

4. Богульский И. О. Повышение точности решения плоских динамических задач упругости в рамках аппроксимации линейными полиномами. — Красноярск, 1986. — Деп. в ВИНТИ 03.01.86, № 65—86.
5. Журков С. Н. Проблема прочности твердых тел // Вестн. АН СССР. — 1957. — № 11.
6. Степанов В. А., Песчанская Н. Н., Шнейзман В. В. Прочность и релаксационные явления в твердых телах. — Л.: Наука, 1984.
7. Войцеховский Б. В., Митин Л. А., Войцеховская Ф. Ф. Эффективность применения высоких энергий удара для разрушения крепких скальных пород // ФТПРПИ. — 1973. — № 4.

г. Новосибирск

Поступила 29/1 1990 г.

УДК 539.376

В. Н. Солодовников

К АНАЛИЗУ ПОЛЗУЧЕСТИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Дано конечно-элементное решение задачи по теории ползучести типа упрочнения. Вследствие ползучести концентрация напряжений на краю отверстия уменьшается, смещения как функции от приведенного времени растут с почти постоянной скоростью. Представлены картины изолиний смещений типа картин муара.

Основные уравнения. Выражения деформаций через смещения, уравнения равновесия и соотношения между напряжениями и деформациями в плоском напряженном состоянии принимаются в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1}, \quad e_{22} = u_{2,2}, \quad 2e_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \\ \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \\ e_{11} &= E^{-1}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \rho_{11}, \quad e_{22} = E^{-1}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \rho_{22}, \\ e_{12} &= (1 + \nu)E^{-1}\sigma_{12} + \rho_{12}. \end{aligned}$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; u_i — смещения; e_{ij} — деформации; σ_{ij} — напряжения; ρ_{ij} — деформации ползучести ($i, j = 1, 2$) в декартовой системе координат x_1, x_2 ; индексы 1 и 2 после запятой означают частное дифференцирование по x_1 и x_2 соответственно.

Для расчета ползучести пластины используем в отличие от [3—7] теорию ползучести типа упрочнения [2, 8]. В одноосном напряженном состоянии деформация ползучести ρ и напряжение σ как функции от времени t в данной теории связаны зависимостью

$$(1) \quad \rho^k d\rho/dt = a\sigma^n,$$

где k, n, a — положительные константы материала. В начальный момент времени $t = 0$ имеется особенность: $\rho = 0$, скорость деформации ползучести $d\rho/dt$ обращается в бесконечность. Для устранения особенности перейдем к новой переменной по времени — приведенному времени [8]

$$(2) \quad \tau = [a(k+1)t]^m, \quad m = 1/(k+1).$$

Из (1) и (2) получаем

$$(3) \quad \rho^k \dot{\rho} = \tau^k \sigma^n, \quad \dot{\rho} = \sigma^n \left[(k+1) \tau^{-(k+1)} \int_0^\tau \sigma^n \tau^k d\tau \right]^{m-1}.$$

Точка сверху означает дифференцирование по τ . При $\tau = 0$ производная $\dot{\rho}$ принимает конечное значение σ^{mn} . В дальнейшем τ для краткости называется временем, производные по τ — скоростями рассматриваемых функций.

Обобщая (3) на плоское напряженное состояние, формулируем уравнения

$$(4) \quad \dot{\rho}_{11} = \lambda(2\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \dot{\rho}_{22} = \lambda(2\sigma_{22} - \sigma_{11}), \quad \dot{\rho}_{12} = 3\lambda\sigma_{12},$$

$$\lambda = (1/2) S^{n-1} \left[(k+1) \tau^{-(k+1)} \int_0^\tau S^u \tau^k d\tau \right]^{m-1}, \quad S = (\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}$$

(S — интенсивность напряжений).

Введем функционал

$$(5) \quad \Phi = \int_{\Omega} \int \frac{E}{2(1-\nu^2)} \{e_{11}^2 + 2\nu e_{11}e_{22} + e_{22}^2 + 2(1-\nu)e_{12}^2 -$$

$$- 2[(\rho_{11} + \nu\rho_{22})e_{11} + (\rho_{22} + \nu\rho_{11})e_{22} + 2(1-\nu)\rho_{12}e_{12}]\} dx_1 dx_2 -$$

$$- \int_{\Gamma} [p(u_1 l_2 - u_2 l_1) + q(u_1 l_1 + u_2 l_2)] dl.$$

Интегрирование выполняется по области Ω , занятой пластиной, и по ее контуру Γ . В данном функционале варьируются смещения. Деформации e_{11} , e_{22} , e_{12} выражаются через смещения. Деформации ползучести ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{12} , нормальное и касательное напряжения p , q на контуре Γ , определяемые по формулам (l_1 , l_2 — компоненты единичного вектора, касательного к Γ)

$$p = \sigma_{11}l_2^2 - 2\sigma_{12}l_1l_2 + \sigma_{22}l_1^2, \quad q = (\sigma_{11} - \sigma_{22})l_1l_2 + \sigma_{12}(l_2^2 - l_1^2),$$

$$l_1 = dx_1/dl, \quad l_2 = dx_2/dl, \quad dl = [(dx_1)^2 + (dx_2)^2]^{1/2},$$

при варьировании функционала Φ фиксируются.

Из условия стационарности Φ следуют уравнения равновесия, сформулированные относительно смещений, и выражения p и q на Γ через смещения. Данный функционал используем для формулировки конечно-элементных уравнений.

Постановка задачи. Прямоугольная пластина с центральным круговым отверстием растягивается в условиях ползучести постоянной нагрузкой P , равномерно распределенной на ее коротких сторонах. Ввиду симметрии решение находится в одной четверти пластины, изображенной на рис. 1, где даны размеры пластины, отнесенные к радиусу отверстия R , показано разбиение ее на конечные элементы.

Имеем следующие участки контура рассматриваемой четверти пластины и краевые условия на них для любого τ (см. рис. 1): 1) $R \leq x_1 \leq L$, $x_2 = 0$, $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$; 2) $x_1 = 0$, $R \leq x_2 \leq H$, $u_1 = 0$, $\sigma_{12} = 0$; 3) $0 \leq x_1 \leq L$, $x_2 = H$, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$; 4) $x_1 = L$, $0 \leq x_2 \leq H$, $\sigma_{11} = P$, $\sigma_{12} = 0$; 5) $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $p = q = 0$.

Конечно-элементная формулировка задачи. Используем четырехугольные девятиузловые изопараметрические лагранжевы элементы [9]. Всего имеем 105 элементов и 900 искоемых переменных — компонент смещений в узлах элементов (см. рис. 1).

Из условия стационарности Φ (5), учитывая заданные краевые условия, получаем конечно-элементные уравнения относительно смещений в узлах элементов. Для вычисления интегралов по площади каждого элемента применяем трехточеч-

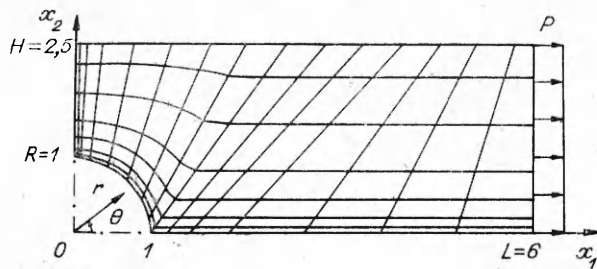


Рис. 1

ную квадратурную формулу Гаусса. На границах между элементами удовлетворяются условия непрерывности смещений, в каждом узле сумма всех приложенных к нему обобщенных сил, определяемых из принципа возможных перемещений, полагается равной нулю.

Дифференцируя полученные конечно-элементные уравнения по τ , приходим к системе уравнений для вычисления скоростей смещений. Матрица коэффициентов A при искомах скоростях смещений в уравнениях совпадает с глобальной матрицей жесткости в упругости. Система решается методом компактного исключения Гаусса с учетом симметричности и ленточности матрицы A [9, 10], причем последняя приводится к треугольному виду только один раз при первом решении задачи упругости.

Алгоритм счета по времени. Определяем начальное упругое состояние пластины при $\tau = 0$. Далее τ разбивается на малые интервалы (шаги).

На каждом шаге от τ до $\tau + \Delta\tau$ для любой искомой функции v (смещения в узлах элементов и напряжения в узлах формулы интегрирования по области Ω) по значениям v_τ вычисляем скорости \dot{v}_τ в начале шага (значения функций помечаем индексом того времени (τ или $\tau + \Delta\tau$), к которому они относятся). Затем, используя значения напряжений $v_{\tau+\Delta\tau}^*$, получаемые по формуле Эйлера

$$v_{\tau+\Delta\tau}^* = v_\tau + \Delta\tau \dot{v}_\tau,$$

находим скорости смещений и напряжений $\dot{v}_{\tau+\Delta\tau}^*$ и по ним — окончательные значения искомых функций в конце шага $v_{\tau+\Delta\tau} = v_\tau + (\Delta\tau/2)(\dot{v}_\tau + \dot{v}_{\tau+\Delta\tau}^*)$. В результате напряженное и деформированное состояния пластины в конце шага полностью определяются.

Приращения значений интегралов в выражениях скоростей деформаций ползучести (4) $I(\tau) = \int_0^\tau S^n \tau^k d\tau$ на шаге от τ до $\tau + \Delta\tau$ задаем по формулам

$$I_{\tau+\Delta\tau} = I_\tau + m(\tau + \Delta\tau)^{k+1} [\gamma S_\tau^n + (m+1)^{-1}(1 - m\gamma\tau/\Delta\tau)(S_{\tau+\Delta\tau}^n - S_\tau^n)],$$

$$\gamma = 1 - [\tau/(\tau + \Delta\tau)]^{k+1},$$

которые получаются путем аппроксимации функции S^n на шаге линейным полиномом. В конечном состоянии после полной мгновенной разгрузки напряжения и смещения равны разности их значений перед разгрузкой и в начальном упругом состоянии.

Результаты счета. Полагаем коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, константы в законе ползучести $n = 9$, $k = 2$ и, значит, $m = 1/3$. Введем безразмерные величины

$$x'_i = x_i/R, \quad u'_i = Eu_i/(PR), \quad \tau' = \tau EP^{mn-1},$$

$$e'_{ij} = Ee_{ij}/P, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}/P \quad (i, j = 1, 2).$$

Решение в этих безразмерных величинах не зависит от констант a , E , P , R . Далее в тексте и на рисунках штрихи в обозначениях безразмерных величин опускаются.

На интервале $0 \leq \tau \leq T = 0,4$ задаем последовательность из 20 шагов: $\Delta\tau = 0,001; 0,002; 0,004; 0,008; 0,015; 0,02; 0,025; \dots; 0,025$. При $\tau = T$ скорости напряжений становятся меньше заданной малой величины, напряжения и упругие деформации практически перестают изменяться, продолжают расти деформации ползучести. В этот момент производится полная мгновенная разгрузка. Отметим, что действительное время t , соответствующее $\tau = T$, зависит от P , a , E .

Смещения как функции от τ растут с почти постоянной скоростью (согласно (2), зависимость смещений от t нелинейная). На рис. 2 цифрами

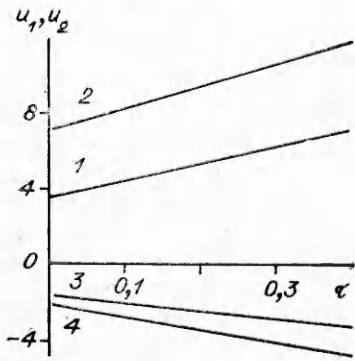


Рис. 2

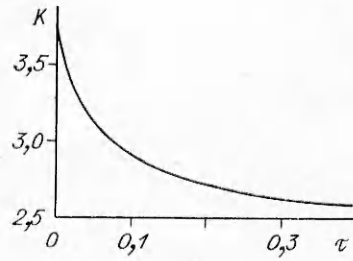


Рис. 3

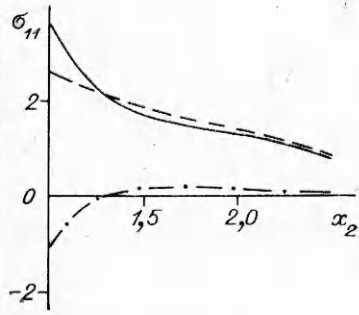


Рис. 4

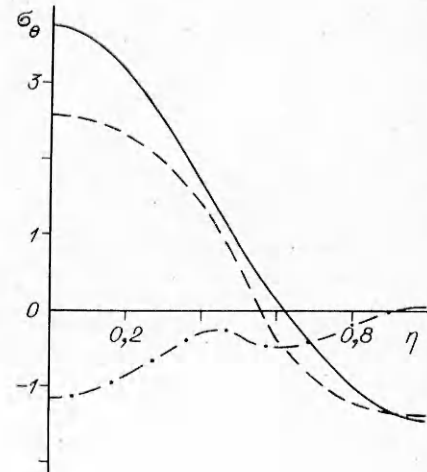


Рис. 5

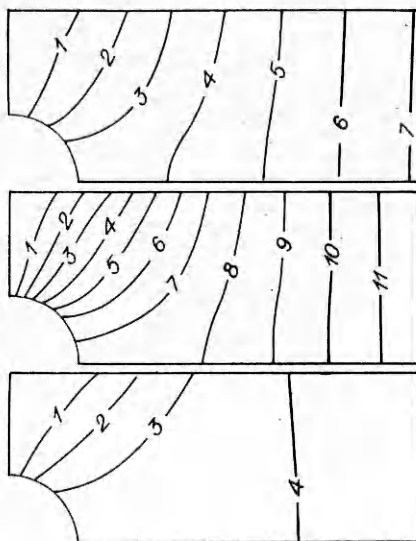


Рис. 6

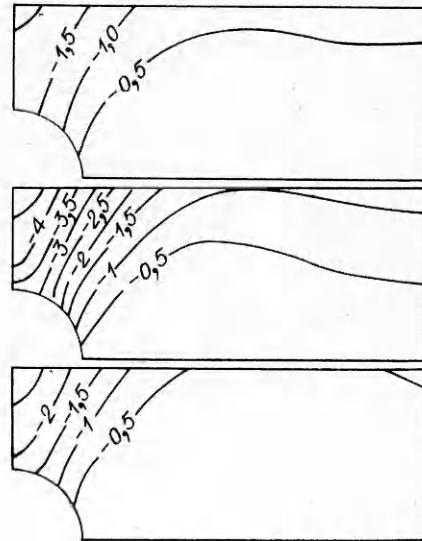


Рис. 7

1—4 помечены графики смещений u_1 в точках с координатами $(R, 0)$ и $(L, 0)$ и u_2 в точках $(0, R)$ и $(0, H)$ как функций от τ .

Вследствие ползучести концентрация напряжений на краю отверстия уменьшается. На рис. 3 показано изменение со временем τ коэффициента концентрации напряжений K , равного безразмерной величине окружного напряжения $K = \sigma_\theta = \sigma_{11}$ на краю отверстия в точке с координатами $(0, R)$. Величина K уменьшается от $K = 3,7501$ при $\tau = 0$ до $K = 2,5949$ при $\tau = T$. В [1] для бесконечно длинной пластины ($L \rightarrow \infty$) в упругости дано $K = 3,74$. Коэффициент K не зависит от P, a, E .

На рис. 4 представлено распределение напряжения σ_{11} в сечении пластины $x_1 = 0$, на рис. 5 — распределение окружного напряжения σ_θ на краю отверстия как функции от $\eta = 1 - 2\theta/\pi$ (θ — угол в полярной системе координат (r, θ) , см. рис. 1) в моменты времени $\tau = 0$ (сплошные) и $\tau = T$ до и после разгрузки (штриховые и штрихпунктирные кривые соответственно). Кривые проведены через значения напряжений в центральных узлах на сторонах элементов, малые разрывы напряжений в граничных точках между элементами сглаживаются (в конечно-элементной формулировке условия непрерывности напряжений на границах между элементами удовлетворяются лишь интегрально). В области вне некоторой окрестности края отверстия напряжения изменяются в процессе ползучести незначительно.

На рис. 6 даны картины изолиний осевых смещений $u_1 = 1; 2; \dots$, а на рис. 7 — поперечных смещений $u_2 = -0,5; -1; -1,5; \dots$ типа картин муара [11, 12] последовательно сверху вниз для трех состояний: при $\tau = 0$ и при $\tau = T$ до и после разгрузки. Изолинии помечаются значением постоянной на них компоненты смещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий.— Киев: Наук. думка, 1968.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
3. Penny R. K., Hayhurst D. R. The deformations and stresses in a stretched thin plate containing a hole during stress redistribution caused by creep // Intern. J. Mech. Sci.— 1969.— V. 11, N 1.
4. Манукян К. М., Морозов В. М., Сапунов В. Т. К расчету элементов конструкций на ползучесть методом конечного элемента // Прикл. механика.— 1984.— Т. 20, № 11.
5. Шевченко Ю. Н., Мазур В. Н. Решение плоских и осесимметричных краевых задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести // Прикл. механика.— 1986.— Т. 22, № 5.
6. Hayhurst D. B., Dimmer P. R., Chernuka M. W. Estimates of the creep rupture lifetime of structures using the finite element method // J. Mech. Phys. Solids.— 1975.— V. 23, N 4/5.
7. Lee G. S., Smith L. C. Analysis of a power-law material containing a single hole subjected to a uniaxial tensile stress using the complex pseudo-stress function // Trans. ASME: J. Appl. Mech.— 1988.— V. 55, N 2.
8. Бойл Дж., Сиенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести.— М.: Мир, 1986.
9. Батэ К. Ю., Вильсон Е. Л. Численные методы анализа и метод конечных элементов.— М.: Стройиздат, 1982.
10. Фадеев Д. К., Фадеева В. И. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.; Л.: Физматгиз, 1963.
11. Дюрелли А., Парке В. Анализ деформаций с использованием муара.— М.: Мир, 1974.
12. Жилкин В. А., Попов А. М. Исследование упругопластических деформаций // Завод. лаб.— 1987.— Т. 53, № 9.

г. Новосибирск

Поступила 22/V 1989 г.,
в окончательном варианте — 3/XI 1989 г.