

УДК 532.5.031

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ ВАРИАЦИОННО-ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ*

С.М. АУЛЬЧЕНКО

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
Новосибирск*

Разработан и применен для решения задач оптимизации формы решеток профилей метод, названный вариационно-градиентным и основанный на вычислении градиента функционала оптимизационной задачи с использованием значений вариаций параметров течения по переменным проектирования, определяемых из системы уравнений газовой динамики в вариациях. Проведено тестовое сравнение его эффективности с аналогичным (градиентным) методом, в котором градиент функционала вычисляется с помощью конечных разностей при решении конкретных задач оптимизации профилей решеток. Получено существенное ускорение процесса поиска экстремума. Приведены численные и графические результаты решения задач оптимизации формы решеток профилей.

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамическая решетка является моделью рабочих колес различных турбомашин (турбин, лопаточных компрессоров и насосов, вентиляторов), повышение качества которых является актуальной проблемой. Поскольку именно характер гидродинамического взаимодействия решетки с потоком, зависящий в основном от их геометрии, определяет качество турбомашин, то актуальными являются разработка и совершенствование методов оптимизации формы решеток профилей.

Проектирование решеток, т. е. выбор их геометрических параметров, при которых выполняются предъявляемые к турбомашинам требования, в настоящее время, как правило, проводится методом возмущения относительно известной геометрии прототипа с использованием экспериментальных и теоретических аэрогидродинамических характеристик. Применение этого метода затрудняет совершенствование решетки, т. к. для этого требуется перебор большого количества комбинаций геометрических параметров.

Более эффективными являются два других подхода к решению поставленной задачи. Первый подход предполагает разработку различных методов решения обратных задач аэродинамики и оптимизацию форм обтекаемых тел при их проектировании. Эти методы имеют давнюю историю (см., например, [1 – 3] и библиографию в них) и продолжают активно совершенствоваться в настоящее время [4 – 6]. Несомненным достоинством этого подхода является высокая эффективность их использования, являющаяся следствием развитого аналитического описания потенциальных течений, однако в большинстве случаев он применим лишь для двумерных

* Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН (№ 27) и РФФИ (грант № 03-01-00521а).

течений. Второй — использование различных методов численной оптимизации, основанных на решении прямых задач обтекания решетки с привлечением тех или иных итерационных алгоритмов решения задач гидрогазодинамики [7 – 10]. Его достоинство состоит в возможности использования более сложных моделей течений, поскольку современные программы численного моделирования трехмерных течений в промышленных установках позволяют проводить расчеты характеристик потоков для заданной геометрии с учетом явлений турбулентности. При этом, однако, требуются значительные временные затраты, что в немалой степени препятствует использованию итерационных алгоритмов для решения оптимизационных задач. К преодолению указанных трудностей с одной стороны ведет разработка новых и модификация существующих алгоритмов расчета течений, с другой — разработка и модификация алгоритмов решения задач оптимизации в аэрогидродинамике. Последнему направлению и посвящена данная работа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи автоматической оптимизации форм компонентов турбомашин в самом общем виде включает в себя:

1. Параметрическое описание геометрии решетки, корректное с точки зрения гидродинамики при вариации значений параметров и приемлемое с инженерной точки зрения;
2. Построение целевого функционала и функциональных ограничений оптимизационной задачи;
3. Расчет течения жидкости в проточной части турбомшины, включая течение во вращающемся рабочем колесе;
4. Решение экстремальной задачи, с выбором эффективной стратегии поиска оптимального решения.

Поскольку целью данной работы является, в первую очередь, сравнительный анализ эффективности различных стратегий решения оптимизационных задач аэрогазодинамики, то в постановке конкретной задачи было целесообразно пойти по пути максимально возможного ее упрощения, с сохранением специфики, оправдывающей применение разработанной методики.

Упрощающие предположения для сформулированных выше пунктов постановки задачи:

1. Используется гипотеза плоских сечений и, как следствие, появляется возможность применить стандартное параметрическое задание контура профиля с помощью средней линии и функции толщин. Итого три варьируемых параметра — стрела прогиба средней линии f , ее абсцисса x_f и максимальная толщина профиля c . Хорда профиля b и абсцисса его максимальной толщины x_c считаются фиксированными. Функция толщин выбирается из серии профилей NASA

$$L_n(x) = c(0,2969x^{1/2} - 0,1260x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1036x^4),$$

а средняя линия имеет параболическую форму;

2. Учет вязкости, вычисление коэффициента сопротивления профиля и значения критерия безотрывности проводятся по интегральным соотношениям двумерного пограничного слоя, описание и обоснование которых см., например, в [11, 12], а в качестве функционала берется отношение коэффициента подъемной силы к коэффициенту сопротивления профиля, т. е. его аэродинамическое качество. Функциональные ограничения состоят в требовании равенства коэффициента подъемной силы заданной величине и выполнении критерия безотрывности;

3. С учетом пунктов 1, 2 расчет течения в решетке производится на основе плоских уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y &= 0, \\ \mathbf{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, e), \mathbf{F} = (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, u(p + e)), \\ \mathbf{G} &= (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v(p + e)). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь координаты x и y направлены соответственно вдоль и поперек хорды профиля и отнесены к ее длине b , время t отнесено к b/a_0 , компоненты скорости газа u, v и скорость звука a — к a_0 , плотность ρ — к ρ_0 ; давление p и полная энергия единицы объема газа e обезразмерены параметром $\rho_0 a_0^2$; p_0 и a_0 — размерные давление и скорость звука в набегающем потоке; ρ_0 определяется из условия $p_0 = \rho_0 a_0^2$. Для рассматриваемой модели газа:

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u^2 + v^2)/2), \quad a^2 = \gamma p / \rho.$$

Краевая задача для системы (1) замыкается условиями непротекания на поверхности профилей решетки

$$L(\vec{x}, \beta) = 0, \quad (2)$$

где β — параметры геометрии, заданием вектора скорости на левой границе расчетной области, давления — на правой и условий периодичности на верхней и нижней границах вне контуров профилей;

4. Решение экстремальной задачи осуществляется двумя способами — методом наискорейшего спуска [13] и вариационно-градиентным (ВГ) методом, сформулированным в [14] и разработанным в данной работе. Безусловно, последний также является методом наискорейшего спуска, отличаясь от традиционного его применения способом вычисления градиента функционала.

Градиент функционала J оптимизационной задачи представляется в виде

$$\nabla_{\beta} J = \frac{\partial J}{\partial \vec{P}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \beta},$$

где $\vec{P} = (u, v, \rho, p)$, а значения вариаций параметров течения по параметрам геометрии определяются из решения системы линейных дифференциальных уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} (\rho_{\beta})_t + \operatorname{div}(\rho \vec{u})_{\beta} &= 0, \\ ((\rho \vec{u})_{\beta})_t + ((\rho \vec{u})_{\beta} \nabla) \vec{u} + ((\rho \vec{u}) \nabla) \vec{u}_{\beta} + \nabla(p_{\beta}) &= 0, \\ \operatorname{div}[(e + p) \vec{u}]_{\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{u} = (u, v)$.

Краевыми условиями для системы (2) являются на контуре профиля решетки

$$\nabla L_{\beta} \vec{u} + \nabla L \vec{u}_{\beta} = 0 \quad (4)$$

и очевидные вариации граничных условий на остальных границах расчетной области.

При минимизации функционала для определения его градиента краевая задача (3) – (4) решается на каждом шаге этого алгоритма при постоянных (уже найденных при решении задачи (1) – (2)) значениях газодинамических характеристик

течения. Повышение эффективности основано на том, что время решения задачи (3) – (4) всегда меньше, чем в задаче (1) – (2). Отношение времени расчета градиента с помощью односторонних конечных разностей к аналогичному времени в предлагаемом методе равно $(1 + \lambda N_p)/(1 + N_p)$, а для центральных разностей, повышающих точность вычисления градиента, $(1 + \lambda N_p)/(1 + 2N_p)$, где N_p — число варьируемых переменных, а $\lambda = T_{34}/T_{12}$ — отношение времен в решениях задач (3) – (4) и (1) – (2) соответственно. Предельные значения возможного ускорения вычислений при расчете градиента функционала для этих случаев при $N_p \rightarrow \infty$ равны $1/\lambda$ и $2/\lambda$. Чем сложнее используемая физическая модель течения и соответствующая ей система дифференциальных уравнений, тем меньше значение λ и тем эффективней алгоритм.

Для нахождения численных решений этих задач (1) – (2) и (3) – (4) используются конечно-объемные схемы, расчетная сетка в физической области геометрически адаптивна к контуру профилей решетки и сгущена в их окрестности, в канонической области — она прямоугольная; число расчетных узлов — 272×40 . Интегрирование по времени проводится по методу Рунге — Кутты третьего порядка. Подробное тестирование данного алгоритма при решении задач до- и трансзвукового обтекания крыльевых профилей проведено в [15].

Задача оптимизации формулируется следующим образом.

Необходимо спроектировать форму профиля решетки, удовлетворяющую аэродинамическим ограничениям: $q_\infty = \text{const}$, $c_y = c_y^0$, $f(s) \geq f_0$, геометрическим — $c_{\min}^0 \leq c$, $c \leq c_{\max}^0$, $b = \text{const}$ и доставляющую максимум целевого функционала $J(\alpha, \vec{\beta}, \vec{g})$. Здесь $J(\alpha, \vec{\beta}, \vec{g}) = c_y/c_x$, $\vec{g} = (q_\infty, c_y^0, f_0, c_{\min}^0, c_{\max}^0)$, q_∞ — модуль скорости набегающего потока (в нормированных переменных — число Маха), α — угол атаки (в системе координат, связанной с направлением набегающего потока, α является одним из компонентов вектора параметров $\vec{\beta}$, задающих геометрию контура, но выделен из-за его большого влияния на функционал), c_y — коэффициент подъемной силы, c_x — коэффициент сопротивления, f_0 — константа, входящая в выбранный критерий безотрывности, s — длина дуги вдоль верхнего и нижнего контуров профиля, c_{\min}^0, c_{\max}^0 — нижняя и верхняя границы максимальной толщины профиля.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Следующие оптимизационные задачи:

1. $J(\alpha, \vec{\beta}, \vec{g}) \Rightarrow \max$, при $\vec{g} = (0,3, 0,5, -3, 4\%, 16\%)$,

2. $J(\alpha, \vec{\beta}, \vec{g}) \Rightarrow \max$, при $\vec{g} = (0,3, 0,8, -3, 4\%, 16\%)$ решались двумя методами. Варьируемые переменные — α, f, x_f, c .

Эффективность методов сравнивалась при одном и том же времени решения оптимизационной задачи T_N , равном времени решения задач (1) – (2) N раз. В расчетах N равнялось 50 и 100.

В табл. 1 — данные проведенных расчетов. Первая строка — номер задачи, вторая — T_N , третья–четвертая — метод и значение функционала. Видно, что во всех рассмотренных вариантах ВГ-метод позволяет получить более глубокий экстремум. В табл. 2 приведены начальное и оптимальные значения варьируемых

Значения функционала J

Таблица 1

Методы	Задачи			
	№ 1 (T_{50})	№ 1 (T_{100})	№ 2 (T_{50})	№ 2 (T_{100})
Наискорейшего спуска	34,4	41,9	20,3	63,0
Вариационно-градиентный	39,9	45,2	53,7	69,5

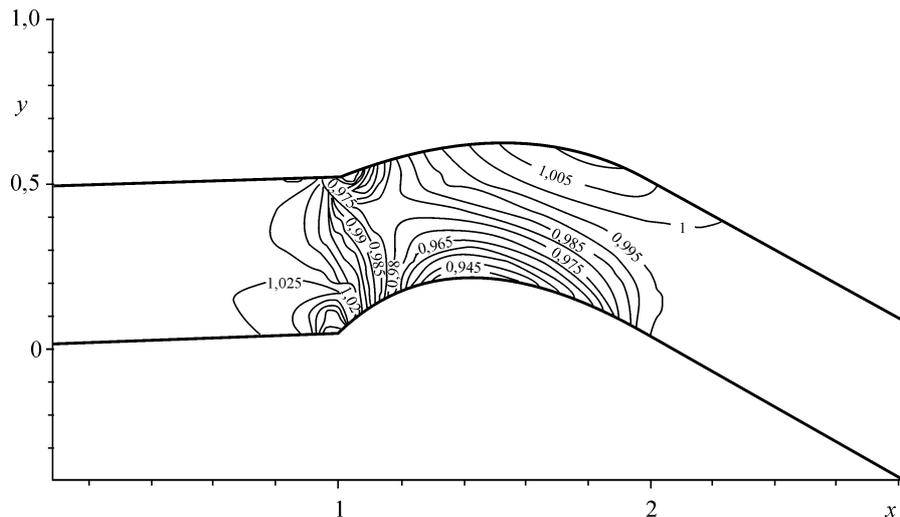
Таблица 2
Начальные и оптимальные значения варьируемых параметров и соответствующие им значения коэффициента подъемной силы и функционала

Задачи	T	α	x_f	f	c	c_y	J
№ 1–2	T_0	0,00	0,500	0,000	0,600	0,00	00,0
	T_{50}	1,21	0,483	0,138	0,464	0,491	39,9
№ 1	T_{100}	2,48	0,479	0,126	0,455	0,498	45,2
	T_{50}	14,8	0,532	0,187	0,600	0,802	53,7
№ 2	T_{100}	15,2	0,486	0,174	0,420	0,797	69,5

переменных для ВГ-метода для различных T_N . Здесь можно отметить характерную для поиска оптимальной формы профиля “игру” между углом атаки и кривизной профиля для уменьшения значения c_x при заданном ограничении на c_y — на временном отрезке между T_{50} и T_{100} происходит, например, увеличение α и уменьшение f .

На рис. 1 и 2 представлены изолинии давлений в расчетной области, а на рис. 3 и 4 — формы профилей и распределения коэффициентов давления по верхней и нижней поверхностям оптимальных профилей решеток для задач № 1 и № 2 при $T = T_{100}$, полученных ВГ-методом.

Также необходимо отметить, что для сокращения времени решения оптимизационной задачи в обоих методах при решении уравнений в качестве начального приближения для 2-го и всех последующих расчетов брались установившиеся

Рис. 1. Изолинии давления в межлопаточной области для решетки, являющейся решением задачи № 1, $N = 100$.

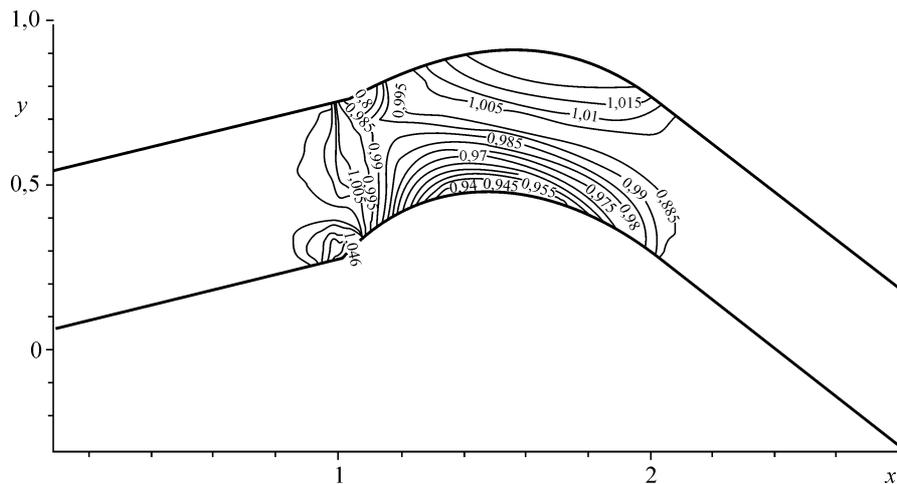


Рис. 2. Изолинии давления в межлопаточной области для решетки, являющейся решением задачи № 2, $N = 100$.

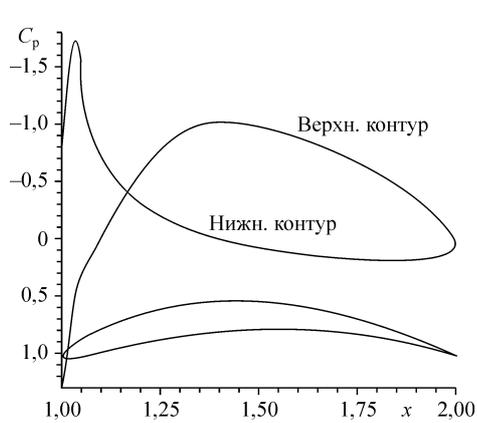


Рис. 3. Распределение коэффициента давления по верхнему и нижнему контурам профиля решетки, являющейся решением задачи № 1, $N = 100$.

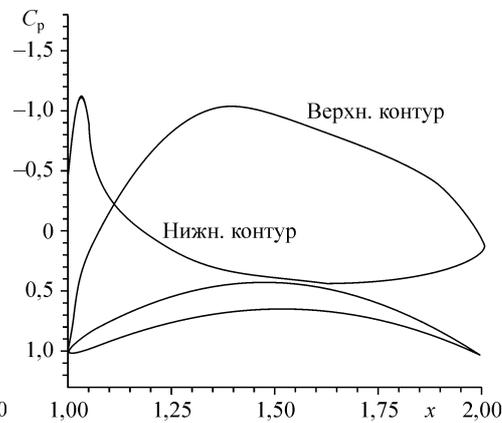


Рис. 4. Распределение коэффициента давления по верхнему и нижнему контурам профиля решетки, являющейся решением задачи № 2, $N = 100$.

поля, полученные на предыдущем оптимизационном шаге. Это позволило сэкономить около 30 % времени счета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан и применен для решения задач оптимизации формы решеток профилей метод, названный вариационно-градиентным и основанный на вычислении градиента функционала оптимизационной задачи с использованием значений вариаций параметров течения по переменным проектирования, определяемых из системы уравнений газовой динамики в вариациях. Проведено тестовое сравнение эффективности этого метода с традиционным (градиентным), в котором градиент функционала вычисляется с помощью конечных разностей при решении конкретных задач оптимизации профилей решеток. Получено существенное ускорение процесса поиска экстремума. С увеличением числа варьируемых переменных отмеченная эффективность будет расти.

Необходимо отметить, что при сохранении характерной для градиентных методов большой зависимости результата от выбора начальной точки и вероятности схождения решения к локальному экстремуму для задач с большим числом переменных предпочтительней оказываются недетерминированные методы, позволяющие достичь глобального экстремума. Имеет смысл использовать предложенный подход для быстрого получения предварительного решения с его последующим уточнением, поскольку применение неградиентных методов поиска экстремума из произвольной начальной точки, как правило, требует значительного количества вычислений функционала, что при итерационных методах решения уравнений движения сопряжено с очень большими временными затратами.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.Б. Курзину и А.Ф. Латыпову за полезные обсуждения данной тематики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1962. — 512 с.
2. Степанов Г.Ю. Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. Мех. жидк. и газа. — 1993. — № 4. — С. 30–42.
3. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1994. — 436 с.
4. Батяев Е.А., Курзин В.Б., Чернышева О.В. Обратная задача аэродинамики двойной решетки осевого вентилятора // Теплофизика и аэромеханика. — 1998. — Т. 5, № 2. — С. 167–174.
5. Батяев Е.А. Аэродинамическое проектирование регулируемых сдвоенных решеток осевых вентиляторов // Теплофизика и аэромеханика. — 2000. — Т. 7, № 2. — С. 209–215.
6. Батяев Е.А., Курзин В.Б. Аэродинамическое проектирование и оптимизация решеток тонких лопастей методом решения обратных задач // Аннот. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механике. — Пермь. — 2001. — С. 82.
7. Грязин Ю.А., Черный С.Г., Шаров С.В., Шашкин П.А. Об одном методе численного решения трехмерных задач динамики несжимаемой жидкости // Докл. РАН. — 1997. — Т. 353, № 4. — С. 478–483.
8. Cherny S.G., Sharov S.V., Skorospelov V.A., Turuk P.A. Methods for three-dimensional flows computation in hydraulic turbines // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2003. — Vol. 18, No. 2. — P. 87–104.
9. Skorospelov V.A., Turuk P.A., Aulchenko S.M., Latypov A.F., Nikulichev Yu.V., Lapin V.N., Chirkov D.V., Cherny S.G. Solution of the 3d problem of the aerohydrodynamic shape of turbine components // Proc. of the Intern. conf. on the methods of aerophys. res., Novosibirsk, 28 June–2 July 2004. — Novosibirsk: Inst. theor. and appl. mech., 2004. — Pt 2. — P. 172–178.
10. Skorospelov В.А., Турук П.А., Аульченко С.М., Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В., Лапин В.Н., Чирков Д.В., Черный С.Г. Численная оптимизация формы лопаток решеток турбомашин // Тез. докл. 62-й Науч.-техн. конф. НГАСУ, Новосибирск, 6-7 апреля 2005. — Новосибирск: НГАСУ, 2005. — С. 46.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
12. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Опыт оптимизации аэродинамических характеристик эксплуатируемых крыльевых профилей // ПМТФ. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 60–64.
13. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 550 с.
14. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф. Об одном подходе к решению задач оптимизации лопастей решеток турбомашин // Краевые задачи и математическое моделирование: Сб. тр. 7-й Всеросс. науч. конф. — Новокузнецк: НФИ Кемер. ГУ, 2004. — С. 3–4.
15. Аульченко С.М., Замураев В.П., Калинина А.П., Латыпов А.Ф. Управление трансзвуковым обтеканием крыловых профилей посредством локального импульсного подвода энергии // ПМТФ. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 62–67.

Статья поступила в редакцию 31 мая 2005 г.