого достаточно для того, чтобы уравнения (1)–(12) были справедливы. Более детальный анализ справедливости принятых допущений не является целью данной работы. Заметим только, что аналогичные упрощения уравнений для газовой фазы использовались ранее

в задаче о противотоке [13, 14] и задаче о горизонтальном слое жидкости, увлекаемом турбулентным газовым потоком [15, 16].

Уравнения (8)–(12) для газовой фазы решаются независимо от уравнений для жидкости и представляют собой линейную систему, в которой каждая из гармоник толщины пленки генерирует соответствующие поля скоростей и давления в газовой фазе. С учетом уравнения неразрывности (11) эти возмущения \hat{u}^g , \hat{v}^g , \hat{P}^g могут быть представлены в следующем виде:

$$\hat{u}^g(x_1, y) = - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \frac{dF^k}{dy} H^k \exp(2\pi i k x_1), \quad (F^{-k})^* = F^k; \quad (13)$$

$$\hat{v}^g(x_1, y) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} 2\pi i k F^k(y) H^k \exp(2\pi i k x_1); \quad (14)$$

$$\hat{P}^g(x_1, y) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} P_g^k(y) H^k \exp(2\pi i k x_1), \quad (P_g^{-k})^* = P_g^k. \quad (15)$$

Для расчета касательных и нормальных напряжений со стороны газовой фазы необходимо подставить уравнения (13)–(15) в уравнения (8)–(12). После ряда преобразований получаем

$$2\pi i k \varepsilon \varepsilon_2 \operatorname{Re}^g \left(\frac{d^2 u_b^g}{dy^2} F^k + u_b^g \varepsilon^2 (2\pi k)^2 F^k - u_b^g \frac{d^2 F^k}{dy^2} \right) = - \frac{d^4 F^k}{dy^4} + 2\varepsilon^2 (2\pi k)^2 \frac{d^2 F^k}{dy^2} - \varepsilon^4 (2\pi k)^4 F^k; \quad (16)$$

$$\frac{dF^k}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{du_b^g}{dy} \Big|_{y=0}, \quad F^k \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{d^2 F^k}{dy^2} \Big|_{y=0,5/\varepsilon_2} = F^k \Big|_{y=0,5/\varepsilon_2} = 0; \quad (17)$$

$$P_g^k = u_b^g \frac{dF^k}{dy} - \frac{du_b^g}{dy} F^k - \frac{i}{2\pi k \varepsilon \varepsilon_2 \operatorname{Re}^g} \left(- \frac{d^3 F^k}{dy^3} + (2\pi k \varepsilon)^2 \frac{dF^k}{dy} \right); \quad (18)$$

$$u_b^g = \begin{cases} \mp \eta \sqrt{\lambda^f / 2}, & \eta < 8,74^{7/6}, \\ \mp 8,74 \eta^{1/7} \sqrt{\lambda^f / 2}, & \eta > 8,74^{7/6}, \end{cases} \quad \lambda^f = \frac{0,3164}{(4 \operatorname{Re}^g)^{1/4}}, \quad \eta \equiv \varepsilon_2 y \operatorname{Re}^g \sqrt{\lambda^f / 2}. \quad (19)$$

Для определения функций $F^k(y)$ уравнения (16)–(19) решались численно (сводились к краевой задаче для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка) при $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Уравнения (19) соответствуют известному профилю турбулентного течения

$$\frac{(u_b^g)^*}{v_*} = 8,74 \left(\frac{y^* v_*}{\nu_g} \right)^{1/7}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_g}{\rho_g}}, \quad \eta \equiv \frac{y^* v_*}{\nu_g}$$

и формуле Блазиуса для коэффициента сопротивления.

Выражения для размерных давления и касательного напряжения имеют вид

$$(P_b^g)^* \equiv \pm \frac{\lambda^f}{2D} \frac{\rho_g U_{GS}^2}{2} x^* = \frac{2\tau_g}{D} x^*, \quad \tau_g \equiv \mu_g \left. \frac{d(u_b^g)^*}{dy^*} \right|_{y^*=0} = \pm \lambda^f \frac{\rho_g U_{GS}^2}{8}.$$

Из уравнений (13), (14), (17), (18) следует

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \right|_{y=0} &= \frac{dH}{dx} \left. \frac{du_b^g}{dy} \right|_{y=0}, & \left. \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} \right|_{y=0} &= - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \left. \frac{d^2 F^k}{dy^2} \right|_{y=0} H^k \exp(2\pi i k x), \\ \hat{P}^g \Big|_{y=0} &= - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \frac{i}{2\pi k \varepsilon \varepsilon_2 \text{Re}^g} \left(- \left. \frac{d^3 F^k}{dy^3} \right|_{y=0} + (2\pi k \varepsilon)^2 \left. \frac{du_b^g}{dy} \right|_{y=0} \right) H^k \exp(2\pi i k x). \end{aligned}$$

Эти уравнения используются в модифицированных граничных условиях (6), (7) для расчета влияния газовой фазы на гидродинамику жидкой волновой пленки.

Форма свободной поверхности заранее неизвестна, поэтому используем преобразование координат $\eta = y/H$, определяющее область течения $x_1 \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1]$. Для построения стационарных решений уравнений (1)–(7) применим спектральный метод. Более подробно численный алгоритм изложен в [14].

В уравнениях (1)–(12) восемь параметров: ε , ε_2 , ε_μ , ε_ρ , n , Fi , Re , Re^g . Нетрудно показать, что только семь из этих параметров являются независимыми, так как $n = (\varepsilon_2 \varepsilon_\mu / \varepsilon_\rho) \text{Re}^g / \text{Re}$. В дальнейших расчетах в качестве независимых параметров будем использовать величины λ_{neut}/L , $\sqrt{\sigma/[\rho g(1 - \varepsilon_\rho)]}/D$, ε_μ , ε_ρ , Ka , Re , Re^g (λ_{neut} — длина волны нейтрального возмущения; $\text{Ka} \equiv \text{Fi}^{1/11}$ — число Капицы). Длина волны $\lambda_{neut} = H_0 f(\sqrt{\sigma/[\rho g(1 - \varepsilon_\rho)]}/D, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\rho, \text{Ka}, \text{Re}, \text{Re}^g)$ нейтрального возмущения определяется при решении задачи линейной устойчивости течения с плоской поверхностью раздела. Критерии в уравнениях (1)–(12) рассчитываются через параметры $\varepsilon = (H_0/\lambda_{neut})(\lambda_{neut}/L)$, $\varepsilon_2 = (3 \text{Re} / \text{Ka})^{1/3} (\sqrt{\sigma/[\rho g(1 - \varepsilon_\rho)]}/D) / \text{Ka}^{3/2}$.

Такой выбор независимых параметров имеет ряд преимуществ. Параметры Ka , $\sqrt{\sigma/[\rho g(1 - \varepsilon_\rho)]}/D$, ε_μ , ε_ρ зависят только от физических свойств жидкости и газа и от размера канала. Параметры Re и Re^g меняются в зависимости от расходов фаз. Выбор параметра λ_{neut}/L в качестве независимого позволяет корректно сравнить результаты расчетов с использованием различных интегральных и асимптотических моделей с результатами расчетов по уравнениям Навье — Стокса.

Следует отметить, что в расчетах стационарных решений используется условие постоянного расхода $\langle q \rangle = 1$. С учетом кинематического условия (5) и условия прилипания (4) в результате интегрирования уравнения неразрывности (3) получаем

$$q(x_1) - cH(x_1) = \text{const} = \langle q \rangle - c\langle H \rangle = 1 - c\langle H \rangle, \quad q(x_1) \equiv H(x_1) \int_0^1 u \, d\eta.$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ — среднее по длине волны. Условие постоянства расхода соответствует условиям эксперимента, в котором в процессе пространственно-временной эволюции масса вытекающей в некоторый объем жидкости и вытекающей из него сохраняется.

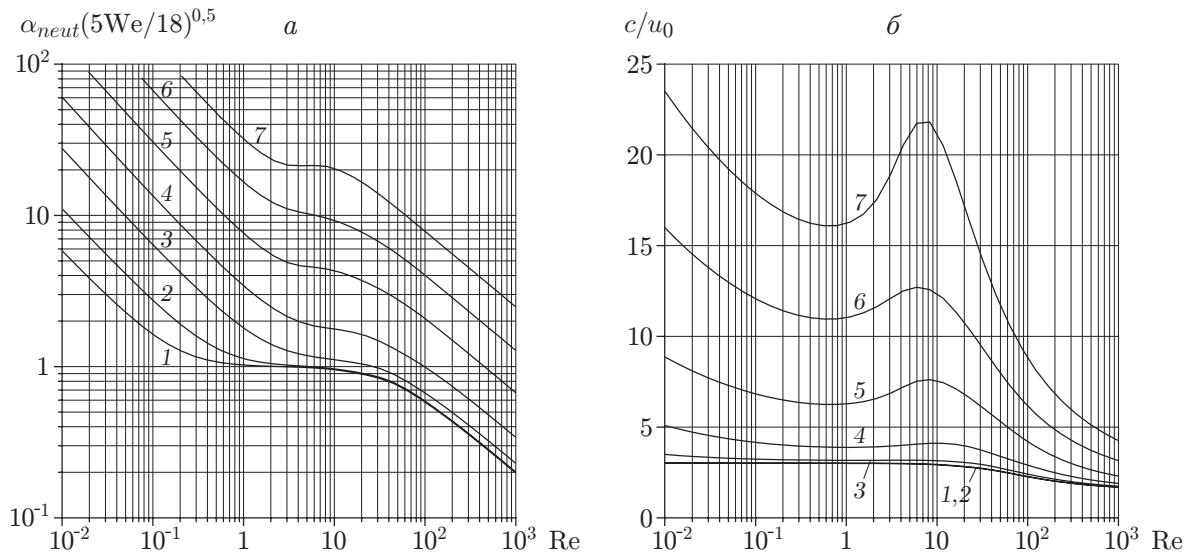


Рис. 1. Волновое число (а) и фазовая скорость (б) нейтрального возмущения:
 1 — $U_{GS} = 1$ м/с; 2 — $U_{GS} = 2$ м/с; 3 — $U_{GS} = 5$ м/с; 4 — $U_{GS} = 10$ м/с; 5 —
 $U_{GS} = 20$ м/с; 6 — $U_{GS} = 40$ м/с; 7 — $U_{GS} = 60$ м/с

3. Результаты расчетов. Вследствие большого количества параметров ограничимся рассмотрением спутного течения вязкой пленки воды и воздуха в канале диаметром $D = 7,5$ мм, что соответствует условиям эксперимента [17]. В этом случае безразмерные критерии имеют следующие значения: $Ka = 9,2615$, $\varepsilon_\mu = 0,0182$, $\varepsilon_\rho = 0,0012$, $\sqrt{\sigma/(\rho g)}/D = 0,3612$. На рис. 1 представлены результаты расчетов линейной устойчивости течения с плоской межфазной границей раздела при различных значениях скорости газового потока ($\alpha_{neut} = 2\pi H_0/\lambda_{neut}^*$, $We = (3Fi)^{1/3}/Re^{5/3}$ — число Вебера). При $U_{GS} = 0$, $Re \approx 1 \div 10$ волновое число принимает значение, равное значению, полученному в результате асимптотического анализа: $\alpha_{neut}(5We/18)^{1/2} = 1$. При конечных значениях скорости газа $U_{GS} \leq 2$ м/с результаты расчетов существенно отклоняются от результатов, полученных с использованием асимптотической теории, как при умеренных значениях числа Рейнольдса ($Re > 20$), так и при малых его значениях. При больших числах Рейнольдса размерная длина волны пропорциональна капиллярной постоянной: $\lambda_{neut}^* = A\sqrt{\sigma/(\rho g)}$, $A = \text{const}$. С увеличением U_{GS} значение постоянной A существенно уменьшается. Заметим также, что с увеличением скорости газа U_{GS} фазовая скорость c нейтральных возмущений растет и при $U_{GS} > 5$ м/с ее зависимость от Re имеет немонотонный характер.

На рис. 2 приведены основные характеристики нелинейных волн первого семейства, ответвляющихся от кривой нейтральной устойчивости (H_{\max} — максимальная толщина волновой пленки). При всех рассмотренных значениях Re и U_{GS} решения первого семейства переходят в решения, соответствующие “длинным” волнам — вмятинам. На рис. 3 в безразмерных координатах представлены профили толщины таких волн, а также изо-

линии функции тока $\Psi(x, \eta) = \int_0^\eta (c - u)H d\eta'$. Изолинии построены в системе координат,

движущейся со скоростью, равной фазовой скорости волны. В этой системе координат они совпадают с траекториями жидких частиц. Расчеты показали, что при всех рассмотренных значениях Re и U_{GS} на кривых зависимости $\langle H \rangle(\lambda_{neut}/L)$ существует единственный минимум в области $\lambda_{neut}/L \geq 0,5$. Длина волны, соответствующая этому минимуму, опре-

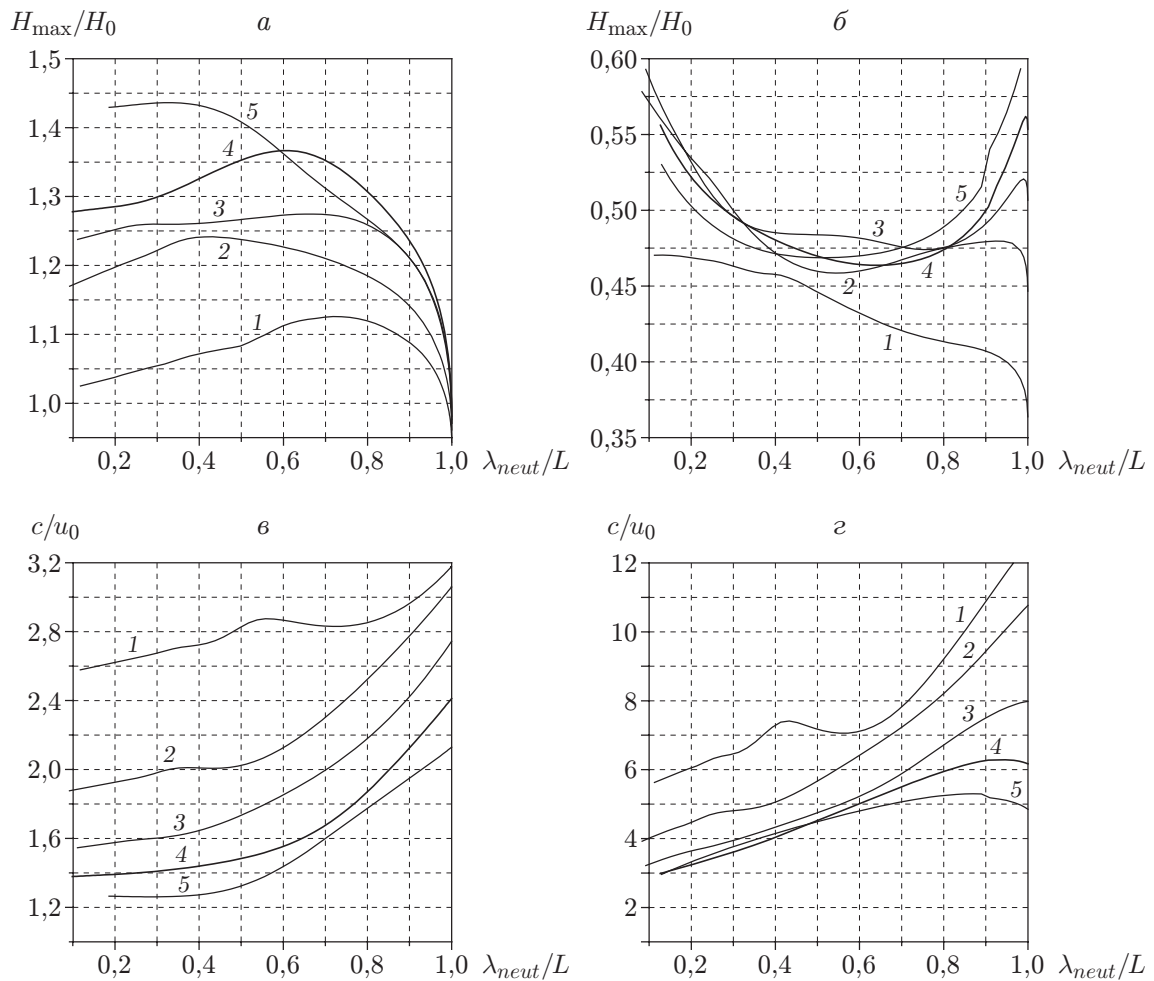


Рис. 2. Основные характеристики волн первого семейства:

a, в — $U_{GS} = 5$ м/с, *б, г* — $U_{GS} = 40$ м/с; 1 — $Re = 5$; 2 — $Re = 20$; 3 — $Re = 50$; 4 — $Re = 100$; 5 — $Re = 200$

деляет “оптимальный” режим течения первого семейства волн. При $U_{GS} \leq 5$ м/с характеристики волн незначительно отличаются от соответствующих значений в случае свободного стекания пленки. Увеличение скорости газового потока приводит к существенному уменьшению максимальной толщины пленки и росту фазовой скорости волн.

Известно, что в случае стекания пленки без газа существуют различные типы волн. Результаты линейного анализа устойчивости волн относительно периодических возмущений с периодом, равным периоду нелинейной волны L , позволяют построить бифуркационные линии на плоскости параметров λ_{neut}/L и Re/Ka (рис. 4). Эти линии образуют сложную многоскладчатую и многолистую поверхность. Для одного и того же набора параметров можно рассчитать различные типы нелинейных волн начиная с малых значений Re/Ka и меняя “траекторию движения” по плоскости $(\lambda_{neut}/L, Re/Ka)$. Большинство этих решений являются неустойчивыми. Существует “верхний” лист поверхности, где имеют место устойчивые волновые решения, в том числе “оптимальные” режимы. Решения, соответствующие “верхнему” листу, получаются непрерывным продолжением решений первого семейства на плоскости параметров $(\lambda_{neut}/L, Re/Ka)$ без пересечения бифуркационных линий. Решения устойчивы между линиями 8 и 0, 2' и 2, 3' и 3 и т. д., соответствующими складкам. Линия 8 определяется из условия $\lambda_{neut}/L = 1$. Установле-

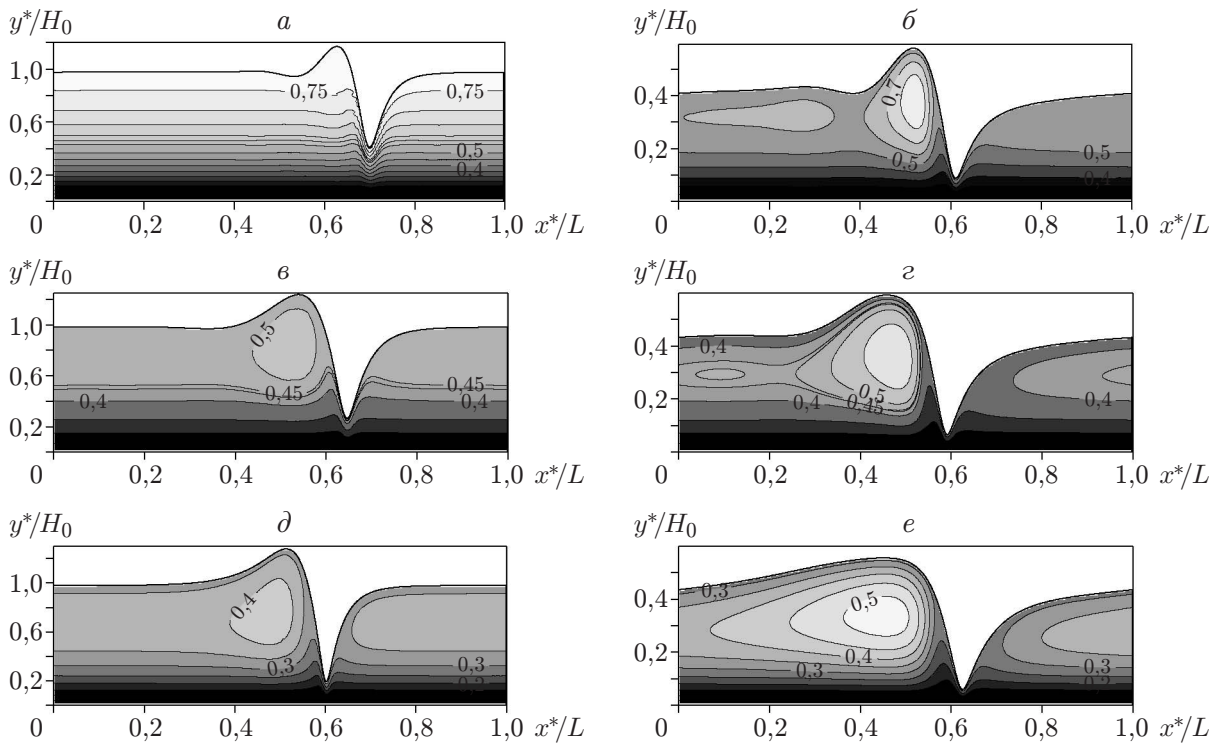


Рис. 3. Профили толщины “длинных” волн первого семейства ($\lambda_{neut}/L = 0,1$) и изолинии функции тока:
a, в, д — $U_{GS} = 5$ м/с (*a* — $Re = 20$, $c^* = 0,205$ м/с, *в* — $Re = 50$, $c^* = 0,311$ м/с, *д* — $Re = 100$, $c^* = 0,441$ м/с); *б, з, е* — $U_{GS} = 40$ м/с (*б* — $Re = 20$, $c^* = 0,430$ м/с, *з* — $Re = 50$, $c^* = 0,650$ м/с, *е* — $Re = 100$, $c^* = 0,950$ м/с)

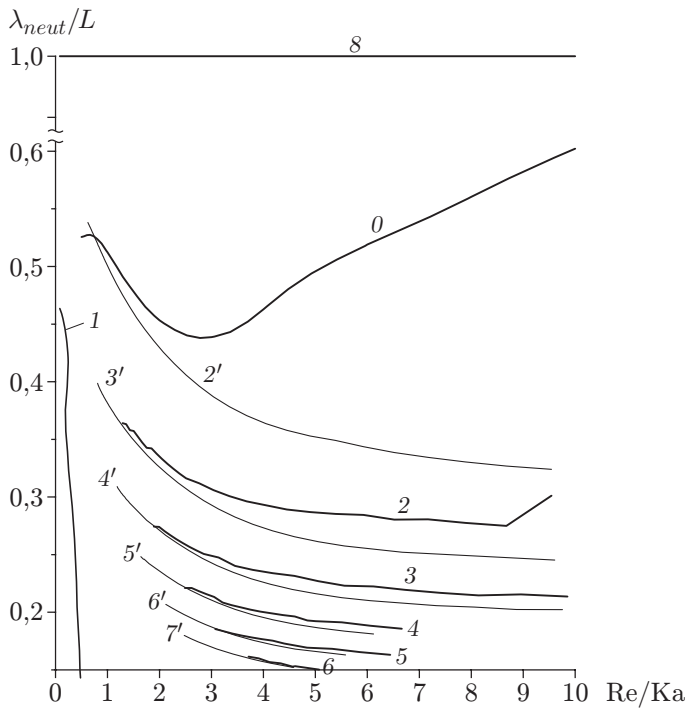


Рис. 4. Бифуркационные линии стационарно бегущих волн ($U_{GS} = 0$):
 0–6 — бифуркация Ландау — Хопфа (вещественная часть одного из собственных значений обращается в нуль); 2'–7' — бифуркация “разворота” (вещественное собственное значение обращается в нуль); 8 — граница области устойчивости плоскопараллельного течения

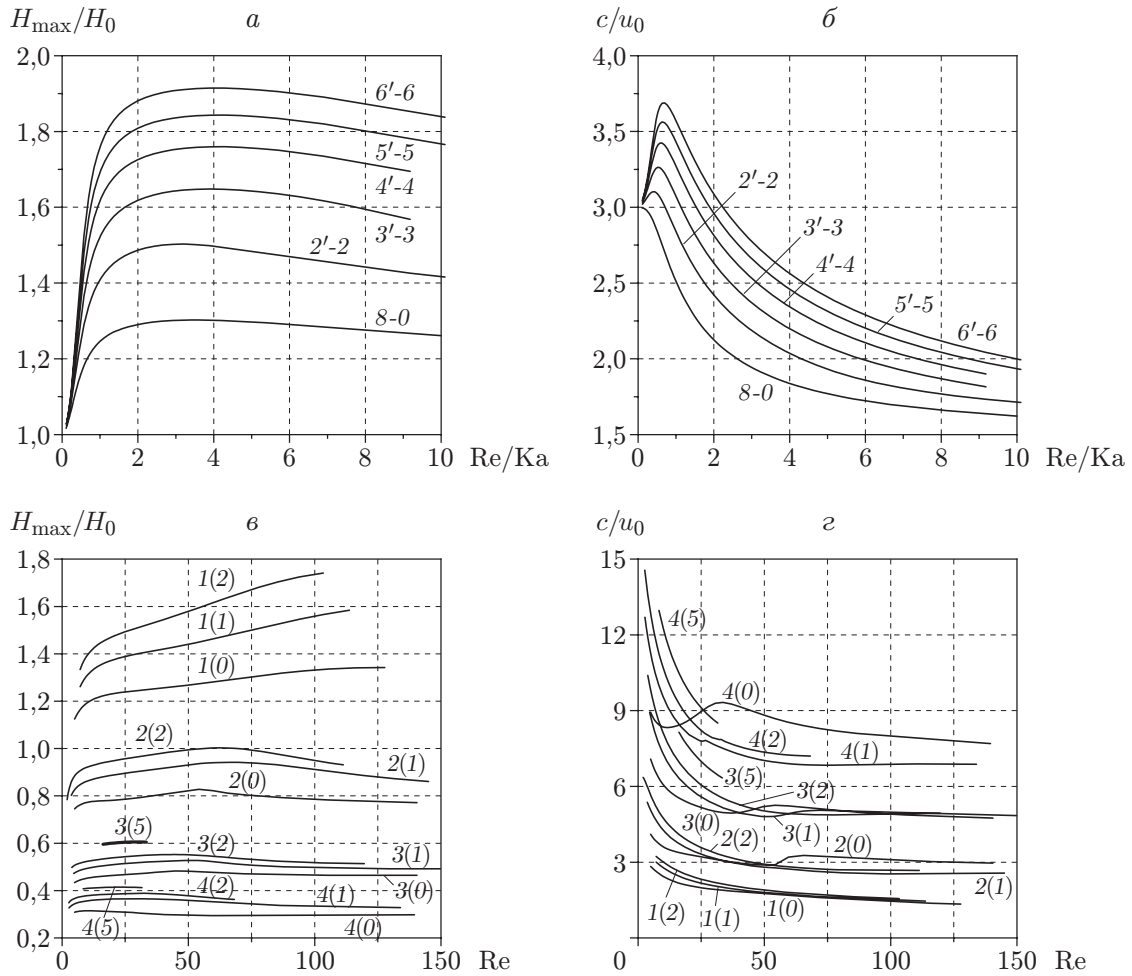


Рис. 5. Зависимости максимальной толщины пленки (а, в) и фазовой скорости (б, г) от числа Рейнольдса для различных “оптимальных” волн:
 а, б — $U_{GS} = 0$ (номера линий соответствуют номерам бифуркационных линий на рис. 4); в, г — $U_{GS} > 0$ (1 — $U_{GS} = 5$ м/с, 2 — $U_{GS} = 20$ м/с, 3 — $U_{GS} = 40$ м/с, 4 — $U_{GS} = 60$ м/с; цифры в скобках — номера складок, для которых рассчитаны “оптимальные” режимы)

но, что зависимость средней толщины пленки от длины волны имеет минимум в каждой складке и определяет различные “оптимальные” волны. Зависимости максимальной толщины и фазовой скорости от числа Рейнольдса для различных “оптимальных” режимов показаны на рис. 5, а, б. Заметим, что при значениях числа Рейнольдса $Re \geq 10$ диапазон значений максимальной толщины пленки, соответствующий различным “оптимальным” волнам, составляет $40 \div 45$ %, для рассчитанных значений фазовой скорости — приблизительно 35 %.

При конечных значениях скорости газового потока сложная многоскладчатая структура решений на плоскости параметров $(\lambda_{neut}/L, Re/Ka)$ близка к структуре в случае $U_{GS} = 0$. В этом случае также имеют место складки, для каждой из которых существует “оптимальный” режим, соответствующий минимальной средней толщине пленки. Исследование устойчивости стационарно бегущих волн при $U_{GS} \neq 0$ в данной работе не проводилось. О многоскладчатости поверхности можно судить, получая различные решения при одном и том же наборе параметров. На рис. 5, в, г представлены зависимости мак-

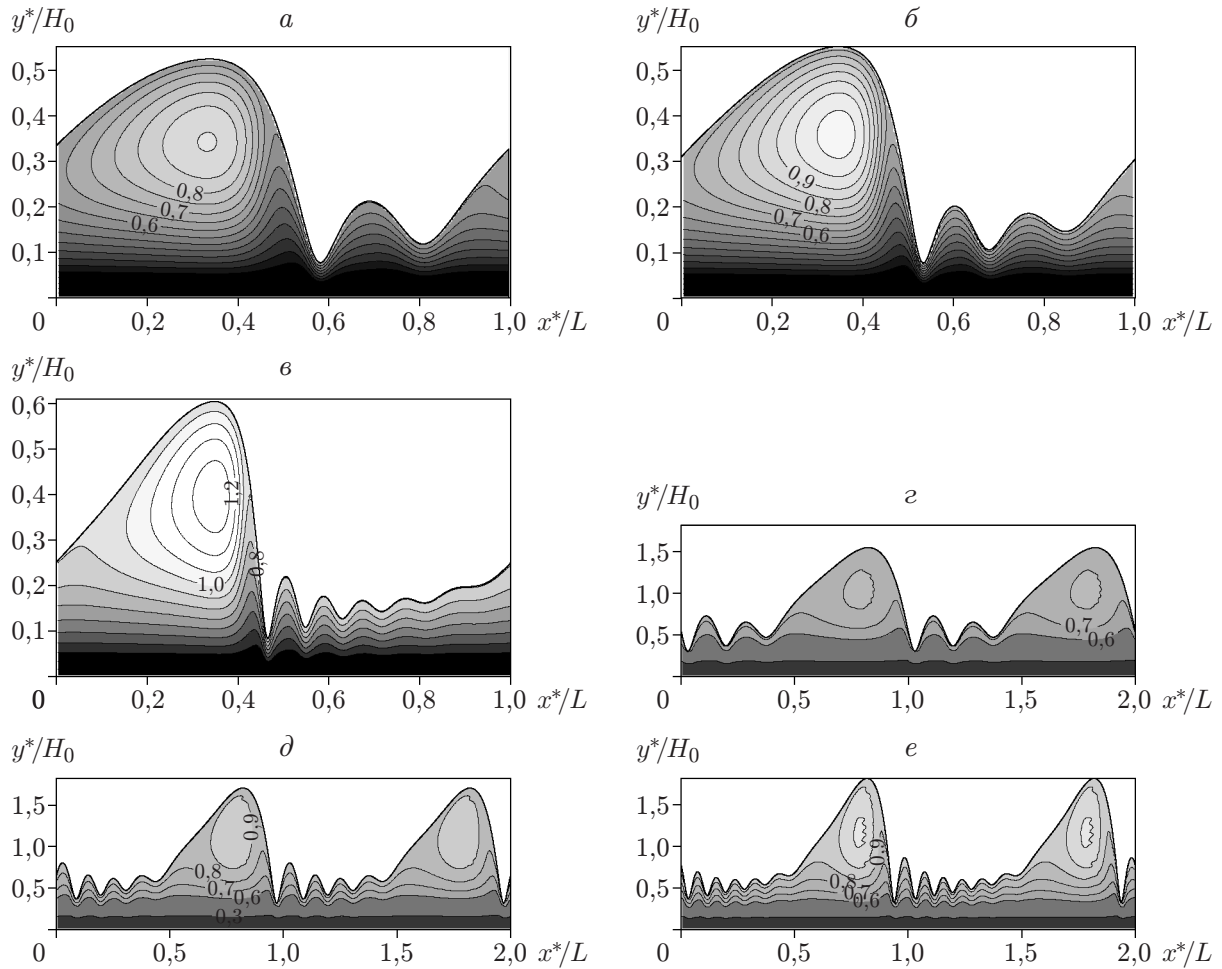


Рис. 6. Изолинии функции тока (в движущейся системе координат) для различных “оптимальных” типов волн:
a–в — $Re = 40$, $U_{GS} = 40$ м/с (*a* — складка 1, *б* — складка 2', *в* — складка 5' (см. рис. 4)); *г–е* — $Re / Ka = 5$, $U_{GS} = 0$ (*г* — режим между складками 3' и 3, *д* — режим между складками 5' и 5, *е* — режим между складками 6' и 6 (см. рис. 4))

симальной толщины и фазовой скорости от числа Рейнольдса для трех (или четырех) “оптимальных” типов волн при различных значениях скорости газа. Линии на рис. 5, *в, г* аналогичны зависимостям, полученным для “оптимальных” режимов между складками при $U_{GS} = 0$ (см. рис. 4). С увеличением скорости газа максимальное значение толщины и интервал ее изменения для различных “оптимальных” режимов уменьшаются. Профили толщины пленки, представленные на рис. 6, *a–в*, качественно близки к соответствующим профилям в случае свободного стекания (см. рис. 6, *г–е*).

На рис. 7 приведены результаты расчетов и экспериментальные данные [17] о волнах при спутном течении газа и жидкости. Экспериментальные данные соответствуют малым волнам ряби.

Заключение. Выполнен теоретический анализ волнового стекания вязких пленок жидкости при наличии спутного турбулентного газового потока. Проведено исследование нелинейных волновых режимов включая анализ линейной устойчивости плоскопараллельного течения. Установлено, что газовый поток существенно влияет на характеристики волн, уменьшая их амплитуду и увеличивая фазовую скорость. Показано, что сложная мно-

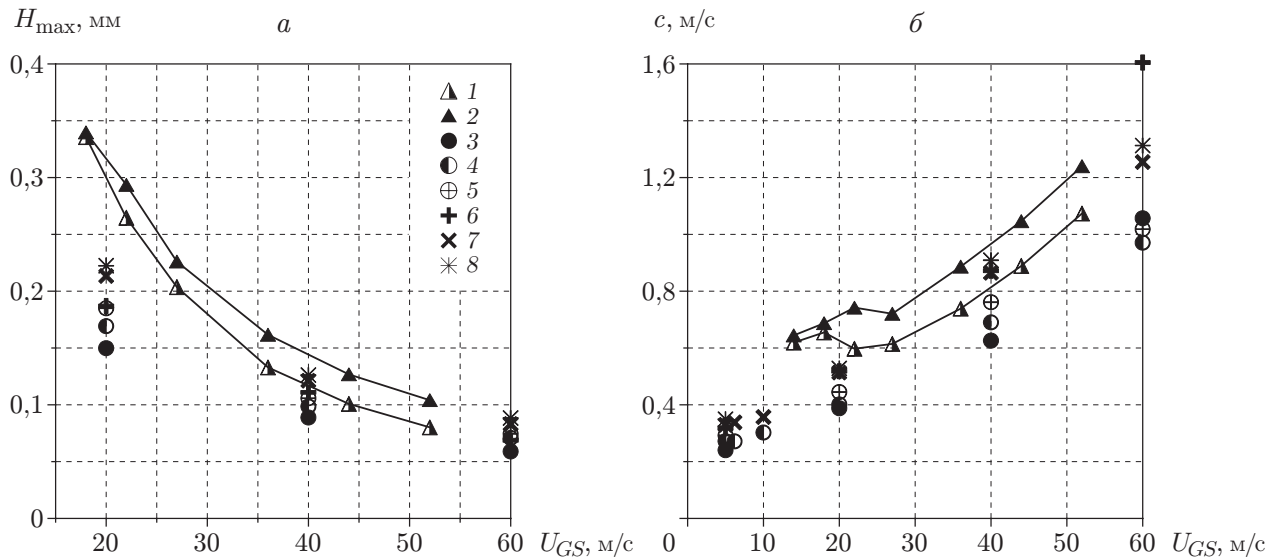


Рис. 7. Экспериментальные (1, 2) и расчетные (3–8) зависимости максимальной толщины волновой пленки (а) и фазовой скорости (б) от скорости газа:
 1 — $Re = 20$, 3–5 — $Re = 24$, 2, 6–8 — $Re = 40$ (3, 6 — “оптимальное” решение для волн первого семейства, 4, 7 — “оптимальное” решение, соответствующее первой складке, 5, 8 — “оптимальное” решение, соответствующее второй складке)

госкладчатая и многолистная поверхность, определенная на плоскости параметров (L, Re) в случае свободного стекания пленки, существует при любых скоростях газового потока. При больших скоростях газового потока рассчитанные волны соответствуют волнам ряби, наблюдаемым в экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nusselt W. Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes // Z. VDI. 1916. Bd 60. S. 541–546.
2. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
3. Chu K. I., Dukler A. E. Statistical characteristics of thin, wavy films. 2. Studies of the substrate and its wave structure // AIChE J. 1974. V. 20. P. 695–706.
4. Alekseenko S. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G. Wave formation on a vertical falling liquid film // AIChE J. 1985. V. 31. P. 1446–1460.
5. Liu J., Paul J. D., Gollub J. P. Measurements of the primary instabilities of film flow // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 69–101.
6. Семенов П. А. Течение жидкости в тонких слоях // Журн. техн. физики. 1944. № 14. С. 427–437.
7. Zapke A., Kröger D. G. Counter-current gas-liquid flow in inclined and vertical ducts. 2. The validity of the Froude — Ohnesorge number correlation for flooding // Intern. J. Multiphase Flow. 2000. V. 26. P. 1457–1468.
8. Vlachos N. A., Paras S. V., Mouza A. A., Karabelas A. J. Visual observations of flooding in narrow rectangular channels // Intern. J. Multiphase Flow. 2001. V. 27. P. 1415–1430.
9. Drosos E. I. P., Paras S. V., Karabelas A. J. Counter-current gas-liquid flow in a vertical narrow channel — liquid film characteristics and flooding phenomena // Intern. J. Multiphase Flow. 2006. V. 32. P. 51–81.

10. **Woodmansee D. E., Hanratty T. J.** Base film over which roll waves propagate // *AIChE J.* 1969. V. 15. P. 712–715.
11. **Asali J. C., Hanratty T. J.** Ripples generated on a liquid film at high gas velocities // *Intern. J. Multiphase Flow.* 1993. V. 19. P. 229–243.
12. **Azzopardi B. J.** Artificial waves in annular two-phase flow // *Basic mechanisms in two-phase flow and heat transfer* / B. J. Azzopardi, P. B. Whalley; Ed. by P. Rothe, R. Lahey. Chicago: ASME, 1980.
13. **Демехин Е. А., Токарев Г. Ю., Шкадов В. Я.** Неустойчивость и нелинейные волны в вертикальной пленке жидкости, текущей в противотоке с турбулентным газовым потоком // *Теорет. основы хим. технологии.* 1989. № 23. С. 64–70.
14. **Trifonov Yu. Ya.** Flooding in two-phase counter-current flows: numerical investigation of the gas-liquid wavy interface using the Navier — Stokes equations // *Intern. J. Multiphase Flow.* 2010. V. 36. P. 549–557.
15. **Гугучкин В. В., Демехин Е. А., Калугин Г. Н. и др.** О линейной и нелинейной устойчивости совместного плоскопараллельного течения пленки жидкости и газа // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1979. № 1. С. 36–42.
16. **Демехин Е. А.** Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1981. № 2. С. 37–42.
17. **Alekseenko S. V., Cherdantsev A. V., Heinz O. M., et al.** An image analysis method as applied to study the space-temporal evolution of waves in an annular gas-liquid flow // *Pattern Recognition Image Anal.* 2011. V. 21, N 3. P. 441–445.

*Поступила в редакцию 11/І 2013 г.,
в окончательном варианте — 4/ІІІ 2013 г.*
