

19. Дремин А. Н., Шведов К. К. Определение давления Чеммена — Жуге и времени реакции в детонационной волне мощных ВВ.— ПМТФ, 1964, № 2.
20. Рини Т. Численное моделирование явлений при высокоскоростном ударе.— В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973.
21. Павловский М. Н. Измерения скорости звука в ударно-сжатых кварците, ангидриде, хлористом натрии, парафине, плексигласе, полиэтилене и фторопласте-4.— ПМТФ, 1976, № 5.
22. Чельшев В. П., Шехтер В. И., Шушко Л. А. Уравнения состояния для металлов при высоких давлениях.— ФГВ, 1970, т. 6, № 2.

УДК 534 + 539.2

К ВОПРОСУ ОБ ОТКЛИКЕ АНГАРМОНИЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА НА СОСРЕДОТОЧЕННЫЙ НАЧАЛЬНЫЙ ТОЛЧОК

А. С. Долгов

(Харьков)

Интерес к задаче об отыскании временных зависимостей для смещений атомов кристалла после начального толчка определяется потребностями анализа взаимодействия потоков атомных частиц с твердыми поверхностями, разрушения бомбардируемых поверхностей, развития процесса нестационарной деформации после сосредоточенного воздействия ударного типа. Имеется ряд публикаций, содержанием которых является определение отклика кристалла на внешний толчок или обсуждение физических эффектов, связанных с особенностями функций отклика (например, [1—4]). В подавляющем числе теоретических работ этого направления используется гармоническое приближение. Роль слабого ангармонизма рассматривалась в [5].

Однако преобладающая часть физических процессов, выяснению закономерностей которых должно служить решение задач указанного типа, все же предполагает такой уровень первоначального возбуждения, что допущение о малости и тем более несущественности эффектов ангармонизма не является удовлетворительным. Поэтому последовательный учет нелинейности взаимодействия между атомами представляет принципиальный интерес. Выполненные численные расчеты при всей их полезности имеют частный характер и не могут полностью заменить аналитическое рассмотрение, ориентированное на выяснение общих свойств процесса. Ниже приводится некоторый класс решений задачи о развитии процесса смещений в сугубо нелинейной структуре.

Для анализа выбрана структура со степенной формой зависимости потенциальной энергии от относительных смещений, которая в некоторых указанных ниже условиях допускает определение основных точных свойств развития процесса. Уравнения динамики одномерной атомной цепи со взаимодействием ближайших соседей записываются в виде

$$(1) \quad d^2x_n/dt^2 = \alpha \{ (x_{n-1} - x_n)^{2p+1} - (x_n - x_{n+1})^{2p+1} \},$$

где x_n — смещение атома, которому приписан индекс n , относительно его положения равновесия; p — целое число, не равное нулю (при некоторых оговорках проводимые ниже построения могут быть распространены на случай произвольных неотрицательных значений p). Уравнения (1) не содержат линейной составляющей. Такая особенность силового взаимодействия реализуется, например, для поперечной составляющей колебаний прямолинейной атомной цепи, где наименьший порядок зависимости сил от смещений соответствует третьей степени. Кроме того, и в иных структурах роль линейной составляющей для колебаний с большим размахом может оказаться второстепенной. Разумеется, учет линейных по смещениям составляющих расширил бы область реальных объектов, которым качественно соответствуют уравнения (1), но для такого случая законченных прозрачных формул записать не удастся. Решения же в форме длинноволновых солитонов, которые могли бы быть найдены, представляют иной физический интерес, отличный от указанных выше целей данной работы. Поэтому в качестве отправной точки приняты уравнения (1).

Континуальная аппроксимация для уравнений (1) дает

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right)^{2p+1}.$$

Соображения масштабной инвариантности уравнения (2) подсказывают целесообразность поисков решения в виде

$$(3) \quad x(n, t) = f(\xi), \quad \xi = nt^{-1/(p+1)}.$$

Подстановка (3) в уравнение (2) приводит последнее к виду обыкновенного дифференциального уравнения

$$(4) \quad \frac{p+2}{(p+1)^2} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{\xi^2}{(p+1)^2} \frac{d^2f}{d\xi^2} = \alpha \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^{2p+1}.$$

Умножая уравнение (4) на

$$|df/d\xi|^{-p/(p+2)},$$

сводим его к виду уравнения в полных дифференциалах первого порядка для модуля производной от f по ξ . Таким образом, получается

$$(5) \quad y^{2p} = B\xi^2 - C_1 y^{-2/(p+2)}, \quad y = |df/d\xi|, \quad B = 1/[\alpha(2p+1)],$$

где C_1 — произвольная константа.

Уравнение (5) есть алгебраическое уравнение относительно выражения $y^{2/(p+2)}$ степени $(p+1)^2$, из которого находится явное выражение для y и, следовательно, также для f .

Уравнение (5) определяет некоторый набор вариантов развития смещений во времени и пространстве. Для определенности будем говорить о таком варианте, который качественно соответствует априорным и также основанным на анализе решений соответствующих линейных задач представлениям о характере развития процесса после сосредоточенного толчка.

В области положительных значений ξ , C_1 зависимость $y = y(\xi)$, даваемая уравнением (5), имеет две ветви, асимптотические ($\xi \rightarrow \infty$) формы которых $\xi^{1/p}$, $\xi^{-(p+2)}$, причем область существования решений ограничена условием

$$\xi > \xi_0, \quad \xi_0^2 = \frac{1}{B} \left(y_0^{2p} + C_1 y_0^{-\frac{2}{p+2}} \right), \quad y_0 = \left[\frac{C_1}{p(p+2)} \right]^{\frac{p+2}{2(p+1)^2}}.$$

Решение, определяющее отсутствие сдвигов при малых временах и больших удаленностях от точки $n = 0$, соответствует ветви, затухающей при $\xi \rightarrow \infty$. Таким образом, в «периферийной» области пространства распределение смещений определяется выражением

$$(6) \quad x(n, t) \approx - (p+1) \left(\frac{C_1}{B} \right)^{(p+2)/2} \frac{t}{n^{p+1}} - \frac{p+2}{2C_1(2p^2+5p+3)} \left(\frac{C_1}{B} \right)^{(2p^2+5p+4)/2} \frac{t^{(2p^2+5p+4)/(p+1)}}{n^{2p^2+5p+3}}.$$

Приближенность формулы (6) определяется невозможностью точно решить алгебраическое уравнение высокой степени (5). Разумеется, можно записать количественно более точные формулы для закона смещений. Однако учет последующих членов выражения (6) имеет какое-то значение только для близкой окрестности границы $\xi = \xi_0$ и несколько не изменяет качественную картину распределения.

Выражение (6) при $t \rightarrow 0$ дает нуль везде, кроме области $n \rightarrow 0$. Это значит, что найденная зависимость соответствует развитию процесса нестационарных сдвигов после начального сосредоточенного сдвига при $n = 0$. Граница области, где реализуется распределение (6), перемещается в пространстве со скоростью

$$(7) \quad v = [\xi_0/(p+1)] t^{-p/(p+1)}.$$

Формула (7) определяет масштаб скорости распространения сгустка смещений, т. е. может рассматриваться как аналог скорости звука. Стоит отметить, что, хотя случай $p = 0$ в рамках проводимых построений тре-

будет некоторых оговорок, величина v , вычисленная для этого случая по формуле (7), совпадает со скоростью звука в буквальном смысле этого понятия.

Поток энергии в точке n в момент времени t определяется в рамках употребляемого здесь подхода выражением

$$(8) \quad j = \frac{\alpha}{p+1} \frac{n}{t^{(p+3)/(p+1)}} y(\xi)^{2p+2}.$$

Из формул (5)–(7) видно, что основные масштабные характеристики развития процесса зависят от величины C_1 , введенной как произвольная константа. Физически эта величина определяется уровнем первоначального возбуждения и может быть вычислена, например, по формуле (8) для некоторого условно начального значения j . Уменьшение C_1 ведет к снижению масштаба смещений и скорости v .

В области структуры $\xi < \xi_1$ ($\xi_1 \geq \xi_0$) распределение смещений определяется тем же уравнением (5), где, однако, следует считать произвольную константу отрицательной. Выбор этой константы и константы ξ_1 определяется требованием непрерывности потоков энергии и импульса на границе $\xi = \xi_1$ в системе координат, где эта граница покоится.

Так как при переходе от функций y к смещениям x появляется возможность варьирования еще одной произвольной константой для внутренней зоны распределения, то, очевидно, искомое распределение всегда может быть сделано непрерывным. Разрывы производных искомых функций на границе внутренней и внешней зон не должны вызывать удивления, так как это обстоятельство непосредственно связано с сущностью представления о природе этой границы как некоторого фронта типа ударной волны, соответствующего бегущему излому распределения смещений.

Можно видеть, что распределение смещений в рассматриваемой нелинейной структуре отличается от того, что имеет место для линейного случая, где, как известно, возмущение распространяется без искажений с постоянной скоростью. В рассматриваемой структуре движение сгустка смещений замедляется, а профиль распределения выполаживается, сохраняя характерный масштаб сдвигов, определяемый выражением $f(\xi_1)$.

В нелинейной среде оказывается возможным такое развитие процесса смещений, когда максимальный сдвиг во все моменты времени соответствует $n = 0$, а асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) поведение всех атомов соответствует перемещению структуры как целого на величину указанного сдвига при $n = 0$. Этот вариант не имеет аналога в континуальной линейной структуре, но в значительной мере сходен с особенностями развития смещений атомов дискретной линейной цепи.

Заметим, что проведенные построения не требуют, чтобы граница «периферийной» и «центральной» зон ξ , была фиксирована. Кроме того, можно говорить о распределении смещений, содержащем несколько точек излома функции $f(\xi)$ и включающем, может быть, участки, где $f = \text{const}$. Допускается и неконсервативность структуры, соответствующая, например, непрерывному поступлению энергии в точке $n = 0$. Значения ξ , соответствующие границам участков, определяются законами сохранения. Реализация того или иного характера развития процесса определяется условиями начального возбуждения структуры.

Наиболее существенным заключением проведенного рассмотрения является предсказание существования ударного фронта распространения смещений, который в ряде вариантов соответствует максимальным нестационарным напряжениям в структуре и, видимо, ответствен за эффекты дефектообразования при ударном нагружении твердого образца и ударную прочность.

Поступила 10 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыков Ю. А., Стриженов Д. С. О взаимодействии атомов с поверхностью твердого тела.— ПМТФ, 1967, № 4.
2. Tasi J. Dynamic initial slip in a linear chain.— Phys. Rev., 1972, Ser. B, vol. 6, p. 4851.
3. Пярриуу А. А. Взаимодействие молекул газа с поверхностями. М.: Наука, 1974.
4. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975.
5. Долгов А. С. Нестационарные процессы в одномерной цепи связанных ангармонических осцилляторов.— ПМТФ, 1975, № 2.

УДК 534.213

УПРУГИЕ СВОЙСТВА ПУСТЫХ СКЕЛЕТОВ ЗЕРНИСТЫХ КОЛЛЕКТОРОВ

Б. П. Сибиряков

(Новосибирск)

До последнего времени задачи распространения упругих волн в зернистых скелетах не решались в строгой постановке. Это связано с трудностями учета граничных условий на всей сложной поверхности пор. Многие исследователи (Маккензи, Токсоз и др.) пытались обойти эту трудность (в случае изолированных пор), решая точную задачу для отдельного включения и полагая, что поры не влияют друг на друга [1]. Такая постановка задачи дает правильные результаты лишь при очень малой пористости. В случае произвольной (не малой) пористости эти решения хотя и приводят к падению коэффициентов Ламэ λ и μ , однако вследствие уменьшения плотности породы падение скоростей оказывается очень слабым, в частности, скорости продольных волн в пустом скелете оказываются выше, чем в водонасыщенном при сферической форме пор, что противоречит опыту [2]. Другая группа исследователей, связанная в основном с изучением композиционных материалов, разрабатывала приближенные методы построения так называемой «вилки» Хашина — Штрикмана [3, 4], где вместо точного решения ищутся допустимые границы изменения λ и μ . Если «вилка» достаточно узкая, то значения λ и μ композита являются практически достоверными. Ширина «вилки» увеличивается с увеличением перепада упругих свойств между скелетом и флюидом, и для реальных коллекторов оценки типа Хашина и Штрикмана также оказываются несостоятельными из-за больших перепадов по λ и μ (если поры заполнены газом) или по μ (если поры заполнены жидкостью). В [5, 6] предприняты попытки строгих расчетов упругих свойств пустых скелетов для периодических структур. Такие расчеты возможно провести потому, что граничные условия в этом случае ставятся на границе одного-единственного периода, а затем эти условия периодически повторяются на микроструктуре. При этом задача сводится к определению средних тензоров напряжений и деформаций на каком-либо периоде структуры. Алгоритм получения точного решения такой задачи указан в [6], а сравнение данных теории и опыта на двумерных средах показало их весьма хорошее согласие.

Однако периодические структуры — это частный случай микроструктур. В действительности периодически повторяются лишь некоторые коллективные интегральные характеристики микроструктур, а не их индивидуальные свойства. К тому же практически невозможно указать микроструктуру достаточно малого периода, если последняя сложена частицами разного размера, как это имеет место в терригенных коллекторах. И, наконец, все периодические структуры образуют анизотропные тела. Получить изотропное, статистически однородное тело можно лишь на неперидических, достаточно случайно организованных микроструктурах. Таким образом, необходим новый подход для определения средних значений λ и μ в микрогетодородных, статистически изотропных средах.

В основу этого подхода можно положить следующие соображения. Можно поставить задачу о строгом решении уравнений равновесия на отдельном зерне, обладающем каким-то числом площадок контакта со своими соседями. Эта задача может быть решена, если усилия на контактах заданы. Однако можно положить эти нагрузки неопределенными, считая, что центр тяжести зерна деформируется, как в плоской продольной волне, т. е. в центре зерна $e_{xx} = e_{yy} = 0$, $e_{zz} \neq 0$, $\sigma_z = 1$. Если считать напряжения на зерне уравновешенными (что разумно, так как радиус зерна во много раз меньше длины волны), а энергию деформирования положить минимальной, то задача становится вполне определенной и нагрузки при указанных условиях будут вычислены как функции материала зерна и структуры порового пространства. По этим нагрузкам можно определить средний тензор деформации в центре зерна и средний тензор напряжений. Соотношение их дает средние значения параметров Ламэ λ и μ на любом зерне, а следовательно, во всей микроструктуре.