УДК 539.375

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ С ДЕФЕКТАМИ

А. И. Козинкина

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990 Москва
E-mail: akozinkina@mail.ru

На основе плоской модели пластического тела определены компоненты матрицы жесткостей с учетом образования и развития анизотропной поврежденности на примере одноосного растяжения стали Ст. 3. Для характеристики дефектообразования вводится векторная мера поврежденности, используются данные микроструктурного анализа и устанавливается точка деструкции. Полученные оценки упругих модулей и экспериментальные данные свидетельствуют о качественном соответствии представленной модели реальным процессам деформирования и разрушения и могут быть использованы для определения ресурса материалов.

Ключевые слова: пластическое тело, системы скольжения, упругие модули, анизотропия, дефекты.

Для построения теории прочности и описания процесса разрушения твердых тел необходимо прежде всего идентифицировать реальную дефектность и учесть ее влияние на деформационные характеристики материалов. Ясно, что в этом случае неизбежно усложнение существующих механических моделей, которые должны основываться на данных эксперимента и на физических механизмах процесса разрушения.

В числе основных параметров как в аналитическом аппарате теории деформируемого твердого тела, так и в конструкторских разработках находятся упругие постоянные или модули упругости. Опытные данные показывают, что эти величины являются структурно-чувствительными характеристиками, зависящими не только от химического состава, но и от дефектности и изотропности материала. В частности, зависимость модуля упругости от поврежденности положена в основу одного из методов определения дефектности тел в предположении, что упругий модуль поврежденной среды равен некоему эффективному модулю неповрежденного континуума, а дефектность характеризуется скалярным параметром D [1]. Однако при приложении нагрузки развивается дефектность с преимущественной ориентацией и первоначально изотропное тело приобретает свойства анизотропного с ортотропной симметрией [2].

В данной работе рассматривается определение упругих характеристик пластически деформируемых материалов с учетом образования и развития анизотропной поврежденности. Решение задачи основывается на плоской модели пластического тела Батдорфа — Будянского [3] и экспериментальных данных, полученных при измерении модуля упругости при разгрузке.

1. Рассмотрим случай одноосного нагружения пластического тела с учетом образования и роста микротрещин. Для определенности будем считать, что рост микротрещин обусловлен чисто пластическим механизмом Стро [4] (теоретическое исследование этого процесса проводилось в работах [5, 6]), а тело, как и в [3], состоит из совокупности зерен, которые имеют единственную систему скольжения, определяемую взаимно перпендикулярными направлениями $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\lambda}$. В системе скольжения действует касательное напряжение $\tau_{n\lambda}$.

Если число зерен велико, то среди них найдутся такие, для которых нормаль к плоскости скольжения находится внутри телесного угла $d\Omega$ с осью $\boldsymbol{n}$, а направление скольжения лежит внутри угла $d\lambda$ с биссектрисой λ. Таким образом, количество зерен, имеющих систему скольжения $n\lambda$, пропорционально $d\Omega\, d\lambda$. Отсюда применительно к деформации континуальной среды и модели плоского тела полагаем, что:

— пластическая деформация тела складывается из необратимых сдвигов по плоскостям скольжения $n\lambda$, перпендикулярным к плоскости приложения нагрузки xy;

— необратимые сдвиги происходят только в тех плоскостях, в которых найдется хоть одно направление, вдоль которого $\tau_{n\lambda}$ превосходит критическое постоянное значение и, кроме того, будет больше своих предыдущих значений;

— величина пластического сдвига $\gamma_{n\lambda}$ зависит только от $\tau_{n\lambda}$;

— системы скольжения не взаимодействуют и общая деформация суммируется по всем направлениям;

— при достижении напряженно-деформированным состоянием условия зарождения микротрещин, которое сводится к выполнению условия $\tau_{n\lambda} = \tau_s$, в системе скольжения $n\lambda$ образуется k_0 дефектов размером l_0, представляющих собой периодическую систему щелей с расстоянием a между центрами соседних микротрещин;

— при дальнейшем деформировании оставшаяся неразрушенной часть системы скольжения деформируется сдвигом, величина которого зависит только от эффективного касательного напряжения;

— изменение размеров микротрещин определяется условием их роста, которое примем в виде [7]

$$\frac{l_k - l_k^0}{a} = B(\gamma_k - \gamma_k^0)\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma_0}{\sigma_i}, \tag{1}$$

где l_k — длина микротрещин в k-й системе скольжения; γ_k — сдвиговая пластическая деформация в k-й системе скольжения; γ_k^0 — сдвиговая пластическая деформация, при которой в k-й системе скольжения происходит образование микротрещин размером l_k^0; σ_0 — шаровая часть тензора напряжений; σ_i — интенсивность напряжений; B — постоянная;

— при разгрузке до момента образования микротрещин имеем упругое изотропное тело с упругими постоянными: E, ν, $G = E/(2+2\nu)$ в системе координат $\boldsymbol{\rho q}$, связанной с пропорциональным путем деформирования. В этом случае напряженно-деформированное состояние ортотропной среды с повреждениями можно описать потенциалом квадратичной формы [8], в качестве переменных которого используются компоненты тензора деформаций ε_j и компоненты вектора поврежденности ω_j:

$$\begin{aligned} W = k_1\varepsilon_1^2 + k_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_1^2\omega_1^2 + k_4\varepsilon_1^2\omega_2^2 + k_5\varepsilon_1\varepsilon_6\omega_1\omega_2 + k_6\varepsilon_2^2 + k_7\varepsilon_2^2\omega_1^2 + k_8\varepsilon_2^2\omega_2^2 + \\ + k_9\varepsilon_2\varepsilon_6\omega_1\omega_2 + k_{10}\varepsilon_6^2 + k_{11}\varepsilon_6^2\omega_1^2 + k_{12}\varepsilon_6^2\omega_2^2 + k_{13}\varepsilon_1\varepsilon_2\omega_1^2 + k_{14}\varepsilon_1\varepsilon_2\omega_2^2 + P. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь k_i — коэффициенты разложения; P — полином, квадратичный по ω_j.

При образовании микротрещин в системе скольжения, связанной с направлением нагружения, микротрещины образуются по направлению $\boldsymbol{q}$ и координатами вектора $\boldsymbol{\omega}$ будут $(0, \omega_2)$. Отсюда в системе координат, связанной с k-й плоскостью скольжения, в которой ось 1 направлена по оси скольжения, а ось 2 — по нормали к оси скольжения, используя (2), получим следующие выражения для модулей упругости:

$$\begin{gathered} C_{11} = C_{11}^0 + 2k_4\omega_2^2, \qquad C_{12} = C_{21} = C_{12}^0 + k_{14}\omega_2^2, \qquad C_{22} = C_{22}^0 + 2k_8\omega_2^2, \\ C_{66} = C_{66}^0 + 2k_{12}\omega_2^2, \qquad C_{16} = C_{61} = 0, \qquad C_{26} = C_{62} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где C_{ij}^0 — упругие постоянные неповрежденных систем скольжения:

$$C_{11}^0 = C_{22}^0 = E/(1-\nu^2), \qquad C_{66}^0 = G = E/(2+2\nu), \qquad C_{12}^0 = \nu E/(1-\nu^2). \tag{4}$$

В системе координат, связанной с пропорциональным путем нагружения и единичными базисами $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{q}$, упругие постоянные $\bar{C}_{ij}^k$, согласно правилам преобразования [9], будут определяться следующим образом:

$$\bar{C}_{ij}^k = a_{ijl}^k U_l^k, \qquad l = 1, 2, 3, 4, \tag{5}$$

где

$$U_1^k = (1/8)(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}), \qquad U_2^k = (1/2)(C_{11} - C_{22}),$$
$$U_3^k = (1/8)(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}), \qquad U_4^k = (1/8)(C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}),$$

a_{ijl}^k — ориентационные факторы.

Используя (3), получим

$$U_l^k = U_l^{0k} + A_l^k \omega_2^2, \tag{6}$$

где A_l^k выражаются через коэффициенты k_i разложения потенциала деформации (2):

$$\begin{gathered} A_1 = (1/4)(3k_4 + 3k_8 + 4k_{12} + k_{14}), \qquad A_2 = k_4 - k_8, \\ A_3 = (1/4)(k_4 + k_8 - 4k_{12} - k_{14}), \qquad A_4 = (1/4)(k_4 + k_8 - 4k_{12} + 3k_{14}). \end{gathered} \tag{7}$$

Компоненты тензора напряжений, действующих в теле, находим суммированием по всем плоскостям скольжения, а именно интегрированием по углу λ в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с учетом (5) и (6):

$$\sigma_i = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{C}_{ij}^k \, d\lambda \varepsilon_j = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{ijl}^k U_l^{0k} \, d\lambda \varepsilon_j + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{ijl}^k A_l \omega_2^{k^2} \, d\lambda \varepsilon_j. \tag{8}$$

Первый интеграл в (8) дает матрицу жесткостей линейной изотропной теории упругости, а во втором интеграле подынтегральное выражение отлично от нуля при $\lambda \in [-\varphi, \varphi]$, так как в диапазоне $-\pi + \varphi < \lambda < \pi - \varphi$, где угол φ определяется из условия $\cos\varphi = \tau_s/\tau$ [10], материал является неповрежденным и в этом случае $\omega_2 = 0$. Постоянные A_l выносятся за знак интеграла, $\omega_2^{k^2}$ — положительная симметричная функция по λ относительно значения $\lambda = 0$ при пропорциональном нагружении. В k-й системе скольжения ω_2 есть функция длины микротрещины l, которая, в свою очередь, зависит от величины сдвиговой пластической деформации γ^p в этой системе скольжения и определяется условиями роста микротрещины. Тогда, полагая $\omega_2^{k^2} = l_k/a$, учитывая, что $\gamma = e\cos\lambda/\sqrt{2}$, $\sigma_0/\sigma_i = \mathrm{const}$, и при условии роста трещин (1) получим

$$\sigma_i = [C_{ij}^0]\varepsilon_j + A_l \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k B_1(e - e_0)\varepsilon_j \cos\lambda \, d\lambda + A_l \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k \frac{l_k^0}{a} \varepsilon_j \, d\lambda = [C_{ij}^0]\varepsilon_j + [Z_{ij}]\varepsilon_j,$$

где e — интенсивность деформаций; e_0 — интенсивность деформаций при зарождении трещин; B_1 — константа; $1/\pi$ — нормировочный множитель, а матрица имеет вид

$$[Z_{ij}] = \frac{1}{\pi}\Big([N_{ij}]B_1(e - e_0) + [M_{ij}]\,\frac{l_k^0}{a}\Big). \tag{9}$$

Соответственно, матрицы

$$[N_{ij}] = A_l \int\limits_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k \cos\lambda \, d\lambda, \qquad [M_{ij}] = A_l \int\limits_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k \, d\lambda$$

легко вычисляются с учетом выражений для A_l и a^k_{ijl}:

$$
\begin{gathered}
N_{11}=2A_1\sin\varphi+A_2(\sin\varphi+(1/3)\sin 3\varphi)+A_3((1/3)\sin 3\varphi+(1/5)\sin 5\varphi),\\
M_{11}=2A_1\varphi+A_2\sin 2\varphi+(1/2)A_3\sin 4\varphi,\\
N_{22}=2A_1\sin\varphi-A_2(\sin\varphi+(1/3)\sin 3\varphi)+A_3((1/3)\sin 3\varphi+(1/5)\sin 5\varphi),\\
M_{22}=2A_1\varphi-A_2\sin 2\varphi+(1/3)A_3\sin 4\varphi,\\
N_{12}=2A_4\sin\varphi-A_3((1/3)\sin 3\varphi+(1/5)\sin 5\varphi),\qquad M_{12}=2A_4\varphi-(1/2)A_3\sin 4\varphi,\\
N_{66}=A_1\sin\varphi-A_3((1/3)\sin 3\varphi+(1/5)\sin 5\varphi)-A_4\sin\varphi,\qquad M_{66}=A_1\varphi-(1/2)A_3\sin 4\varphi-A_4\varphi.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Видно, что поврежденная среда является анизотропной и ее жесткости определяются коэффициентами A_l.

2. Проведем оценку коэффициентов k_i, используя (3), для материалов, микроструктурные исследования которых при пластическом деформировании описаны в работах [6, 11]. Будем считать, что в момент зарождения дефектов сдвиг происходит в одной системе скольжения, тело сохраняет изотропию, а модуль упругости поврежденного материала определяется выражением [6]

$$
E=\frac{2E_0(1-c)(7-5\nu_0)}{2(7-5\nu_0)+(1+\nu_0)(13-15\nu_0)c},
$$

где c — концентрация дефектов. Начальные значения параметра поврежденности и концентрации дефектов найдем, вычислив объем условной по́ры и объем, приходящийся на одну пору; тогда

$$
\omega_0=l_0N^{-1/3},\qquad c_0=\pi l_0^3N/6,
$$

где N — количество дефектов в 1 м^3; l_0 — размер зародышевых микронесплошностей, определенный микроструктурными исследованиями. Исходные и расчетные характеристики дефектности, а также оценки k_i приведены в таблице. Как видно из таблицы, полученные значения k_i отрицательные, что обуславливает падение всех упругих модулей при образовании дефектов, причем порядок величины зависит от концентрации и размера дефектов.

Чтобы определить влияние анизотропии, вызванной накоплением повреждений, рассмотрим поведение C_{ij} на примере деформирования образцов стали Ст. 3, которые подвергались одноосному растяжению с записью продольной и поперечной деформации.

Известно, что в пластически деформируемых металлах момент зарождения микронесплошностей характеризуется точкой деструкции D, которая может быть установлена различными методами [12, 13]. На рис. 1–3 представлены деструкционная диаграмма, изменение модуля упругости E_D при разгрузке и зависимость коэффициента ν от пластической деформации. Как следует из рис. 1, моменту зарождения микронесплошностей соответствуют остаточная деформация $\varepsilon_{11}\approx 0{,}07$ и значение модуля $E_{11}\approx 1{,}5\cdot 10^5$ МПа. Тогда для нахождения неизвестных коэффициентов A_l и B_1 составим систему уравнений, используя (9) и экспериментальные данные:

$$
\begin{gathered}
C^l_{11}=C^0_{11}+(1/\pi)B_1(e-e_0)N^l_{11}+(1/\pi)\omega_0M^l_{11},\\
C^1_{66}=C^0_{66}+(1/\pi)B_1(e-e_0)N^1_{66}+(1/\pi)\omega_0M^1_{66}.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Материал	l_0, мкм	c_0	ω_0	k_4, МПа	k_{12}, МПа	k_{14}, МПа
Алюминий	0,14	$1{,}4\cdot 10^{-4}$	0,0650	−199,1	−49,8	−199,1
Медь	0,25	$4{,}1\cdot 10^{-3}$	0,1984	−2060,5	−515,1	−2060,5
Ст. 3	0,10	$5{,}2\cdot 10^{-7}$	0,0100	−9,2	−2,5	−8,4
Титановый сплав ВТ-5	3,00	$5{,}0\cdot 10^{-3}$	0,0295	−23 700	−5900	−24 800

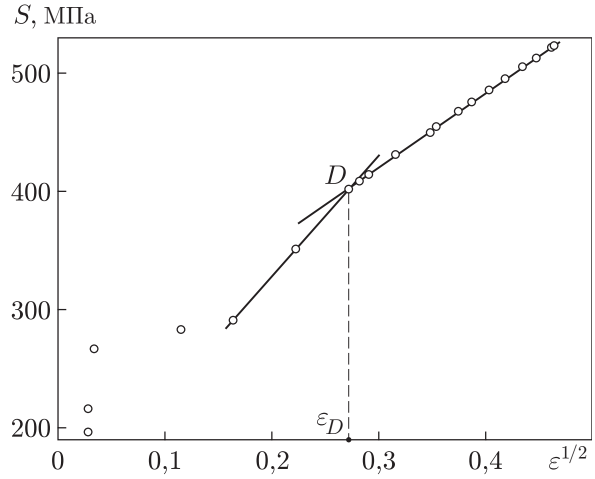

Рис. 1. Деструкционная диаграмма нагружения образца Ст. 3 (S — истинное напряжение, ε — остаточная деформация):
точки — эксперимент; сплошные линии — аппроксимация

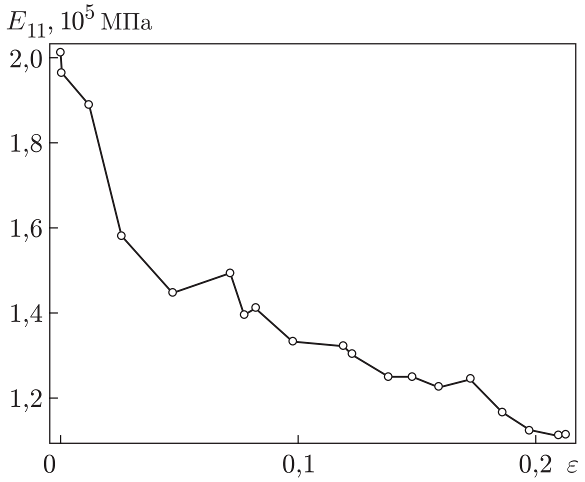

Рис. 2

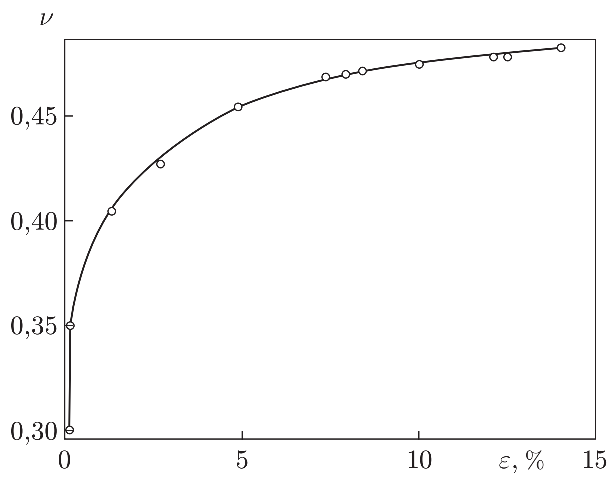

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость модуля упругости от остаточной деформации образца Ст. 3

Рис. 3. Зависимость коэффициента поперечной деформации образца Ст. 3 от остаточной деформации

Чтобы определить C^l_{ij}, вновь воспользуемся формулами (4) в предположении, что интенсивность деформаций определяется соотношением

$$e = (2\sqrt{2}/3)(1 + \nu + \nu^2)^{1/2}\varepsilon_{11}.$$

Решением системы (11) с использованием (10) для исследуемого образца стали Ст. 3 при указанных допущениях получены следующие оценки: $A_1 \approx -16{,}6 \cdot 10^5$ МПа, $A_2 \approx 24{,}5 \times 10^5$ МПа, $A_3 \approx -26{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $A_4 \approx 24{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $B_1 \approx 5$. Отсюда с учетом (7) $k_4 \approx -9{,}2 \cdot 10^5$ МПа, $k_8 \approx -34{,}9 \cdot 10^5$ МПа, $k_{12} \approx 2{,}9 \cdot 10^5$ МПа, $k_{14} \approx 50{,}7 \cdot 10^5$ МПа.

В отличие от случая изотропии теперь матрица жесткостей характеризуется двумя отрицательными коэффициентами k_4 и k_8 и двумя положительными коэффициентами k_{12} и k_{14}, что указывает на противоположное поведение упругих модулей. На рис. 4 представлено распределение значений C_{ij} по системам скольжения, которые определяются углом φ.

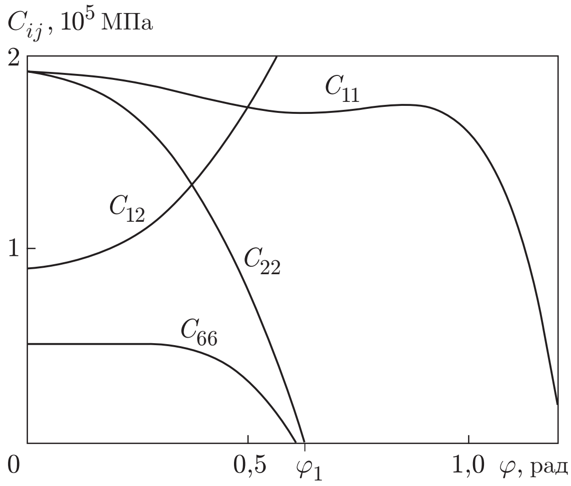

Рис. 4

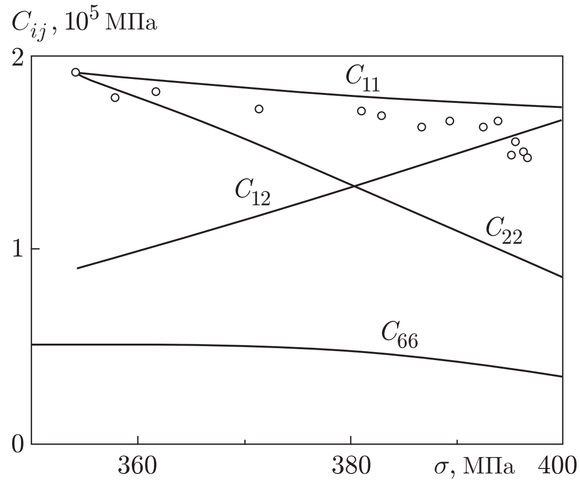

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость компонент матрицы жесткостей от направления скольжения

Рис. 5. Зависимость компонент матрицы жесткостей от приложенного напряжения

В общем, с ростом поврежденности значения C_{11} уменьшаются, а C_{12} растут, при этом C_{22} и C_{66} снижаются до нуля примерно в два раза быстрее, чем C_{11}. Из полученных результатов следует, что при достижении некоторого напряженного состояния, соответствующего углу φ_1, происходит потеря устойчивости пластического деформирования, причем локальный сдвиг вновь происходит в плоскости $\lambda = 0$, а в плоскостях, где $\lambda \neq 0$, пластических сдвигов не будет. В конечном итоге это приводит к ослаблению сопротивления материала в направлении C_{11} и разделению его на части. Деформация, при которой C_{11} обращается в нуль, соответствует разрушению образца.

Действительно, физическими исследованиями установлено, что пластические деформации в материалах, подобных стали Ст. 3, протекают путем сдвига по плоскостям скольжения отдельных зерен феррита в направлении большой диагонали. Различное ориентирование зерен, а также границы и включения затрудняют общий сдвиг одной части образца по другой. Поэтому, чтобы образовались общие плоскости сдвига в образце, сдвиги в отдельных зернах феррита должны обтекать более прочные зерна перлита или раскалывать их слабые участки с повышением напряжений. На рис. 5 представлены зависимости модулей упругости от напряжения, полученные расчетным путем, и экспериментальные данные. Как видно, значения C_{11}, определенные теоретическим и опытным путем, близки. Небольшое различие обусловлено принятыми допущениями при пересчете измеряемых значений E_{11}.

Итак, в работе проведена оценка компонент матрицы жесткости в случае развития анизотропии материала. Показано существенное влияние ориентации трещин на поведение упругих модулей. Представленная модель деформирования и разрушения упругопластических материалов адекватно описывает процесс и может быть основой для мониторинга состояния поврежденности материала и весьма точной оценки его ресурса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lemaitre J.** A course on damage mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
2. **Ержанов Ж. С., Кайдаров К. К., Матвеева В. П.** Математическое обоснование расчетной модели горного массива с упорядоченной системой трещин // Современные проблемы механики горных пород. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1972. С. 45–52.

3. **Батдорф С. Б., Будянский Б.** Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика: Сб. пер. 1961. № 1. С. 134–155.
4. **Stroh A. N.** The formation of cracks as a results of plastic flow // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1954. V. 223, N 1154. P. 404–414.
5. **Клюшников В. Д.** Новые представления в пластичности и деформационная теория // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, № 4. С. 722–731.
6. **Березин А. В.** Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука, 1990.
7. **Березин А. В.** Одноосное деформирование пластического тела с учетом образования и роста микротрещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 5. С. 69–75.
8. **Talreja R.** Fatique of composite materials. Lancaster, Basel: Technomic Publ. Co., 1987.
9. **Роуландс Р.** Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двуосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных // Неупругие свойства композиционных материалов: Сб. науч. тр. М.: Мир, 1978. Вып. 16. С. 140–179.
10. **Березин А. В.** Деформирование дефектных материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 6. С. 124–130.
11. **Черемской П. Г., Слезов В. В., Бетехтин В. И.** Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990.
12. **Рыбакова Л. М.** Механические закономерности деструкции металла при объемном и поверхностном пластическом деформировании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 113–123.
13. **Березин А. В., Козинкина А. И., Рыбакова Л. М.** Акустическая эмиссия и деструкция пластически деформированного металла // Дефектоскопия. 2004. № 3. С. 9–14.

Поступила в редакцию 13/VII 2004 г.,
в окончательном варианте — 2/XI 2004 г.