

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩАЯ СВОБОДНАЯ СТРУЯ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

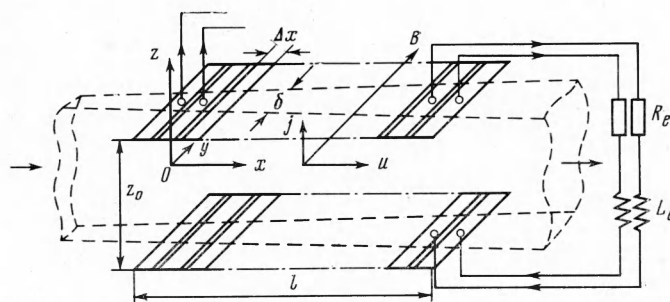
А. И. Бертинов, Д. А. Бут

(Москва)

В магнитогидродинамических течениях вязкое трение на стенках может быть существенным. Можно значительно понизить роль вязкого трения, используя свободные или полуограниченные струи проводящей жидкости.

Рассматриваются нестационарные явления при одномерном движении плоской свободной струи несжимаемой жидкости в поперечном магнитном поле. Узкими сторонами струя касается секционированных электродов, замыкающихся через внешние цепи с активно-индуктивной нагрузкой. Магнитное число Рейнольдса и параметр магнитогидродинамического взаимодействия предполагаются существенными. Для случая, когда электрическое поле от электромагнитной индукции в канале много меньше поля от внешних цепей, задача приводится к характеристической задаче Коши для квазилинейной гиперболической системы уравнений первого порядка, которая решается методом характеристик на ЭВМ.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим свободную плоскую струю невязкой несжимаемой электропроводящей жидкости, движущуюся в поперечном магнитном поле  $\mathbf{B}(0, B_y, 0)$  со скоростью  $\mathbf{u}(u_x, 0, 0)$  и касающуюся узкими сторонами электродов в плоскостях  $z = \pm 1/2 z_0$ ; на фиг. 1 свободная струя представлена штрихами между электродами. Электроды



Фиг. 1

секционированы вдоль оси  $x$ , и каждая пара электродов подключена к независимой внешней цепи, расположенной вниз по потоку и состоящей из омического сопротивления  $R_e$  и индуктивности  $L_e$ . В области  $y > 1/2 y_0$ ,  $y < -1/2 y_0$  расположен идеальный магнитопровод ( $\mu = \infty$ ), замыкающийся между плоскостями  $x = 0$  и  $x = l$ . Струя движется в узком зазоре  $y_0$  между ферромагнитными стенками, не касаясь их. Если внешние цепи замкнуты, в струе появится электрический ток с плотностью  $\mathbf{j}(0, 0, j)$  и возникнет магнитогидродинамическое взаимодействие.

Предполагается, что на входе в канал в струе имеются продольные непроводящие перегородки, а на выходе из канала, например, начинается распад струи, так что концевыми эффектами можно пренебречь. Распределение внешних сопротивлений и индуктивностей, а также внешнее магнитное поле  $B_e$  считаются независимыми гладкими при  $x > 0$ ,  $t > 0$ .

функциями:  $R_e = R_e(x, t)$ ,  $L_e = L_e(x)$ ,  $B_e = B_e(t)$ ,  $R_e(0, t) \rightarrow \infty$  (электроды на входе разомкнуты).

Функции  $R_e$  и  $L_e$  таковы, что определяемое внешними цепями электрическое поле много больше поля от изменения внутреннего потокосцепления в канале для контура каждой электродной пары. Гравитационные и объемные динамические силы действуют только вдоль оси  $x$  и характеризуются ускорением  $q_x(t)$ . Смысл этих ограничений будет ясен из дальнейшего. Функции  $R_e(x, t)$ ,  $L_e(x)$ ,  $B_e(t)$  заданы и являются управляющими параметрами для системы. При необходимости в их число может быть включена проводимость жидкости  $\sigma$  как функция  $x$  и  $t$ , однако в данном случае  $\sigma = \text{const}$ . Магнитное число Рейнольдса  $R_m$  и параметр магнито-гидродинамического взаимодействия для струи считаются существенными.

Пусть при  $t < 0$  течение было установившимся, а в момент  $t = 0$  начинается изменение управляющих параметров. Рассмотрим переходные процессы в системе.

**2. Исходная система уравнений и ее преобразование.** Одним из трудных этапов при решении одномерных нестационарных задач подобного рода является получение информации об электрическом поле в канале. При  $R_m \gtrsim 1$  это поле определяется не только омическим падением напряжения, но и электромагнитной индукцией для внешних цепей и токов в канале. Учет этих эффектов с помощью уравнений Максвелла затруднителен, так как в одномерном приближении электрическое поле не обязательно удовлетворяет этим уравнениям [1,2], и, кроме того, параметры внешних цепей не входят в них явно. Роль внешних индуктивностей и сопротивлений по предположению достаточно велика, поэтому удобнее воспользоваться законом Кирхгофа для цепи поперечного элемента струи толщиной  $\Delta x$ . Имеем

$$u_x B_y z_0 = I_z \left( \frac{z_0}{\sigma \Delta x \delta} + R_e \right) + L_e \frac{\partial I_z}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \quad (2.1)$$

Здесь  $I_z$  — ток элемента струи,  $\delta$  — толщина струи по оси  $y$  ( $\delta < y_0$ ), а  $\Psi_i$  — полное внутреннее потокосцепление элемента в канале. Величины  $R_e$ ,  $L_e$  и отношение

$$L^* = \frac{L_e}{R_e + z_0 / \sigma \Delta x \delta} \quad (2.2)$$

характеризующее временной масштаб переходного процесса, ограничены снизу так, что роль  $\partial \Psi_i / \partial t$  в уравнении (2.1) незначительна<sup>1</sup>. Вихревые электрические поля на концах канала не учитываются, поскольку концевые эффекты считаются подавленными.

Учитывая, что  $I_z = j_z \delta \Delta x$  и  $u_x \delta = \text{const}$ , можно переписать (2.1) в виде

$$u_x B_y z_0 = j_z \left( \frac{z_0}{\sigma} + R_e \Delta x \delta \right) + L_e \Delta x \delta \left( \frac{\partial j_z}{\partial t} - \frac{j_z}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

Двумя другими исходными соотношениями будут уравнение движения и первое уравнение Максвелла

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = - \frac{j_z B_y}{\rho} + q_x, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 j_z \quad (2.4)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости, а  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума.

<sup>1</sup> В одномерном приближении для рассматриваемой модели ограничение связано с неравенством для безразмерных параметров (см. ниже)

$$\frac{\delta_0}{y_0} \left\{ (1-x) \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{j(\zeta)}{u(\zeta)} \right] d\zeta + \int_x^1 (1-\zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{j(\zeta)}{u(\zeta)} \right] d\zeta \right\} \left\{ L \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{j(x)}{u(x)} \right] \right\}^{-1} \ll 1,$$

которое выполняется при достаточно больших  $R_e$ ,  $L_e$  и  $L^*$ .

Будем в дальнейшем относить  $x$  к  $l$ ,  $t$  к  $l/u_0$  и введем безразмерные величины и параметры

$$u = \frac{u_x}{u_0}, \quad B = \frac{B_y}{B_0}, \quad j = \frac{j_z}{\sigma u_0 B_0}, \quad P = \frac{R_e \Delta x \delta_0 \sigma}{z_0}$$

$$L = \frac{L_e \Delta x \delta_0}{\mu_0 z_0 l^2}, \quad q = \frac{q_x l}{u_0^2}, \quad R_m = \mu_0 \sigma u_0 l, \quad S = \frac{\sigma B_0^2 l}{\rho u_0}$$

Здесь  $R_m$  — магнитное число Рейнольдса,  $S$  — параметр магнитогидродинамического взаимодействия. Тогда исходная система примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -SjB + q, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = R_m j \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + j \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{LR_m} [u^2 B - j(u + R)] - \frac{Sj^2 B}{u} + \frac{qi}{u} \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) следует из (2.3) и (2.4) после перехода к безразмерным величинам.

Запишем систему (2.5), (2.6) в матричной форме

$$A \xi_t + C \xi_x = D \quad (2.7)$$

Здесь  $\xi$  — неизвестная вектор-функция с компонентами  $u, j, B$ ;  $A$  — матрица, образованная из коэффициентов перед производными по  $t$ ;  $C$  — матрица из коэффициентов перед производными по  $x$ ;  $D$  — вектор-столбец с компонентами, образованными правыми частями уравнений (2.5), (2.6). Нижние индексы обозначают дифференцирование по  $t$  и  $x$ .

Легко видеть, что обе матрицы  $A$  и  $C$  особые, что затрудняет анализ и преобразование исходной системы. Поэтому перейдем к новым независимым переменным

$$\eta = t + x, \quad \tau = t - x$$

для которых получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1+u}{1-u} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{1-u} (q - SjB) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{2j}{1-u} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial j}{\partial \eta} = \frac{1}{R_m L} [u^2 B - j(u + R)] + \frac{j}{u(1-u)} (q - SjB) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} - \frac{\partial B}{\partial \eta} = -R_m j \quad (2.10)$$

Для этой системы матрица  $A$  является единичной, а матрица  $C$  — неособой. Характеристические направления  $\omega = d\eta/d\tau$  системы (2.8) — (2.10) определяются обычным путем [3] после приравнивания нулю определителя  $\|C - \omega I\|$ , где  $I$  — единичная матрица. Имеем

$$\|\omega_1 = (1+u)/(1-u), \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = -1$$

Так как все  $\omega$  — действительные и различные величины, квазилинейная система (2.8) — (2.10) является гиперболической.

Для каждой характеристической кривой можно найти трехмерный левый собственный вектор  $\lambda$ , удовлетворяющий уравнению

$$\lambda_i C = \omega_i \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

Имеем

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} -j/u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Умножим уравнения (2.8) — (2.10) на компоненты  $\lambda_i$  для каждого  $\omega_i$  и сложим. Тогда получим характеристическую нормальную форму [3] системы, где в каждом уравнении дифференцирование осуществляется только в направлении  $\omega_i$  оператором  $\partial(\cdot)/\partial\tau + \omega_i\partial(\cdot)/\partial\eta$ . Так как этот оператор эквивалентен  $d(\cdot)/d\tau$  вдоль соответствующей характеристики, то имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{1}{1-u}(q - SjB) \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_1 = \frac{1+u}{1-u} \\ \frac{dj}{d\tau} - \frac{j}{u} \frac{du}{d\tau} &= \frac{1}{R_m L} [u^2 B - j(u+R)] \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_2 = 1 \\ \frac{dB}{d\tau} &= -R_m j \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_3 = -1 \end{aligned}$$

Пользуясь свойством инвариантности характеристических направлений относительно преобразования координат, вернемся к прежним независимым переменным  $x$  и  $t$  и окончательно получим

$$\frac{du}{dt} = q - SjB \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = u \quad (2.12)$$

$$\frac{dj}{dt} - \frac{j}{u} \frac{du}{dt} = \frac{1}{R_m L} [u^2 B - j(u+R)] \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{dB}{dx} = R_m j \quad \text{вдоль} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = \infty \quad (2.14)$$

Последнее характеристическое уравнение соответствует распространению электромагнитного возмущения с бесконечной скоростью. При учете релятивистских членов наклон характеристики 3 будет определяться скоростью света [4].

В дальнейшем будем искать только непрерывные решения для неизвестных  $u$ ,  $j$ ,  $B$ , допуская, однако, разрывы их первых производных на характеристиках. Исследование разрывных решений типа скачков, возможных, по-видимому, при больших  $R_m$  и  $S$  и малых  $L$  из-за нелинейности исходной системы, является самостоятельной проблемой.

Система (2.12) — (2.14) может быть получена непосредственно из основного условия неопределенности производных на характеристических кривых [5]. При этом к исходной системе (2.5), (2.6) добавляются выражения для полных дифференциалов неизвестных, например

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad \text{и т. д.}$$

Решая полученную систему относительно каждой производной по правилу Крамера и приравнявая нулю определители в числителе и знаменателе производной, получаем уравнения характеристик (корни знаменателя) и условия совместности на них (корни числителя), которые совпадают с системой (2.12) — (2.14).

Характеристическая система (2.12) — (2.14) может быть решена численно, если известны начальные значения  $u$ ,  $j$  и  $B$  на какой-либо граничной кривой в  $xt$ -плоскости. Эта кривая должна быть пространственной или при некоторых добавочных ограничениях характеристического типа [3,6], когда для любой точки  $(x, t)$  можно найти область зависимости, которая отсекается на кривой крайними характеристиками, проходящими через точку  $(x, t)$  в направлении убывания  $t$ . В рассматриваемой задаче наклоны всех характеристик  $\omega^{-1}$  неотрицательны, так как возмущения в струе не распространяются вверх по потоку.

Для гидродинамических возмущений это объясняется отсутствием градиента давления в струе, для возмущений тока — пренебрежением  $\partial\psi_i/\partial t$  в уравнении (2.1), а для возмущений магнитного поля — выбранной геометрией магнитопровода и токопроводов. Действительно, в данной модели каждый элементарный ток  $j(x')$  наводит собственное магнитное поле [3,7] только в области  $x > x'$ , так как по отношению к этому току, замыкающемуся вправо по токопроводам, часть немагнитного зазора в области  $x < x'$  зашунтирована замкнутым внешним магнитопроводом с  $\mu \rightarrow \infty$ . Таким образом, магнитное поле на входе остается невозмущенным.

**3. Начальные условия.** Сформулируем начальные условия на осях  $x$  и  $t$ , исходя из следующих соображений. В момент  $t = 0$  начала переход-

<sup>1</sup> На оси  $t$  эти условия могут быть названы граничными.

ного процесса токи в струе не могут измениться мгновенно за счет индуктивностей. Следовательно, функции  $u(x, 0)$ ,  $j(x, 0)$ ,  $B(x, 0)$  известны из предшествующего установившегося режима течения. Далее, ток на входе равен нулю из-за разрыва внешней цепи, и, таким образом, скорость  $u(0, t)$  определяется гидродинамикой в области  $x < 0$ . Магнитное поле на входе тождественно равно внешнему полю  $B_e(t)$ . Таким образом, имеем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad j(x, 0) = \varphi_2(x), \quad B(x, 0) = \varphi_3(x) \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = \theta_1(t), \quad j(0, t) = \theta_2(t) \equiv 0, \quad B(0, t) = \theta_3(t) = B_e(t) \quad (3.2)$$

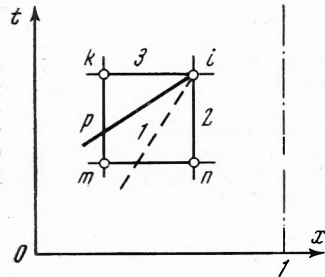
Для непрерывности решений необходимо, чтобы выполнялись условия согласования в точке  $(0, 0)$ , т. е.

$$\varphi_i(0) = \theta_i(0) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

В рассматриваемом случае оси  $x$  и  $t$  будут характеристиками, поэтому приходим к характеристической задаче Коши (задаче Гурса). Ее особенностью является то, что функции  $\varphi_i(x)$  и  $\theta_i(t)$  не могут задаваться произвольно, а должны удовлетворять соответствующим характеристическим уравнениям. В другой форме это же ограничение выражается в требовании, чтобы число условий на характеристической границе было равно числу характеристик, входящих в область влияния, не считая самой граничной кривой [3].

#### 4. Численные расчеты и обсуждение результатов. Численное решение системы

(2.12) — (2.14) проводилось для квадратной сетки в  $xt$ -плоскости, типичная ячейка которой показана на фиг. 2. Для узловой точки  $i$  область зависимости определяется тремя соседними узловыми точками  $k, m, n$ , расположенными в направлении убывания  $x$  и  $t$ . Расчет проводился последовательным смещением от осей  $x$  и  $t$  в области их влияния  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Интервалы  $ik, in$  находятся на характеристиках 3 и 2 соответственно. Характеристика 1 проводилась через точку  $i$  с наклоном, соответствующим промежуточной точке  $p$ , расположенной в области зависимости. Все параметры в точке  $p$  определялись линейным интерполированием параметров в соседних узловых точках. Если параметры в точках  $k, m, n$  известны, можно провести все характеристики в точку  $i$  и решать систему (2.12) — (2.14) методом конечных разностей вдоль характеристических интервалов.



Фиг. 2

Решалась задача со следующими начальными данными:

$$u(x, 0) = u(0, t) = B(x, 0) = B(0, t) = 1, \quad j(x, 0) = j(0, t) = 0 \quad (4.1)$$

Принималось  $B_0 = B_e = \text{const}$ . Этот тип начальных условий соответствует, например, замыканию внешних цепей с заданным распределением сопротивлений и индуктивностей в момент  $t = 0$  или включению при  $t = 0$  постоянного внешнего магнитного поля. В последнем случае пренебрегаем вихревыми токами, наводимыми в струе в момент включения поля, или считаем их временной масштаб много меньше осредненного отношения  $L^*$ , определенного (2.2). Эти же начальные условия могут быть использованы с некоторым приближением и для случая входа струи в канал в момент  $t = 0$ , если

$$l / u_0 \ll L^*$$

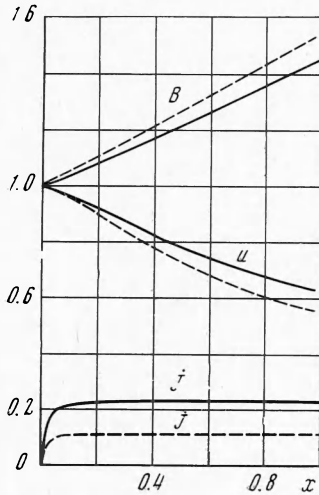
Легко видеть, что начальные данные (4.1) удовлетворяют характеристическим уравнениям (2.13) и (2.14), что является обязательным условием для характеристической задачи Коши. Уравнение (2.14) на оси  $x$  выполняется тождественно, а в уравнении (2.13) на оси  $t$  имеем

$$j \equiv 0, \quad \frac{dj}{dt} = \frac{du}{dt} = 0, \quad uB|_{x=0} = j \left( i + \frac{R}{u} \right) \Big|_{x=0} = 1$$

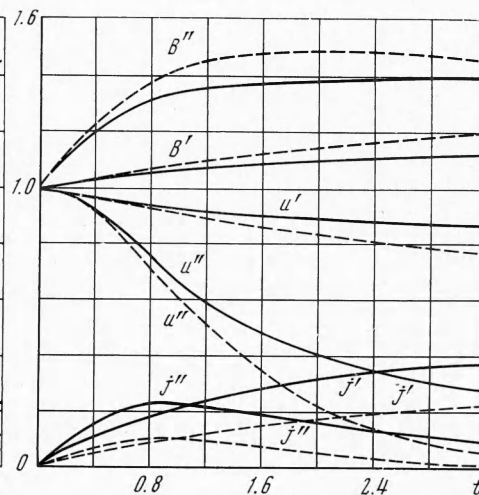
$R \rightarrow \infty$   
 $j \rightarrow 0$

Последнее соотношение аналогично закону Кирхгофа для любого разомкнутого источника э.д.с. (в нашем случае  $uB$ ) и является физически очевидным.

Следует отметить, что принятое выше ограничение  $R(0, t) \rightarrow \infty$  не является жестким с практической точки зрения. В общем случае произвольного распределения  $R_e$  по электродам можно сместить незначительно начало координат вверх по потоку, где электродов и тока нет, и функция  $R$  в рамках одномерного приближения может быть аппроксимирована с требуемой особенностью. Если внешние сопротивления распределены по электродам равномерно, хорошее приближение для расчетной функции  $R(x)$  дается, например, гиперболой  $x^{-1/n}$ ,  $n \geq 5$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Расчеты проводились на вычислительной машине *IBM — 360* (модель 91) для сетки с размерами ячейки  $\delta x = \delta t = 10^{-2}$ ,  $R = L = x^{-1/5}$ ,  $q = 0$  и различных значений  $R_m$  и  $S$ . Типичные результаты приведены на фиг. 3 при  $t = 1$ , а также на фиг. 4 при  $x = 0.19$  (переменные отмечены штрихом) и при  $x = 0.79$  (переменные отмечены двумя штрихами), причем сплошные линии для значений  $R_m = S = 2$ , штриховые — для  $R_m = S = 5$ . Видно, что увеличение проводимости  $\sigma$ , приводящее к пропорциональному увеличению  $R_m$  и  $S$ , вызывает более резкое изменение параметров в канале. Кажущееся уменьшение  $j$  в этом случае связано с увеличением базиса  $\sigma u_0 B_0$ . Если же  $R_m$  и  $S$  возрастают за счет  $l$ ,  $j$  уменьшается из-за перераспределения  $R_e$  и  $L_e$ , которое необходимо для выполнения принятого условия  $R = L = x^{-1/5}$ . При этом масштабы для  $x$  и  $t$  также меняются. Из фиг. 3, 4 следует, что в начале канала ( $x = 0.19$ )  $j$  возрастает монотонно во времени, а в конце канала ( $x = 0.79$ )  $j$  сначала возрастает по  $t$ , а затем падает из-за значительного снижения скорости.

Численные результаты проверялись выборочно подстановкой в исходную систему (2.5), (2.6). Частные производные находились приближенно по приращению величин на интервале  $\delta x' = \delta t' = 0.1$ . Погрешность в уравнениях не превышала 3% наибольшего слагаемого вплоть до  $t = 5$ .

Поступила 25 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
2. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964.
4. Johnson M. R. Shock — induced flow interactions with transverse magnetic fields. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 3.
5. Shapiro A. H. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow (The Ronald Press Co), N. Y., 1953.
6. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics. N. Y., Acad. Press, 1964.
7. Янтовский Е. И. Собственное магнитное поле в одномерном течении электропроводной жидкости. Магнитная гидродинамика, 1965, № 4.