

УДК 532.52

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧАХ ОБ УДАРЕ ПЛАСТИНЫ О ЖИДКОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

В. П. Рябченко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложен метод интегральных уравнений для решения плоских и пространственных задач об ударе пластины о несжимаемую жидкость конечной глубины. Проведено аналитическое и численное исследование решений полученных уравнений. Изучено поведение ударного импульса в зависимости от глубины жидкости и удлинения пластины.

**Введение.** Плоская задача об ударе пластины о поверхность жидкости конечной и бесконечной глубины исследована достаточно подробно. Обзор полученных результатов содержится в [1]. Рассмотрены задачи о центральном и нецентральном ударе круглого диска о жидкость конечной глубины, о вертикальном ударе эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей софокусный канал, об ударе шаров и некоторых видов эллипсоидов [1]. В пространственной теории удара результаты получены только для частных случаев, когда тело имеет каноническую форму и поэтому возможно применение метода разделения переменных. Учет реальной формы тела требует дальнейшего развития теории удара в трехмерной постановке.

В данной работе предлагается метод интегральных уравнений, позволяющий решать задачу об ударе пластины о жидкость конечной глубины как в плоской, так и в пространственной постановках. Даны приближенные решения интегрального уравнения плоской задачи, использующие разложения искомой функции и ядра уравнения по степеням некоторых параметров, связанных с глубиной жидкости. Получены численные решения этого интегрального уравнения методом механических квадратур, в котором сингулярные интегралы вычисляются по формулам Чебышева, и методом коллокации, в котором искомый потенциал представляется тригонометрическим рядом, учитывающим его поведение в окрестности концов пластины. Проведено сравнение с точным решением М. В. Келдыша [2].

В трехмерной задаче получено соответствующее интегральное уравнение и показано, что для жидкости бесконечной глубины оно с точностью до множителя  $1/2$  совпадает с уравнением, используемым в теории крыла конечного размаха при расчете присоединенных масс.

В случае, когда один из размеров пластины значительно больше другого, найдены точное решение интегрального уравнения, распределение ударного импульса вдоль пластины и суммарный импульс сил давления. Эти результаты совпадают с результатами, полученными в плоской теории и теории крыла конечного размаха.

Для прямоугольной пластины получено более простое интегральное уравнение, аналог которого имеется в теории крыла [3]. Как и в плоском случае, построено его приближенное решение в виде ряда по степеням величины, обратной глубине жидкости. Получено численное решение данного уравнения методом коллокации, в котором искомый потенци-

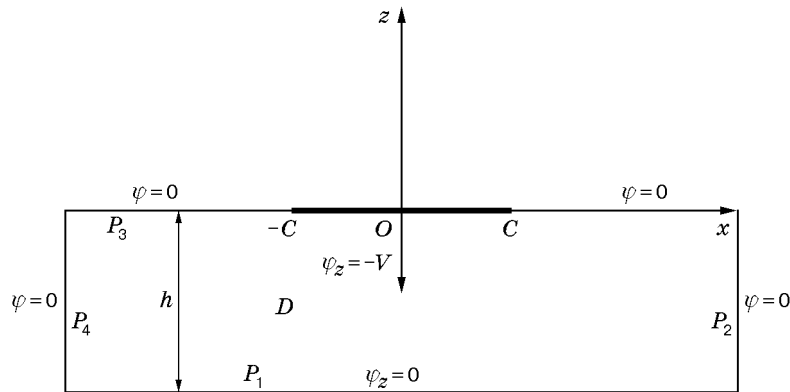


Рис. 1

ал представляется в виде двойного тригонометрического ряда, учитывающего его поведение на кромках пластины. В результате расчетов найдены коэффициенты этого ряда, распределение ударного импульса по пластине и суммарный импульс сил давления, действующих на пластину при различных удлинениях. С увеличением удлинения пластины влияние глубины жидкости становится более существенным.

Проведено сравнение полного ударного импульса, полученного по предлагаемому методу, с результатами расчетов, в которых использованы присоединенные массы прямоугольного крыла в безграничной жидкости при различных удлинениях. Следует отметить медленный выход кривой на асимптоту при больших удлинениях.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются плоская и пространственная задачи о вертикальном ударе абсолютно жесткого тонкого тела по поверхности идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho$ . На свободной поверхности жидкости конечной глубины  $h$  плавает бесконечно тонкое тело  $S$ , ограниченное контуром  $C$ . Считаем, что до удара тело и жидкость покоятся, а в момент удара скорость  $V_0$  тела направлена ортогонально свободной поверхности. Необходимо найти распределение скоростей в области, занятой жидкостью, скорость движения тела  $V$  в момент, следующий за ударом, распределение импульса сил давления по поверхности тела. Деформацией свободной поверхности за время удара пренебрегаем, т. е. считаем, что она совпадает с поверхностью покоящейся жидкости. Течение жидкости около тела предполагается безотрывным.

Введем декартову систему координат  $Oxyz$  с осью  $x$ , направленной вдоль свободной поверхности, и осью  $z$ , перпендикулярной к ней (рис. 1). Поскольку движение возникает из состояния покоя, оно потенциальное. Обозначим через  $\varphi(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ) потенциал скоростей течения жидкости, образующегося в момент, следующий за ударом. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения  $\Delta\varphi = 0$  ( $z < 0$ ).

Граничные условия записываются следующим образом:

- условия непротекания дна  $\varphi_z = 0$  ( $z = -h$ );
- условия непротекания тела  $\varphi_z = -V$  ( $z = 0$ ),  $(x, y) \in S$ ;
- условия на свободной поверхности вне тела  $\varphi = 0$ ,  $(x, y) \notin S$ ;
- условия на бесконечности  $\varphi \rightarrow 0$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Определив потенциал течения жидкости, можно найти распределение давления по поверхности тела и суммарную силу, действующую на тело. Обозначим через  $J$  импульс сил давления вдоль поверхности тела. Тогда из интеграла Коши — Лагранжа для случая удара получим  $J = -\rho\varphi(x, y, 0)$ . Суммарная сила, действующая на тело:

$$P = -\rho \int_S \varphi(x, y) dx dy.$$

**2. Плоская задача о вертикальном ударе пластины о жидкость конечной глубины. Функция Грина.** Введем функцию Грина  $G(x, z; \xi, \zeta)$  для полосы  $D = \{-\infty < x < \infty, -h < z < 0\}$  (рис. 1), удовлетворяющую неоднородному уравнению

$$\Delta G = -\delta(x - \xi)\delta(z - \zeta) \quad (1)$$

( $\delta(x)$  — функция Дирака) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} G = 0, \quad z = \zeta = 0; \quad G_z = 0, \quad z = -h; \quad G_\zeta = 0, \quad \zeta = -h; \\ G \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Вторую формулу Грина для функций  $\varphi$  и  $G$  в области  $D$  с границей  $P = \sum_{i=1}^4 P_i$  запишем в виде

$$\varphi(x, z) = \int_S \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds.$$

С учетом граничных условий для точек  $(x, z) \in D$  имеем

$$\varphi(x, z) = - \int_{-c}^c \varphi(\xi, 0) \frac{\partial G}{\partial \zeta}(x, z; \xi, 0) d\xi.$$

Таким образом, если известна функция Грина  $G$ , то значения потенциала в области  $D$  определяются через его граничные значения только на пластине  $|x| \leq c$ .

Для нахождения функции  $G$  представим  $\delta(z - \zeta)$  в виде ряда [4]

$$\delta(z - \zeta) = \frac{2}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{h}\left(m + \frac{1}{2}\right)z\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}\left(m + \frac{1}{2}\right)\zeta\right).$$

Функцию Грина будем искать в виде

$$G = \frac{2}{h} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x, \xi) \sin(\mu_m \zeta) \sin(\mu_m z),$$

где  $\mu_m = (\pi/h)(m + 1/2)$ . Эта функция удовлетворяет всем краевым условиям по  $z$  и  $\zeta$ . Подставим  $G$  в уравнение (1). Тогда для функций  $g_m$  получим уравнение

$$g_m'' - \mu_m^2 g = -\delta(x - \xi). \quad (2)$$

Представим  $\delta$ -функцию интегралом

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(x - \xi)) dk$$

и подставим ее в уравнение (2). Функции  $g_m$  будем искать в виде

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(x - \xi)) A_m(k) dk.$$

В результате подстановки  $g_m$  в уравнение (2) находим

$$A_m = \frac{1}{k^2 + \mu_m^2}, \quad g_m = \frac{1}{2\mu_m} \exp(-\mu_m|x - \xi|).$$

Здесь использована формула [5]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} \exp(-ab) \quad (a > 0, \operatorname{Re} b > 0).$$

Таким образом,

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} \exp(-\mu_m |x - \xi|) \sin(\mu_m z) \sin(\mu_m \zeta).$$

*Интегральное уравнение.* Потенциал на пластине определяется как решение интегрального уравнения, которое получается из условия равенства нормальных скоростей движения жидкости и пластины:

$$V = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-c}^c \varphi(\xi, 0) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(x, z; \xi, 0) d\xi = \int_{-c}^c \varphi(\xi, 0) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(x, 0; \xi, 0) d\xi, \quad (3)$$

$$|x| \leq c.$$

В (3) ядро определяется рядом

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(x, 0; \xi, 0) = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \exp(-\mu_m |x - \xi|).$$

Введем функцию

$$G_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\mu_m |x - \xi|) = \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\pi |x - \xi| / (2h))}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(x, 0; \xi, 0) = \frac{1}{h} \operatorname{sign}(x - \xi) \frac{\partial G_1}{\partial \xi}.$$

В правой части уравнения (3) выполним интегрирование по частям с учетом  $\varphi(\pm c, 0) = 0$ :

$$V = \frac{1}{2h} \int_{-c}^c \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi(\xi - x)/(2h))} d\xi. \quad (4)$$

Таким образом, получено сингулярное интегральное уравнение относительно скорости вдоль пластины, решение которого следует искать в классе функций, не ограниченных на обоих концах пластины. Заметим, что к этому виду приводится интегральное уравнение, полученное в [6] другим методом.

*Решение сингулярного интегрального уравнения в виде ряда.* Будем искать решение уравнения (4) в виде разложения в ряд по степеням параметра  $\tau = c/h$  [7]. Приведем уравнение (4) к безразмерному виду с помощью замены переменных

$$x \rightarrow cx, \quad \xi \rightarrow c\xi, \quad \varphi \rightarrow cV\varphi, \quad \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} \rightarrow \gamma(\xi).$$

В результате уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\tau}{2} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi\tau(\xi - x)/2)} d\xi = 1. \quad (5)$$

Для решения уравнения (5) используется разложение

$$\frac{1}{\operatorname{sh} X} = \frac{1}{X} - \frac{X}{6} + \frac{7X^3}{360} + \dots \quad (X^2 < \pi^2). \quad (6)$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$\gamma = \gamma_0 + \tau^2 \gamma_1 + \tau^4 \gamma_2 + \dots \quad (7)$$

Подставляя разложения (6) и (7) в интегральное уравнение (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$  в обеих частях уравнения, для функций  $\gamma_0, \gamma_1, \dots$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} &= 1, & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} &= \frac{\pi}{24} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi)(\xi - x) d\xi, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_2(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} &= -\frac{7\pi^3}{5760} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi)(x - \xi)^3 d\xi + \frac{\pi}{24} \int_{-1}^1 \gamma_1(\xi)(\xi - x) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогичным образом выписываются уравнения для последующих членов разложения (7). Первое из полученных уравнений служит для определения функции  $\gamma_0(\xi)$ , соответствующей удару по пластине, находящейся на свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости, остальные позволяют найти  $\gamma_n(\xi)$ , если известны функции  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ .

Задача определения каждой неизвестной функции сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} = f(x),$$

где  $\gamma(\xi)$  — неизвестная функция, а правая часть  $f(x)$  задана. Решение данного уравнения в классе функций, не ограниченных на обоих концах пластины, имеет вид

$$\gamma(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 f(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \frac{d\xi}{\xi-x}.$$

Применяя эту формулу обращения, найдем

$$\gamma_0(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \gamma_1(x) = \frac{\pi^2}{48} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \gamma_2(x) = -\frac{\pi^4 x}{2304} \frac{4,2x^2 - 2,05}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Полный ударный импульс на единицу длины пластины, отнесенный к  $\rho V c^2$  и равный

$$P = -\int_{-1}^1 \varphi(x, 0) dx, \quad (8)$$

можно представить в виде ряда по параметру  $\tau$   $P = P_0 + \tau^2 P_1 + \tau^4 P_2 + \dots$ . После вычислений получим

$$P_0 = \pi/2, \quad P_1 = \pi^3/96, \quad P_2 = -0,55\pi^5/2304,$$

а для распределения ударного импульса вдоль пластины

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad p_1(x) = (\pi^2/48) \sqrt{1-x^2}, \quad p_2 = (\pi^4/2304) \sqrt{1-x^2} (0,75 + 1,4x^2).$$

При таком подходе строится решение вблизи  $\tau = 0$ . При  $\tau \rightarrow 0$  получены результаты для безграничной жидкости, а переход к случаю малых глубин ( $\tau \rightarrow \infty$ ) оказывается некорректным. Случай движения крыла на малых расстояниях от твердой поверхности (экрана) подробно рассмотрен в [8]. В [8] предлагается ввести параметр  $\tau_1$ , который всегда меньше единицы при  $0 < \tau < \infty$ . Введем параметр  $\tau_1 = \sqrt{1/\tau^2 + 1} - 1/\tau$  такой, что  $\tau_1 \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $\tau_1 \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

Для ядра интегрального уравнения (5) будем использовать разложение

$$\frac{1}{2h \operatorname{sh} [\pi(\xi - x)/(2h)]} = \frac{1}{\pi(\xi - x)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\xi - x)^2 + 4n^2 h^2},$$

в котором каждый член можно разложить в ряд по  $\tau_1$

$$\frac{1}{(\xi - x)^2 + 4n^2 h^2} = \frac{\tau_1^2}{n^2} \left[ 1 - \tau_1^2(\tau_1^2 - 2) - \frac{\tau_1^2}{n^2}(x - \xi)^2 + \dots \right].$$

Подставив разложения потенциала и ядра в интегральное уравнение (5) и приравняв члены при одинаковых степенях  $\tau_1$ , получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} &= 1, & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} &= \frac{\pi}{6} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi)(\xi - x) d\xi, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_2(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} &= \frac{\pi}{6} \int_{-1}^1 \gamma_1(\xi)(\xi - x) d\xi + \frac{\pi}{3} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi) \left[ \xi - x - \frac{7\pi^2}{120} (\xi - x)^3 \right] d\xi. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

Следовательно, решениями этих уравнений будут

$$\begin{aligned} \gamma_0(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \gamma_1(x) &= \frac{\pi^2 x}{12\sqrt{1-x^2}}, \\ \gamma_2(x) &= \frac{\pi^2}{6} \left( 1 + \frac{41\pi^2}{480} \right) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{7\pi^4 x^3}{240\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Для полного ударного импульса получим выражения

$$P_0 = \frac{\pi}{2}, \quad P_1 = \frac{\pi^3}{24}, \quad P_2 = \frac{\pi^3}{12} \left( 1 + \frac{41\pi^2}{480} \right) - \frac{7\pi^5}{640},$$

а для распределения ударного импульса по пластине —

$$p_0 = \sqrt{1-x^2}, \quad p_1(x) = \frac{\pi^2}{12} \sqrt{1-x^2}, \quad p_2(x) = \frac{\pi^2}{6} \sqrt{1-x^2} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{32} \left( 1 + \frac{28}{15} x^2 \right) \right].$$

*Численное решение сингулярного интегрального уравнения. Метод механических квадратур.* Для решения уравнения (5) можно применить метод, в котором используются квадратурные формулы для сингулярных интегралов и затем решается конечная система алгебраических уравнений [9]. Интеграл будем вычислять с помощью квадратурной формулы Чебышева

$$\int_{-1}^1 \frac{u(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n u(\xi_k), \quad (9)$$

которая позволяет учесть, что искомое решение уравнения (5) имеет особенность при  $\xi = \pm 1$  порядка квадратного корня из расстояния до этих точек. Здесь узлы  $\xi_k$ , являющиеся корнями полиномов Чебышева первого рода  $T_n(\xi)$ , вычисляются по формуле

$$\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнению (5) будем удовлетворять в точках  $x_i = \cos(\pi i/n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) — корнях полиномов Чебышева второго рода. Решение уравнения (5), имеющее указанную выше особенность, должно определяться при дополнительном условии

$$\int_{-1}^1 \gamma(\xi) d\xi = 0. \quad (10)$$

Интеграл в (10) вычисляется по квадратурной формуле (9). В результате получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \gamma(\xi_k) K(\xi_k, x_i) = 1, \quad \sum_{k=1}^n \gamma(\xi_k) = 0, \quad K(\xi_k, x_i) = \frac{\tau}{2 \operatorname{sh}[\pi\tau(\xi_k - x_i)/2]} \quad (11)$$

для определения  $n$  неизвестных  $\gamma(\xi_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Система (11) является дискретным аналогом интегрального уравнения (5) и условия (10) и может быть численно решена с помощью стандартных программ. Для определения значения функции  $\gamma$  в произвольной точке  $\xi$  используется интерполяционный полином Лагранжа по узлам  $\xi_k$ . Полный ударный импульс, определенный по формуле (8) после интегрирования по частям, также вычисляется с использованием (9). Как отмечено в [9], сходимость процесса следует из сходимости квадратурной формулы (9) и единственности решения интегрального уравнения (5) при условии (10).

*Метод коллокации.* В уравнении (5) сделаем замену переменных  $\xi = \cos \theta$ ,  $x = \cos \psi$ . Потенциал в точках пластины будем искать в виде ряда

$$\varphi(\theta, 0) = \sum_{m=1}^N \frac{a_m}{m} \sin(m\theta). \quad (12)$$

Полученные после подстановки (12) в уравнение (5) интегралы

$$I_{im} = \int_0^\pi \frac{\cos(m\theta)}{\operatorname{sh}[\pi\tau(\cos \theta - \cos \psi_i)/2]} d\theta$$

вычисляем по квадратурной формуле Чебышева (9):

$$I_{im} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(m\theta_k)}{\operatorname{sh}[\pi\tau(\cos \theta_k - \cos \psi_i)/2]},$$

где  $\theta_k = (2k-1)\pi/(2n)$ ;  $\psi_i = \pi i/n$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Для того чтобы число уравнений в алгебраической системе совпало с числом неизвестных коэффициентов ряда (12), число членов ряда  $N$  должно быть равно  $n-1$ .

Полный ударный импульс  $P = (\pi/2)a_1$  определяется коэффициентом при особенности на кромках пластины.

*Результаты расчетов.* Результаты расчетов полного ударного импульса  $P_h$  и  $P_\tau$  с помощью разложений по параметрам  $\tau$  и  $\tau_1$  соответственно, результаты численного решения





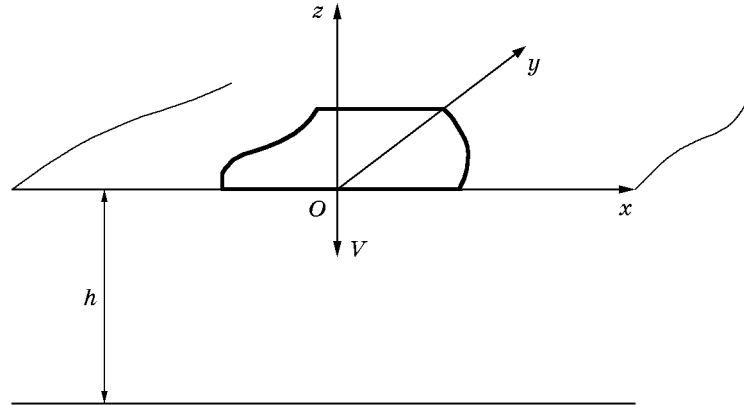


Рис. 2

Функция  $\varphi$  определяется через ее граничные значения только на поверхности тонкого тела  $S$ , если известна функция Грина  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Функцию Грина будем искать в виде

$$G = \frac{2}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(\mu_m z) \sin(\mu_m \zeta) g_m(x, y; \xi, \eta).$$

Подставляя  $G$  в уравнение (13), для функций  $g_m$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 g_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_m}{\partial y^2} - \mu_m^2 g_m = -\delta(x - \xi)\delta(y - \eta). \quad (14)$$

Представим  $\delta$ -функцию и фундаментальное решение уравнения (14) в виде

$$\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_1(x - \xi) + ik_2(y - \eta)) dk_1 dk_2,$$

$$g_m(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(k_1, k_2) \exp(ik_1(x - \xi) + ik_2(y - \eta)) dk_1 dk_2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (14), получим

$$A_m = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + \mu_m^2}, \quad g_m = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_1(x - \xi) + ik_2(y - \eta))}{k_1^2 + k_2^2 + \mu_m^2} dk_1 dk_2. \quad (15)$$

В (15) перейдем к полярным координатам  $(k, \theta)$ :  $k_1 = k \cos \theta$ ,  $k_2 = k \sin \theta$ . С учетом равенства

$$\int_0^{2\pi} \exp(ik\rho \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(k\rho),$$

где  $J_0(k\rho)$  — функция Бесселя нулевого порядка, находим

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k J_0(k\rho)}{k^2 + \mu_m^2} dk.$$

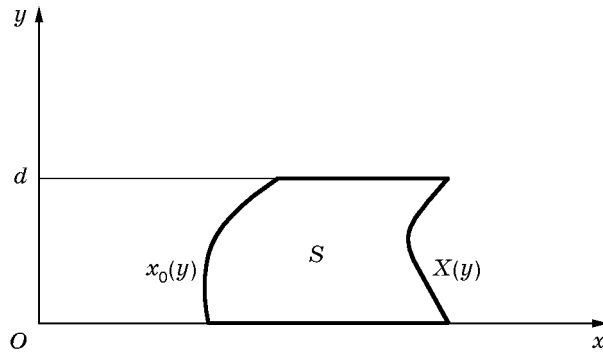


Рис. 3

Выражение для данного интеграла приведено в [4]. Таким образом,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi h} \sum_{m=0}^{\infty} K_0(\mu_m \rho) \sin(\mu_m z) \sin(\mu_m \zeta).$$

Здесь  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя;  $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ . Функцию Грина можно представить в виде  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_0 - G_2$ , где

$$G_0 = \frac{1}{2\pi h} \sum_{m=1}^{\infty} K_0(\nu_m \rho) [\cos(\nu_m(z - \zeta)) - \cos(\nu_m(z + \zeta))],$$

$$G_2 = \frac{1}{2\pi h} \sum_{m=1}^{\infty} K_0(2\nu_m \rho) [\cos(2\nu_m(z - \zeta)) - \cos(2\nu_m(z + \zeta))], \quad \nu_m = \frac{\pi m}{2h}.$$

Ряды, входящие в выражения для  $G_0$  и  $G_2$ , можно просуммировать [5]. Окончательно получим

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right),$$

где  $r_n^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nh + (-1)^n \zeta)]^2$ ;  $r'_n{}^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nh - (-1)^n \zeta)]^2$ .

*Интегральное уравнение.* Условие непротекания поверхности  $S$  позволяет получить интегральное уравнение для определения потенциала в точках этой поверхности

$$\begin{aligned} V &= - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 0} \int_S \varphi(\xi, \eta, 0) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\xi d\eta = \\ &= \int_S \varphi(\xi, \eta, 0) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(x, y, 0; \xi, \eta, 0) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Ядро интегрального уравнения (16) определяется рядом

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}(x, y, 0; \xi, \eta, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{R_n^3} - \frac{12n^2 h^2}{R_n^5} \right),$$

где  $R_n^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + 4n^2 h^2$ .

Предположим, что поверхность имеет форму, показанную на рис. 3. Верхняя и нижняя границы поверхности — отрезки прямых  $y = 0$  и  $y = d$ . Уравнения левой  $x = x_0(y)$  и правой  $x = X(y)$  границ области  $S$  — произвольные непрерывные функции.

В интеграле, стоящем в правой части уравнения (16), проведем интегрирование по частям по переменной  $\xi$ , учитывая, что  $\varphi(x_0(\eta), \eta, 0) = \varphi(X(\eta), \eta, 0) = 0$ . Получим

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^d \int_{x_0(\eta)}^{X(\eta)} \gamma(\xi, \eta) \left\{ \frac{x - \xi}{(y - \eta)^2 [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{x - \xi}{Y_n R_n} - \frac{12n^2 h^2}{Y_n^2} \left( \frac{x - \xi}{R_n} - \frac{(x - \xi)^3}{3R_n^3} \right) \right] \right\} d\xi d\eta, \quad (17)$$

где  $Y_n = (y - \eta)^2 + 4n^2 h^2$ .

Первый член ядра уравнения (17) можно записать в виде

$$\frac{x - \xi}{(y - \eta)^2 [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{(y - \eta)(x - \xi)}.$$

Тогда

$$V = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^d \int_{x_0(\eta)}^{X(\eta)} \gamma(\xi, \eta) \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^d \int_{x_0(\eta)}^{X(\eta)} \gamma(\xi, \eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{x - \xi}{R_n Y_n} - \frac{12n^2 h^2}{Y_n^2} \left( \frac{x - \xi}{R_n} - \frac{(x - \xi)^3}{3R_n^3} \right) \right] d\xi d\eta. \quad (18)$$

Если в правых частях уравнений (17) и (18) отбросить ряды по  $n$ , то с точностью до множителя  $1/2$  получим интегральное уравнение задачи бесциркуляционного обтекания равномерным потоком со скоростью  $V$  тонкого крыла конечного размаха с поверхностью  $S$ .

Таким образом, получено двумерное сингулярное интегральное уравнение относительно скорости вдоль пластины по оси  $x$ , решение которого следует искать в классе функций, не ограниченных на кромках  $x = x_0(y)$ ,  $x = X(y)$  и обращающихся в нуль на отрезках  $[y = 0, x_0(0) < x < X(0)]$ ,  $[y = d, x_0(d) < x < X(d)]$ .

*Жидкость бесконечной глубины.* В случае жидкости бесконечной глубины интегральное уравнение (18) упрощается:

$$V = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^d \int_{x_0(\eta)}^{X(\eta)} \gamma(\xi, \eta) \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta. \quad (19)$$

Предположим, что один из размеров пластины значительно больше другого (например, вдоль оси  $x$ ). Используя классическую аппроксимацию теории крыла конечного размаха, можно записать  $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = |x - \xi|$ . Тогда уравнение (19) примет вид

$$V = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^d \int_{x_0(\eta)}^{X(\eta)} \gamma(\xi, \eta) \frac{\text{sign}(x - \xi)}{\eta - y} d\xi d\eta.$$

После вычислений с учетом того, что потенциал  $\varphi$  обращается в нуль на кромках пластины  $S$ , получим

$$V = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^d \frac{\varphi(x, \eta, 0)}{y - \eta} d\eta. \quad (20)$$

Интегрируя уравнение (20) по частям, внося производную по  $y$  под знак интеграла и переходя к безразмерным переменным  $\eta \rightarrow (2\eta - d)/d$ ,  $y \rightarrow (2y - d)/d$ , окончательно находим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(x, \eta, 0) \frac{1}{\eta - y} d\eta = V. \quad (21)$$

Решение интегрального уравнения (21), не ограниченное на обоих концах пластины, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{V}{\pi \sqrt{1 - y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{y - \eta} d\eta.$$

Вычислив интеграл, находим  $\varphi(x, y) = -V \sqrt{1 - y^2}$ .

Суммарный импульс сил давления, действующих на пластину в сечении  $x = \text{const}$  (на единицу ее длины по  $x$ ), определенный по формуле (8), равен  $P = \pi/2$  и совпадает со значением, полученным согласно плоской теории, которая может быть применена к рассматриваемому случаю.

*Прямоугольная пластина.* Пусть поверхность  $S$  представляет собой прямоугольник  $[-c \leq x \leq c, -l \leq y \leq l]$ . Отметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial \eta}, & \frac{x - \xi}{R_n Y_n} &= -\frac{1}{2nh} \frac{\partial}{\partial \eta} \arctg \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{2nhR_n}, \\ \frac{x - \xi}{R_n Y_n^2} &= -\frac{1}{8n^2 h^2 (x - \xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{R_n (y - \eta)}{Y_n} - \frac{(x - \xi)^2 - 4n^2 h^2}{16n^3 h^3 (x - \xi)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \arctg \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{2nhR_n}, \\ \frac{4n^2 h^2 (x - \xi)^3}{R_n^3 Y_n^2} &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{2R_n Y_n} - \frac{[(x - \xi)^2 - 12n^2 h^2](y - \eta)}{2(x - \xi)R_n [(x - \xi)^2 + 4n^2 h^2]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{R_n [(x - \xi)^2 + 4n^2 h^2]} + \frac{(x - \xi)^2 - 12n^2 h^2}{4nh(x - \xi)^2} \arctg \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{2nhR_n} \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (18), интегрируя по частям по переменной  $\eta$  и учитывая, что  $\gamma(\xi, \pm l) = 0$ , получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \int_{-l}^l \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}(\xi, \eta) \left\{ \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{(x - \xi)(y - \eta)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \xi)(y - \eta)(R_n^2 + 4n^2 h^2)}{[(x - \xi)^2 + 4n^2 h^2][(y - \eta)^2 + 4n^2 h^2]R_n} \right\} d\xi d\eta. \quad (22) \end{aligned}$$

Решение уравнения (19) в виде ряда по параметру  $\tau$  имеет вид  $\gamma = \gamma_0 + \tau^3 \gamma_1 + \tau^6 \gamma_2 + \dots$ , так как первый член разложения по  $\tau$  части ядра, учитывающей влияние дна, равен  $0,45077(x - \xi)(y - \eta)\tau^3$ . Здесь учтено, что [5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} = -0,90154.$$

Этот результат отличается от плоского случая, когда разложение решения проводится по степеням величины  $\tau^2$ .

Численное решение уравнения (22) методом коллокации. Сделаем замену переменных  $x = c \cos \theta_1$ ,  $y = l \cos \psi_1$ ,  $\xi = c \cos \theta$ ,  $\eta = l \cos \psi$ . Потенциал в точках пластины будем искать в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{a_{km}}{km} \sin(k\theta) \sin(m\psi), \quad (\xi, \eta) \in S. \quad (23)$$

В безразмерных переменных  $\varphi \rightarrow cV\varphi$ ,  $x \rightarrow cx$ ,  $\xi \rightarrow c\xi$ ,  $y \rightarrow ly$ ,  $\eta \rightarrow l\eta$  вместо интегрального уравнения (22) получим

$$2\pi\lambda = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \left\{ \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \lambda^2(y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} + \right. \\ \left. + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\xi)(y-\eta)(R_n^2 + 4n^2\tau^{-2})}{[(x-\xi)^2 + 4n^2\tau^{-2}][\lambda^2(y-\eta)^2 + 4n^2\tau^{-2}]R_n} \right\} d\xi d\eta, \quad (24)$$

где  $\lambda = l/c$  — удлинение пластины.

Подставив ряд (23) в уравнение (24) и проведя численное интегрирование по квадратурной формуле Чебышева, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M a_{km} I_{ij}^{km} = 2\pi\lambda,$$

где

$$I_{ij}^{km} = -\frac{\pi^2}{NM} \sum_{p=1}^{N+1} \sum_{q=1}^{M+1} \cos(k\theta_p) \cos(m\psi_q) K(\omega_i, \chi_j; \theta_p, \psi_q);$$

$K(x, y; \xi, \eta)$  — ядро уравнения (24);  $\omega_i = \pi i / (N + 1)$ ,  $\chi_j = \pi j / (M + 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ) — точки коллокации;  $\theta_p = (2p-1)\pi / (2(N+1))$ ,  $\psi_q = (2q-1)\pi / (2(M+1))$  — узлы квадратурной формулы Чебышева, примененной к повторному интегралу, заменяющему двойной интеграл в уравнении (24).

Полный ударный импульс, отнесенный к  $\rho V c^2 l$ , определялся формулой

$$P = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = -\frac{\pi^2}{4} a_{11}.$$

Численные результаты. На рис. 4 представлены зависимости полного импульса  $P$  от удлинения пластины  $\lambda$  при различных относительных глубинах жидкости  $\bar{h}$ . Расчеты про-

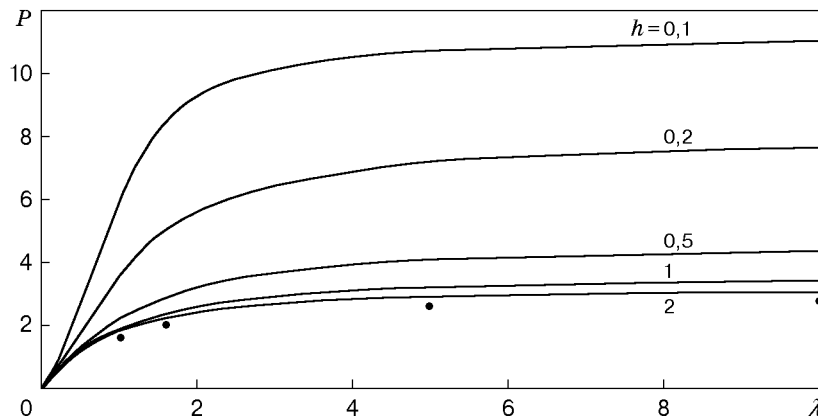


Рис. 4

ведены с использованием метода коллокации при решении интегрального уравнения (24). На рис. 4 точками показаны значения импульса  $P$ , полученные с помощью коэффициентов присоединенных масс прямоугольных крыльев в безграничной жидкости [11]. Видно, что эти значения близки к кривой, описывающей ударный импульс при  $\bar{h} = 2$ . С увеличением удлинения влияние глубины жидкости становится более существенным. При фиксированном  $\bar{h}$  уменьшение удлинения (за счет уменьшения поперечного размера пластины) приводит к ослаблению влияния границы (дна водоема) на ударный импульс, действующий на пластину. Следует также отметить медленный выход кривых при различных  $\bar{h}$  на асимптоту при больших удлинениях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976.
2. Келдыш М. В. Удар пластинки о воду, имеющую конечную глубину // Тр. ЦАГИ. 1935. Вып. 152. С. 13–20.
3. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1968.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
6. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
7. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости // Келдыш М. В. Механика: Избр. тр. М.: Наука, 1985. С. 120–151.
8. Панченков А. Н. Теория потенциала ускорений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975.
9. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981.
10. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Плоская задача об ударе по жидкой полосе // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 99–121.
11. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975.

*Поступила в редакцию 17/XI 2000 г.*