УДК 532.592.2; 517.958

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучаются простые волны системы уравнений, описывающей в приближении теории мелкой воды трехмерные волновые движения завихренной жидкости в слое со свободной границей. В общем случае выведены уравнения простых волн и доказана теорема существования нестационарной либо стационарной простой волны, непрерывно примыкающей к заданному стационарному сдвиговому потоку по характеристической поверхности. Найдены точные решения уравнений стационарных простых волн, которые можно рассматривать как обобщения волн Прандтля — Мейера на случай потоков со сдвигом скорости по вертикали. Для течений без сдвига скорости получено общее решение системы уравнений, описывающей нестационарные пространственные простые волны.

1. Постановка задачи. Рассматриваются уравнения длинноволнового приближения

$$\begin{gathered} u_t + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)u + p_x/\rho = 0, \qquad v_t + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)v + p_y/\rho = 0, \\ p_z/\rho = -g, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

описывающие нестационарные трехмерные движения идеальной несжимаемой жидкости. Модель (1.1) получается из точных уравнений Эйлера в длинноволновом пределе $\varepsilon = H_0/L_0 \to 0$ (H_0 — характерный вертикальный масштаб; L_0 — характерный горизонтальный масштаб). Здесь $\boldsymbol{U} = (u, v, w)$ — вектор скорости жидкости; p — давление; g — ускорение свободного падения; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность жидкости; x, y, z — декартовы координаты в пространстве; t — время. В данной работе в основном изучается задача со свободной границей для системы (1.1), описывающая волновые движения жидкости в слое $0 \leqslant z \leqslant h(t, x, y)$, где h — глубина жидкого слоя. Сформулируем краевые условия задачи. На ровном дне $z = 0$ выполняется граничное условие $w = 0$, а на свободной поверхности — динамическое условие $p = p_0 = \mathrm{const}$. Кинематическое условие на свободной границе удобно записать в следующем виде:

$$h_t + \operatorname{div}\Big(\int\limits_0^h \boldsymbol{u}\,dz\Big) = 0,$$

где $\boldsymbol{u} = (u, v)$ — проекция вектора скорости на плоскость, ортогональную оси z. Из третьего уравнения системы вытекает гидростатический закон распределения давления по глубине

$$p = p_0 + \rho g(h - z).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (код проекта Е00-4.0-61), Международного фонда INTAS (код проекта 01-868) и СО РАН (Интеграционный проект № 1).

Вектор вихря $\boldsymbol{\Omega} = (-v_z, u_z, v_x - u_y)$ в рассматриваемой приближенной теории удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{\Omega}_t + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}.$$

Уравнения для первых двух компонент $\boldsymbol{\Omega}$ можно записать в виде

$$-v_{zt} - (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)v_z + v_z u_x - u_z v_x = 0, \quad u_{zt} - (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)u_z + v_z u_y - u_z v_y = 0. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что если при $t = 0$ выполняются равенства $u_z = 0, v_z = 0$, то $u_z = 0, v_z = 0$ при всех значениях $t > 0$. При этом система (1.1) сводится к классическим уравнениям теории мелкой воды

$$u_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u + gh_x = 0, \qquad v_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)v + gh_x = 0,$$
$$h_t + \operatorname{div}(h\boldsymbol{u}) = 0, \qquad w = -z(u_x + v_y),$$

описывающим течения без сдвига скорости по вертикали (u и v не зависят от переменной z). Однако в общем случае профили скорости по вертикали могут быть достаточно произвольными. В дальнейшем сдвиговыми течениями будем называть класс решений уравнений (1.1), характеризуемых неравенством $u_z^2 + v_z^2 \neq 0$. Частное решение уравнений (1.1), в котором искомые функции не зависят от x, y, t:

$$u = u_0(z), \qquad v = v_0(z), \qquad w = 0, \qquad p = -\rho g z + \mathrm{const},$$

будем называть равномерным сдвиговым потоком. При анализе сдвиговых течений удобно преобразовать уравнения (1.1) к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным t', x', y', λ. Замена переменных

$$x = x', \qquad y = y', \qquad t = t', \qquad z = \Phi(t', x', y', \lambda)$$

осуществляется с помощью функции Φ — решения задачи Коши:

$$\Phi_t + u(t,x,y,\Phi)\Phi_x + v(t,x,y,\Phi)\Phi_y = w(t,x,y,\Phi), \qquad \Phi\big|_{t=0} = \Phi_0(x,y,\lambda).$$

Начальная функция $\Phi_0(x,y,\lambda)$ выбирается так, что $\Phi_0(x,y,0) = 0$, $\Phi_0(x,y,1) = h_0(x,y) = h(0,x,y)$. Здесь λ — лагранжева координата, нумерующая материальные поверхности. Из приведенного выше уравнения следует, что $\Phi(t,x,y,0) = 0$, а $\Phi(t,x,y,1) = h(t,x,y)$. Поэтому в пространстве новых переменных области, занятой жидкостью, соответствует фиксированный слой $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Уравнения движения жидкости в эйлерово-лагранжевых переменных имеют вид

$$u_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + g\nabla h = 0, \qquad H_t + \operatorname{div}(H\boldsymbol{u}) = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $H = \Phi_\lambda \neq 0$ — якобиан перехода к новым переменным; штрихи в обозначениях независимых переменных опущены; операции ∇ и div выполняются по переменным x, y. Функции Φ, w и h связаны с вектором $\boldsymbol{u}$ и H соотношениями

$$\Phi = \int_0^\lambda H\,d\nu, \qquad w = \Phi_t + u\Phi_x + v\Phi_y, \qquad h = \int_0^1 H\,d\lambda.$$

В новых переменных сдвиговые течения характеризуются неравенством $u_\lambda^2 + v_\lambda^2 \neq 0$.

Частные решения вида $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\alpha,\lambda)$, $H = H(\alpha,\lambda)$, где $\alpha = \alpha(t,x,y)$, будем называть простыми волнами системы (1.5). В эйлеровых координатах им соответствуют решения системы (1.1), удовлетворяющие равенствам

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\alpha, z), \qquad h = h(\alpha).$$

На этих решениях вертикальная компонента вектора скорости задается соотношением

$$w = -\int_0^z \boldsymbol{u}_\alpha(\alpha, z')dz' \cdot \nabla\alpha.$$

Из (1.3) получаем уравнения, определяющие простые волны:

$$\boldsymbol{u}_\alpha \frac{d\alpha}{dt} + gh_\alpha \nabla\alpha = 0, \qquad H_\alpha \frac{d\alpha}{dt} + H(\boldsymbol{u}_\alpha \cdot \nabla\alpha) = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $d\alpha/dt = \alpha_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\alpha$. Целью дальнейшего изложения является доказательство существования пространственных простых волн, распространяющихся на произвольном равномерном сдвиговом потоке, отыскание новых точных решений в этом классе и построение общего решения уравнений простых волн в классе течений без сдвига скорости. Отметим, что ранее изучались в основном плоскопараллельные течения. Так, для плоскопараллельных течений вихревой мелкой воды вопросы существования решений изучались в работах [1, 2]. Ряд точных решений, описывающих распространение простых волн на плоскопараллельном сдвиговом потоке, найден в [1, 3–9]. Некоторые свойства пространственных простых волн системы уравнений газовой динамики проанализированы в [10].

2. Преобразование уравнений простых волн. Умножим первое уравнение системы (1.4) на $\boldsymbol{u}_\alpha$, а затем исключим $\boldsymbol{u}_\alpha \cdot \nabla\alpha$, используя второе уравнение. Предполагая, что $d\alpha/dt \neq 0$, получим равенство

$$(\boldsymbol{u}_\alpha)^2 = gh_\alpha H_\alpha / H. \tag{2.1}$$

Из уравнений (1.4) можно выразить производные функции α

$$\nabla\alpha = -\frac{1}{gh_\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \boldsymbol{u}_\alpha = L\boldsymbol{u}_\alpha,$$

$$\alpha_t = -\boldsymbol{u} \cdot \nabla\alpha - (H_\alpha/H)\boldsymbol{u}_\alpha \cdot \nabla\alpha = -L(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha)$$

и установить, что отношение

$$\boldsymbol{u}_\alpha/(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha) = -\nabla\alpha/\alpha_t \tag{2.2}$$

не зависит от λ (выражение в правой части равенства (2.2) является функцией переменных t, x, y). Поэтому полагаем

$$\boldsymbol{u}_\alpha/(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha) = \boldsymbol{n}(\alpha)/k(\alpha), \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{n}(\alpha)$ — заданный вектор единичной длины; $k(\alpha)$ — искомая функция. Из (2.2) вытекает, что вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален поверхности $\alpha = \mathrm{const}$, а k является скоростью движения поверхности $\alpha = \mathrm{const}$ в направлении нормали. Используя следствие уравнений (2.3)

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_\alpha = u_n(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha)/k,$$

преобразуем уравнения (2.1), (2.3) к следующему виду:

$$\boldsymbol{u}_\alpha = -gh_\alpha \boldsymbol{n}/(u_n - k), \qquad H_\alpha = gh_\alpha H/(u_n - k)^2. \tag{2.4}$$

Здесь $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$. Отметим, что в работе [11] (см. также [2]) предложено обобщение теории характеристик для систем с операторными коэффициентами, позволяющее найти, в частности, характеристические поверхности интегродифференциальных уравнений (1.3). Если последнее уравнение проинтегрировать по переменной λ, то возникает характеристическое уравнение

$$1 = g\int_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u_n - k)^2}, \tag{2.5}$$

из которого следует, что каждая поверхность $\alpha = \text{const}$ является характеристической поверхностью системы (1.3). Анализируя поведение функции переменной k, стоящей в правой части равенства (2.5), легко установить, что существует два действительных корня характеристического уравнения k_1, k_2, удовлетворяющих неравенствам $k_1 < \min u_n$, $k_2 > \max u_n$ (здесь минимум и максимум функции u_n вычисляются по отношению к переменной λ). Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться простые волны, соответствующие первому или второму характеристическому семейству. Уравнения (2.4) по форме сходны с уравнениями простых волн в сдвиговом плоскопараллельном течении [1]. Отметим, что если выбрать $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 = \text{const}$ и положить $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{n}_0$, то уравнения (2.4), (2.5) перейдут в уравнения простых волн плоскопараллельного течения. В общем пространственном случае удобно ввести нормальную u_n и касательную u_τ по отношению к фронту простой волны компоненты вектора скорости

$$\boldsymbol{u} = u_n\boldsymbol{n} + u_\tau\boldsymbol{\tau}. \tag{2.6}$$

Здесь $\boldsymbol{n} = (\cos\beta, \sin\beta)$; $\boldsymbol{\tau} = (-\sin\beta, \cos\beta)$; $\beta = \beta(\alpha)$ — заданная функция.

Дифференцируя (2.6) по переменной α, получаем разложение производной

$$\boldsymbol{u}_\alpha = ((u_n)_\alpha - (\beta')u_\tau)\boldsymbol{n} + ((u_\tau)_\alpha + \beta' u_n)\boldsymbol{\tau} \tag{2.7}$$

по базису $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$. С помощью разложения (2.7) уравнения (2.4), (2.5) преобразуются к следующему виду:

$$(u_n)_\alpha + \frac{gh_\alpha}{u_n - k} - \beta' u_\tau = 0, \quad (u_\tau)_\alpha + \beta' u_n = 0, \quad H_\alpha = \frac{gh_\alpha H}{(u_n - k)^2}. \tag{2.8}$$

Комбинируя первые два уравнения системы (2.8), получаем уравнение второго порядка для неизвестной u_n

$$\Big(\frac{1}{\beta'}\Big((u_n)_\alpha + \frac{gh_\alpha}{u_n - k}\Big)\Big)_\alpha + \beta' u_n = 0. \tag{2.9}$$

Интегродифференциальные уравнения (2.5), (2.8) служат для определения вектора скорости $\boldsymbol{u}$ и величины H как функций переменных α и λ. Выпишем уравнения, из которых можно найти функцию $\alpha(t, x, y)$. На поверхности $\alpha = \text{const}$ справедливо равенство

$$\alpha_t dt + \nabla\alpha \cdot d\boldsymbol{x} = 0,$$

из которого в силу (2.2), (2.3) следует соотношение

$$\boldsymbol{n}(\alpha) \cdot d\boldsymbol{x} - k(\alpha)\, dt = 0. \tag{2.10}$$

Так как коэффициенты дифференциальной формы постоянны на поверхности $\alpha = \text{const}$, равенство (2.10) можно проинтегрировать:

$$\boldsymbol{n}(\alpha) \cdot \boldsymbol{x} - k(\alpha)t = m(\alpha). \tag{2.11}$$

Здесь $m(\alpha)$ — произвольная функция. Функцию $\alpha(t, x, y)$ можно найти из уравнения (2.11), если $m(\alpha)$ фиксирована. Вместо (2.11) можно также использовать следующее уравнение:

$$\boldsymbol{u}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}/(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha) - t = m(\alpha). \tag{2.12}$$

Покажем, что если зафиксировать произвольные функции $\beta(\alpha)$, $m(\alpha)$, проинтегрировать уравнения (2.8), а затем определить $\alpha(t, x, y)$ из (2.11), то найденные функции $\boldsymbol{u}, H, \alpha$ будут удовлетворять уравнениям (1.4). При этом необходимо предполагать, что выполнено неравенство $\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - k'(\alpha)t - m'(\alpha) \neq 0$, позволяющее применить теорему о неявной функции к уравнению (2.11) и локально найти $\alpha(t, x, y)$.

Продифференцируем (2.11) по переменным $\boldsymbol{x}, t$:

$$(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - k'(\alpha)t - m'(\alpha))\nabla\alpha + \boldsymbol{n} = 0, \quad (\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - k'(\alpha)t - m'(\alpha))\alpha_t - k = 0. \tag{2.13}$$

Используя уравнения (2.8) и их следствия (2.4), из (2.13) получим соотношения

$$\nabla\alpha = L_1\boldsymbol{u}_\alpha, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \alpha_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\alpha = -gL_1h_\alpha, \tag{2.14}$$

где $L_1 = -k(\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}-k'(\alpha)t-m'(\alpha))^{-1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+gh_\alpha)^{-1}$. Следствием (2.14), очевидно, являются равенства

$$\boldsymbol{u}_\alpha\frac{d\alpha}{dt} + gh_\alpha\nabla\alpha = 0, \qquad H_\alpha\frac{d\alpha}{dt} + H\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla\alpha = L_1(-gH_\alpha h_\alpha + \boldsymbol{u}_\alpha^2) = 0.$$

Таким образом, $\boldsymbol{u}, H, \alpha$ удовлетворяют (1.4). Отметим, что из (2.14) вытекает потенциальность вектора $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u}(\alpha,\lambda) = \nabla\phi(x,y,\lambda) \tag{2.15}$$

(потенциал существует в силу того, что $u_\alpha\alpha_y - v_\alpha\alpha_x = 0$). Следует заметить также, что потенциал ϕ задается формулой

$$\phi = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} - \Big(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + gh\Big)t - \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha)(\alpha',\lambda)m(\alpha')\,d\alpha'. \tag{2.16}$$

Действительно, соотношение (2.15) является следствием продифференцированного по $\boldsymbol{x}$ равенства (2.16) и соотношения (2.12). Дифференцируя (2.16) по t и используя (2.12), получим аналог интеграла Коши — Лагранжа

$$\phi_t = -|\boldsymbol{u}|^2/2 - gh.$$

Вектор $\boldsymbol{u}$ не является потенциальным в переменных Эйлера. Равенство $u_y(\alpha,\lambda) - v_x(\alpha,\lambda) = 0$ при преобразовании переменных переходит в равенство

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали в трехмерном пространстве (x,y,z) к поверхности $\lambda = \mathrm{const}$. Следовательно, простая волна в эйлеровых переменных характеризуется обращением в нуль нормальной компоненты вихря на выделенном семействе материальных поверхностей. В силу теорем Гельмгольца равенство нулю нормальной компоненты вихря сохраняется в процессе движения, если оно выполнялось при $t = 0$.

В дальнейшем вместо конечного соотношения (2.5) удобнее использовать эквивалентное ему дифференциальное уравнение. Для его получения продифференцируем (2.5) по α и воспользуемся уравнениями (2.8). В результате получим

$$k_\alpha = -\Big(2\int\limits_0^1\frac{H\,d\lambda}{(u_n-k)^3}\Big)^{-1}\Big(3gh_\alpha\int\limits_0^1\frac{H\,d\lambda}{(u_n-k)^4} + 2\beta'\int\limits_0^1\frac{Hu_\tau\,d\lambda}{(u_n-k)^3}\Big). \tag{2.17}$$

Если данные Коши для (2.17) выбраны так, что (2.5) выполнено на начальной поверхности, то равенство (2.5) является следствием (2.8), (2.17) при всех значениях α.

В итоге построение простой волны сводится к интегрированию системы интегродифференциальных уравнений (2.8), (2.17). Если функции u_n, u_τ, H, k найдены, то $\boldsymbol{u}$ определяется по формуле (2.6), а $\alpha(t,x,y)$ находится из уравнения (2.11).

3. Простые волны на пространственном течении без сдвига скорости. Достаточно легко уравнения простых волн интегрируются в классе течений без сдвига скорости по вертикали, когда $u_\lambda = v_\lambda = 0$. В этом случае характеристическое уравнение (2.5) записывается в виде

$$(u_n - k)^2 = gh,$$

и в области определения простой волны $u_n - k = \pm\sqrt{gh}$. В данном пункте будем предполагать, что $\alpha(t,x,y) = h(t,x,y)$. Интегрируя уравнение (2.4), находим

$$\boldsymbol{u}(h) = \mp \int\limits_{h_0}^{h} \sqrt{g/h'}(\cos\beta(h'), \sin\beta(h'))\, dh' + \boldsymbol{u}_0.$$

Здесь $h_0 = \mathrm{const}$; $\boldsymbol{u}_0$ — произвольный постоянный вектор. Аналогичное выражение получается при интегрировании уравнения (2.9). Будем предполагать, что функция $\beta = \beta(h)$ является монотонной и, следовательно, эту зависимость можно обратить: $h = h(\beta)$. С учетом этого (2.9) можно записать в виде

$$(u_n \pm 2\sqrt{gh})_{\beta\beta} + (u_n \pm 2\sqrt{gh}) = \pm 2\sqrt{gh}. \tag{3.1}$$

Заметим, что величины $u_n \pm 2\sqrt{gh}$ с точностью до замены $u_n \to u$ совпадают с инвариантами Римана, используемыми при анализе плоскопараллельных течений. Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$u_n \pm 2\sqrt{gh} = \Bigl(A_0 \pm 2\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{gh(\beta')}\cos\beta'\, d\beta'\Bigr)\sin\beta + \Bigl(B_0 \mp 2\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{gh(\beta')}\sin\beta'\, d\beta'\Bigr)\cos\beta, \tag{3.2}$$

где A_0, B_0 — произвольные постоянные. Из (2.8) находим

$$u_\tau = (u_n \pm 2\sqrt{gh})_\beta = \Bigl(A_0 \pm 2\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{gh(\beta')}\cos\beta'\, d\beta'\Bigr)\cos\beta - \\ - \Bigl(B_0 \mp 2\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{gh(\beta')}\sin\beta'\, d\beta'\Bigr)\sin\beta. \tag{3.3}$$

Формулы (3.2), (3.3) полностью определяют (при соответствующем выборе произвольных постоянных) вектор скорости

$$\boldsymbol{u}(h) = (u_n\cos\beta - u_\tau\sin\beta, u_n\sin\beta + u_\tau\cos\beta) = \\ = \mp 2\sqrt{gh}(\cos\beta(h), \sin\beta(h)) \mp \Bigl(\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{gh(\beta')}\sin\beta'\, d\beta', -\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{gh(\beta')}\cos\beta'\, d\beta'\Bigr) + (B_0, A_0)$$

в простой волне, примыкающей к заданному постоянному потоку глубины $h = h_0$, движущемуся со скоростью $\boldsymbol{u}(h_0)$ (на поверхности примыкания $\beta = \beta_0$).

Функция h находится из уравнения

$$\cos\beta(h)x + \sin\beta(h)y - (u_n \pm \sqrt{gh})t = m(h),$$

где $m(h)$ — произвольная функция. Заметим, что следствием соотношений (2.2), (2.3) является дифференциальное уравнение

$$h_t + (u_n \pm \sqrt{gh})(\cos\beta h_x + \sin\beta h_y) = 0, \tag{3.4}$$

которому должна удовлетворять функция $h(t,x,y)$. Поэтому нахождение h сводится к решению задачи Коши

$$h\big|_{t=0} = h_0(x,y)$$

для уравнения (3.4) со специальными начальными данными. Начальную функцию $h_0(x,y)$ следует выбирать из решений уравнения

$$-\sin\beta(h_0)h_{0x} + \cos\beta(h_0)h_{0y} = 0.$$

При таком выборе линии уровня $h_0(x,y)$ будут прямыми, а поверхности уровня $h(t,x,y)$ — плоскостями.

В итоге показано, что общее решение уравнений пространственных простых волн, распространяющихся на потоке без сдвига скорости, зависит от двух произвольных функций одного аргумента $\beta(h)$ и $m(h)$.

4. Существование нестационарной простой волны, распространяющейся на сдвиговом потоке. Выберем функцию $\alpha(t,x,y) = h(t,x,y)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered}(u_n)_h = -g/(u_n-k) + \beta' u_\tau, \qquad (u_\tau)_h = -\beta' u_n, \qquad H_h = gH/(u_n-k)^2, \\ k_h = -\Big(2\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u_n-k)^3}\Big)^{-1}\Big(3g\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u_n-k)^4} + 2\beta'\int\limits_0^1 \frac{Hu_\tau\,d\lambda}{(u_n-k)^3}\Big), \\ u_n\big|_{h=h_0} = \boldsymbol{u}_0(\lambda)\boldsymbol{n}(h_0), \quad u_\tau\big|_{h=h_0} = \boldsymbol{u}_0(\lambda)\boldsymbol{\tau}(h_0), \quad H\big|_{h=h_0} = H_0(\lambda), \quad k\big|_{h=h_0} = k_0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{u}_0(\lambda), H_0(\lambda)$ — заданные функции; k_0 — корень уравнения (2.5), вычисленный при $h = h_0$ с использованием данных Коши. Функции $\beta(h)$, а следовательно, и $\boldsymbol{n}(h) = (\cos\beta(h), \sin\beta(h)), \boldsymbol{\tau}(h) = (-\sin\beta(h), \cos\beta(h))$ считаются известными; предполагается, что функция $\beta(h)$ является дважды дифференцируемой. Данные Коши в (4.1) обеспечивают непрерывное примыкание простой волны к заданному равномерному сдвиговому потоку постоянной глубины $h = h_0$, имеющему скорость $\boldsymbol{u}_0(\lambda)$.

При доказательстве существования решения задачи (4.1) будем предполагать, что функции $\boldsymbol{u}_0(\lambda), H_0(\lambda)$ являются непрерывно дифференцируемыми при $\lambda \in [0,1]$, $|\boldsymbol{u}_0(\lambda)\cdot\boldsymbol{n}(h_0) - k_0| > \delta > 0$, $|H_0| > \delta > 0$, где δ — постоянная. Уравнения простых волн (4.1) являются интегродифференциальными, поэтому при доказательстве существования решения задачи Коши будем использовать следующую теорему теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [12].

Задача Коши

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dh} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}), \qquad \boldsymbol{V}\big|_{h=h_0} = \boldsymbol{V}_0 \tag{4.2}$$

имеет единственное решение, определенное при $|h-h_0| < \min(\varepsilon M^{-1}, K^{-1})$ и принадлежащее шару $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \varepsilon$ банахова пространства B, если на этом шаре нелинейный оператор $\boldsymbol{F}$ удовлетворяет неравенствам

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})\| < M, \qquad \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_2)\| \leqslant K\|\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2\|. \tag{4.3}$$

Так как нас интересуют дифференцируемые по λ решения, продолжим уравнения (4.1) на производные $u_{n\lambda}, u_{\tau\lambda}$:

$$\begin{gathered}(u_{n\lambda})_h = gu_{n\lambda}/((u_n-k)^2) + \beta' u_{\tau\lambda}, \qquad (u_{\tau\lambda})_h = -\beta' u_{n\lambda}, \\ u_{n\lambda}\big|_{h=h_0} = \boldsymbol{u}_0'(\lambda)\boldsymbol{n}(h_0), \qquad u_{\tau\lambda}\big|_{h=h_0} = \boldsymbol{u}_0'(\lambda)\boldsymbol{\tau}(h_0).\end{gathered} \tag{4.4}$$

Введем банахово пространство B элементов $\boldsymbol{V} = (u_n, u_{n\lambda}, u_\tau, u_{\tau\lambda}, H, k)$ с нормой

$$\|\boldsymbol{V}\| = \max_\lambda |u_n| + \max_\lambda |u_{n\lambda}| + \max_\lambda |u_\tau| + \max_\lambda |u_{\tau\lambda}| + \max_\lambda |H| + |k|,$$

где $\lambda \in [0,1]$. Пусть $\boldsymbol{V}_0 \in B$ — вектор начальных данных задачи (4.1), (4.4). Рассмотрим шар $\|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| < \delta/2$. Для элементов этого шара $|u_n - k| > \delta/2$, $|H| > \delta/2$. Действительно,

$$|u_n - k| = |u_{n0} - k_0 + u_n - u_{n0} + k_0 - k| \geqslant |u_{n0} - k_0| - \|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| > \delta/2,$$

$$|H| = |H_0 + H - H_0| \geqslant |H_0| - \|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_0\| > \delta/2.$$

С учетом этих неравенств легко показать, что правые части уравнений (4.1), (4.4) удовлетворяют неравенствам вида (4.3) с некоторыми $M = M(\delta)$, $K = K(\delta)$. Тогда на основании сформулированной выше теоремы задача (4.1), (4.4) имеет единственное решение при $|h - h_0| < \delta_1(\delta)$.

Для завершения построения простой волны нужно найти функцию $h(t,x,y)$ из уравнения

$$\boldsymbol{n}(h)\boldsymbol{x} - k(h)t = m(h). \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что поверхности уровня $h = \mathrm{const}$ являются плоскостями в пространстве (x,y,t). Так как в общем случае эти плоскости не параллельны, то в точках пересечения плоскостей однозначное определение h невозможно. Поэтому решение типа простой волны можно построить только локально в подобластях пространства (x,y,t), не содержащих точек пересечения указанных плоскостей.

5. Простые волны на стационарном сдвиговом течении. Рассмотрим простую волну, распространяющуюся на установившемся сдвиговом течении. В этом случае уравнение (2.1) также выполняется, но $\alpha = \alpha(x,y)$. Используя соотношения

$$\nabla\alpha = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\alpha\boldsymbol{u}_\alpha/(gh_\alpha) = L\boldsymbol{u}_\alpha,$$

$$0 = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\alpha - (H/H_\alpha)\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla\alpha = -L(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + gh_\alpha)$$

(аналогично п. **2**), получаем дифференциальные уравнения

$$\boldsymbol{u}_\alpha = -gh_\alpha\boldsymbol{n}/u_n, \qquad H_\alpha = gh_\alpha H/u_n^2, \tag{5.1}$$

где $u_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{n} = (-\sin\gamma, \cos\gamma)$; $\gamma = \gamma(\alpha)$ — искомая (а не заданная, как в нестационарном случае) функция. Эта функция находится с использованием характеристического уравнения

$$1 = g\int_0^1 \frac{H\,d\lambda}{u_n^2}. \tag{5.2}$$

По определению $\gamma(\alpha)$ задает в плоскости (x,y) угол между осью x и направлением характеристики $\alpha = \mathrm{const}$. Далее будет уточнено, какое из двух возможных значений угла будет обозначаться через $\gamma(\alpha)$. Введем в плоскости годографа полярные координаты q, θ с помощью соотношения $\boldsymbol{u} = q(\cos\theta, \sin\theta)$ и положим $\alpha(x,y) = h(x,y)$. Преобразуем к новым переменным уравнения (5.1):

$$qq_h + g = 0, \qquad \theta_h = -g\,\mathrm{ctg}\,(\theta - \gamma)/q^2, \qquad H_h = gH/(q^2\sin^2(\theta-\gamma)) \tag{5.3}$$

и характеристическое уравнение (5.2):

$$\chi(\gamma) = 1 - g\int_0^1 \frac{H\,d\lambda}{q^2\sin^2(\theta-\gamma)} = 0. \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что функция $\chi(\gamma)$ является периодической: $\chi(\gamma) = \chi(\gamma + \pi)$. Отметим, что углам γ и $\gamma + \pi$ соответствуют нормали к одной и той же характеристической поверхности, различающиеся знаком. Поэтому нас в дальнейшем будут интересовать корни γ характеристического уравнения, различающиеся по модулю π. Функция χ определена на подмножестве действительной оси, состоящем из дополнения к отрезкам $[\theta_{\min}(h) + l\pi, \theta_{\max}(h) + l\pi]$, где l — любое целое число (отрезки получаются сдвигом на $l\pi$ области значений функции $\theta(h, \lambda)$ при фиксированном h и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). Область определения не пуста, когда $\theta_{\max}(h) - \theta_{\min}(h) < \pi$. В последнем случае условимся выбирать угол γ так, чтобы удовлетворялось неравенство $|(\theta_{\max} + \theta_{\min})/2 - \gamma| < \pi/2$. С учетом этого достаточно изучить поведение функции $\chi(\gamma)$ на отрезках $[\theta_{\max} - \pi, \theta_{\min}]$, $[\theta_{\max}, \theta_{\min} + \pi]$. Эта функция непрерывна, принимает конечные значения во внутренних точках указанных отрезков и стремится к $-\infty$ при стремлении γ к концам отрезков. Поэтому $\chi(\gamma)$ принимает максимальное значение в некоторой внутренней точке $\gamma = \gamma_*(h)$ отрезка $[\theta_{\max} - \pi, \theta_{\min}]$. В силу того что отрезок $[\theta_{\max}, \theta_{\min} + \pi]$ получается из $[\theta_{\max} - \pi, \theta_{\min}]$ сдвигом на π, $\chi(\gamma)$ принимает максимальное значение в точке $\gamma_* + \pi$ этого отрезка. Непосредственное вычисление производных приводит к неравенству

$$\chi''(\gamma) = -2g \int_0^1 \frac{H(1 + 2\sin^2(\theta - \gamma))\, d\lambda}{q^2 \sin^4(\theta - \gamma)} < 0,$$

тогда $\chi'(\gamma) < 0$ при $\gamma \in (\gamma_*, \theta_{\min})$ и $\chi'(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (\theta_{\max}, \gamma_* + \pi)$. Из перечисленных свойств следует, что если $\chi(\gamma_*) = \chi(\gamma_* + \pi) > 0$, то уравнение (5.4) имеет только два различных (по модулю π) корня γ_1, γ_2, удовлетворяющих неравенствам $\gamma_* < \gamma_1 < \theta_{\min}$, $\theta_{\max} < \gamma_2 < \gamma_* + \pi$. В случае, когда $\chi(\gamma_*) = \chi(\gamma_* + \pi) < 0$, уравнение (5.4) действительных корней не имеет, а при $\chi(\gamma_*) = \chi(\gamma_* + \pi) = 0$ корень становится кратным (по модулю π), что соответствует вырождению типа системы уравнений. Отметим, что $0 < \theta - \gamma < \pi$ при $\gamma \in (\gamma_*, \theta_{\min})$ и $-\pi < \theta - \gamma < 0$ при $\gamma \in (\theta_{\max}, \gamma_* + \pi)$.

Таким образом, необходимое и достаточное условие существования различных (по модулю π) действительных корней характеристического уравнения (5.4) сводится к неравенствам $\theta_{\max}(h) - \theta_{\min}(h) < \pi$ и $\chi(\gamma_*) > 0$. Последнее должно выполняться только в точках γ_*, где $\chi'(\gamma_*) = 0$. Легко проверить, что для течений без сдвига скорости по вертикали (когда $\theta_\lambda = 0, q_\lambda = 0$) сформулированный критерий сводится к известному условию сверхкритичности потока $q > (gh)^{1/2}$.

Дифференцированием характеристического уравнения (5.4) по переменной h получаем интегродифференциальное уравнение для определения функции $\gamma(h)$

$$\gamma_h = -\frac{3g}{2}\Big(\int_0^1 \frac{H\cos(\theta - \gamma)\, d\lambda}{q^2 \sin^3(\theta - \gamma)}\Big)^{-1} \int_0^1 \frac{H\, d\lambda}{q^4 \sin^4(\theta - \gamma)}. \tag{5.5}$$

Дифференцируя (5.3) по λ, получаем дифференциальные уравнения для производных $q_\lambda, \theta_\lambda$

$$q_{\lambda h} = \frac{g q_\lambda}{q^2}, \qquad \theta_{\lambda h} = \frac{g\theta_\lambda}{q^2 \sin^2(\theta - \gamma)} + \frac{2g \operatorname{ctg}(\theta - \gamma) q_\lambda}{q^3}. \tag{5.6}$$

Систему интегродифференциальных уравнений (5.3), (5.5), (5.6) можно записать в виде (4.2), если ввести искомый вектор $\boldsymbol{V} = (q, q_\lambda, \theta, \theta_\lambda, H, \gamma)$. Непрерывное примыкание простой волны к заданному равномерному сдвиговому потоку, в котором $h = h_0$, $q = q_0(\lambda)$, $\theta = \theta_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$, $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, обеспечивается заданием при $h = h_0$ условий Коши $\boldsymbol{V}(h_0, \lambda) = \boldsymbol{V}_0(\lambda)$. Здесь γ_0 — корень характеристического уравнения (5.4), вычисленный при $q = q_0(\lambda)$, $\theta = \theta_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$. В эйлеровых переменных параметры равномерного сдвигового потока задаются соотношениями $u = u_0(z)$, $v = v_0(z)$, $w = 0$, $h = h_0 = \text{const}$.

С использованием теоремы о разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве доказывается (аналогично п. **4**) существование простой волны при $|h - h_0| < \varepsilon(\delta)$, если начальные данные непрерывны и удовлетворяют сформулированному выше условию существования действительных различных корней характеристического уравнения и неравенствам $H_0 > \delta > 0$, $\pi - \delta > |\theta_0 - \gamma_0| > \delta > 0$, $|\gamma_0 - \gamma_*(h_0)| > \delta > 0$. Если решение уравнений (5.3), (5.5), (5.6) построено, то функция $h(x, y)$ определяется локально в некоторой подобласти плоскости (x, y) из уравнения

$$\boldsymbol{n}(h) \cdot \boldsymbol{x} = m(h). \tag{5.7}$$

Здесь $\boldsymbol{n}(h) = (-\sin\gamma(h), \cos\gamma(h))$; $m(h)$ — произвольная функция.

6. Аналог простой волны Прандтля — Мейера для сдвиговых течений. В газовой динамике и теории мелкой воды известно стационарное решение типа простой волны, описывающее поворот потока при обтекании выпуклого угла, — течение Прандтля — Мейера [10]. Ниже построено обобщение этого решения для потока со сдвигом вектора скорости по вертикали.

Интегрируя первое уравнение (5.3), получим аналог интеграла Бернулли

$$q^2 + 2gh = q_m^2(\lambda), \tag{6.1}$$

где $q_m(\lambda)$ — произвольная положительная функция. Найдем частное решение уравнений (5.3), предполагая, что модуль горизонтальной скорости не зависит от вертикальной лагранжевой координаты λ. Это соответствует следующему выбору произвольной функции в (6.1): $q_m(\lambda) = \text{const}$. Тогда из уравнений (5.3), (5.6) следует

$$(\theta_\lambda/H)_h = 0.$$

Рассмотрим частное решение этого уравнения $\theta_\lambda/H = A$, где $A = \text{const}$. Используя полученное соотношение, находим

$$\theta = A\Phi + \theta_0 = Az + \theta_0,$$

где угол $\theta_0(h)$ между осью x и направлением вектора скорости на дне удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\theta_{0h} = -g\,\mathrm{ctg}\,(\theta_0 - \gamma)/q^2.$$

Интеграл в (5.4) сходится при некоторых действительных γ только в том случае, когда в области определения простой волны $\theta_{\max} - \theta_{\min} = |A|h < \pi$. Характеристическое уравнение (5.4) можно проинтегрировать:

$$\chi(\gamma) = 1 + g(\mathrm{ctg}\,(\theta_1 - \gamma) - \mathrm{ctg}(\theta_0 - \gamma))/(Aq^2) = 0. \tag{6.2}$$

Здесь $\theta_1 = \theta_0 + Ah$. Представляя $\theta_1 - \gamma$ как $\theta_1 - \theta_0 + \theta_0 - \gamma$ и используя тригонометрическую формулу для котангенса суммы аргументов, сведем (6.2) к квадратному уравнению относительно $\mathrm{ctg}\,(\theta_0 - \gamma)/q^2$. Из этого уравнения находим

$$\frac{\mathrm{ctg}\,(\theta_0 - \gamma_{1,2})}{q^2} = \frac{1}{g}\Big(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + g\,\frac{Aq^2\,\mathrm{ctg}\,(\theta_1 - \theta_0) - g}{q^4}}\Big). \tag{6.3}$$

Знак “+” в этом выражении соответствует корню характеристического уравнения $\gamma_1 \in (\gamma_*, \theta_{\min})$, “$-$” — корню $\gamma_2 \in (\theta_{\max}, \gamma_* + \pi)$. Соответственно будем рассматривать простые волны либо первого, либо второго характеристического семейства. Для рассматриваемого здесь решения $\gamma_* = (\theta_1 + \theta_0)/2 - \pi/2$, $\theta_{\max} = \theta_1, \theta_{\min} = \theta_0$ при $A > 0$; $\theta_{\max} = \theta_0, \theta_{\min} = \theta_1$ при $A < 0$. Подкоренное выражение в правой части (6.3) положительно, если

$$q^2 = q_m^2 - 2gh > 2g \operatorname{tg}((\theta_1 - \theta_0)/2)/A = 2g \operatorname{tg}(Ah/2)/A. \qquad (6.4)$$

В случае равенства в (6.4) получаем уравнение, из которого можно однозначно найти критическую глубину h_k. В простой волне необходимо выполнение условия $0 < h < h_k$. В пределе $A \to 0$ (переход к движению без сдвига вектора скорости) (6.4) переходит в классическое условие сверхкритичности потока $q > \sqrt{gh}$. Так как $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in (0, \pi/2)$, то из (6.4) вытекает, что условие сверхкритичности потока $q > \sqrt{gh}$ выполняется и при $A \neq 0$. Следовательно, (6.4) является более жестким требованием. В общем случае, когда $A \neq 0$, функции $\theta_{0(1,2)}(h)$ восстанавливаются квадратурой

$$\theta_{0(1,2)}(h) = -\int\limits_{h_0}^{h} \left(\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + g\,\frac{A(q_m^2 - 2gh')\operatorname{ctg}(Ah') - g}{(q_m^2 - 2gh')^2}}\right) dh' + \theta_{00},$$

где $\theta_{00} = \mathrm{const}$. Далее из (6.3) находим угол наклона характеристики к оси x в простой волне первого семейства

$$\gamma_1(h) = \theta_{01}(h) - \operatorname{arcctg} \frac{q_m^2 - 2gh}{g} \left(\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + g\,\frac{A(q_m^2 - 2gh)\operatorname{ctg}(Ah) - g}{(q_m^2 - 2gh)^2}}\right)$$

либо аналогичный угол

$$\gamma_2(h) = \theta_{02}(h) - \operatorname{arcctg} \frac{q_m^2 - 2gh}{g} \left(\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + g\,\frac{A(q_m^2 - 2gh)\operatorname{ctg}(Ah) - g}{(q_m^2 - 2gh)^2}}\right) + \pi$$

в простой волне второго семейства. Заметим, что при $h \to 0$, что соответствует движению простой волны по сухому руслу, $\gamma_1(h) \to \theta_{01}(0)$, $\gamma_2(h) \to \theta_{02}(0)$. Для того чтобы получить полное описание простой волны в эйлерово-лагранжевых координатах, нужно дополнительно проинтегрировать второе уравнение системы (5.3) относительно $\theta(h, \lambda)$ и вычислить $H(h, \lambda) = A^{-1}\theta_\lambda(h, \lambda)$. Однако в эйлеровом описании решение известно и задается соотношениями

$$q = \sqrt{q_m^2 - 2gh}, \qquad \theta = Az + \theta_{0i}(h), \qquad \gamma_i = \gamma_i(h),$$

где $\theta_{0i}(h)$, $\gamma_i(h)$ вычислены выше. При $i = 1, 2$ получаем простую волну первого или второго семейства соответственно.

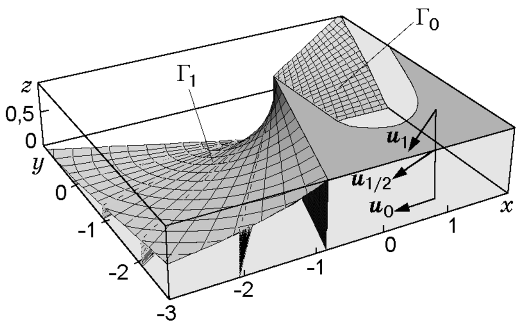
Будем дополнительно предполагать, что волна центрирована на линии $x = 0$, $y = 0$ в пространстве (x, y, z). Это означает, что характеристические плоскости $h = \mathrm{const}$ проходят через указанную линию. Тогда соотношение (5.7) принимает вид

$$-x \sin\gamma + y \cos\gamma = 0. \qquad (6.5)$$

Введем цилиндрические координаты r, φ, z в пространстве, используя равенства $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Равенство (6.5) можно записать в простом виде $\gamma_i(h) = \varphi$. Это соотношение позволяет находить функцию $h = h(\varphi)$ по известной $\gamma_i(h)$. Приведенными формулами центрированная простая волна в эйлеровых координатах определена полностью. При $A \to 0$ данное решение переходит в классическую волну Прандтля — Мейера.

Дадим физическую интерпретацию найденного решения и опишем некоторые его свойства. Пусть форма берега, вдоль которого движется равномерный сдвиговый поток

$$h = h_0, \qquad q = q_0 = \sqrt{q_m^2 - 2gh_0}, \qquad \theta = Az + \theta_{00}$$



($0 < h_0 < h_k$, $q_m^2 = q_0^2 + 2gh_0$), является развертывающейся поверхностью Γ_0 (см. рисунок), заданной уравнением

$$\varphi = Az + \theta_{00}.$$

Здесь полярный угол φ изменяется в пределах $\theta_{00} \leqslant \varphi \leqslant Ah_0 + \theta_{00}$. Равномерный сдвиговый поток примыкает к центрированной простой волне второго семейства по характеристике $\varphi = \gamma_2(h_0)$. В области простой волны $\gamma_2(h_0) > \varphi > \gamma_2(h_1)$ (здесь $h_1 < h_0$, а уравнение $\varphi = \gamma_2(h_1)$ задает замыкающую характеристику простой волны) он трансформируется в другой равномерный сдвиговый поток

$$h = h_1, \qquad q = q_1 = \sqrt{q_m^2 - 2gh_1}, \qquad \theta = Az + \theta_{02}(h_1),$$

который движется вдоль нависающего берега, имеющего форму развертывающейся поверхности $\varphi = Az + \theta_{02}(h_1)$ при $\theta_{02}(h_1) < \varphi < Ah_0 + \theta_{02}(h_1)$. В зоне простой волны свободная поверхность Γ_1, заданная уравнением $z = h(\varphi)$, также является развертывающейся. В простой волне второго семейства глубина h уменьшается от h_0 до h_1, а модуль скорости q возрастает от q_0 до q_1 при увеличении угла φ. На рисунке представлена картина течения в простой центрированной волне при растекании сдвигового потока по сухому руслу при $A = \pi/(5h_0)$, $\theta_{00} = 0$, $q_0/\sqrt{gh_0} = 1{,}56$. Масштабы по осям координат отнесены к h_0. Здесь же показано изменение вектора горизонтальных компонент скорости $\boldsymbol{u}$ по глубине в набегающем равномерном сдвиговом потоке. Индексы 0, 1/2, 1 соответствуют значениям скорости при $z = 0$, $z = h_0/2$, $z = h_0$. Характеристические плоскости $h = \text{const}$ и поверхность Γ_0 проходят через прямую $x = 0$, $y = 0$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
2. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. **Freeman N. C.** Simple waves on shear flows: similarity solutions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 2. P. 257–263.
4. **Sachdev P. L.** Exact self-similar time-dependent free surface flow under gravity // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. P. 797–802.
5. **Sachdev P. L., Philip V.** Invariance group properties andexact solutions of equations describing time-dependent free surface flow under gravity // Quart. Appl. Math. 1986. V. 43. P. 465–482.
6. **Sachdev P. L., Philip V.** Exact simple waves on shear flows in a compressible barotropic medium // Stud. Appl. Math. 1988. V. 79. P. 193–203.

7. **Sachdev P. L., Vaganan B. M.** Exact free surface flows forshallow water equations. 1. The incompressible case // Stud. Appl. Math. 1994. V. 93. P. 251–274.
8. **Sachdev P. L., Vaganan B. M.** Exact free surface flows forshallow water equations. 2. The compressible case // Stud. Appl. Math. 1995. V. 94. P. 51–76.
9. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
10. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
11. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
12. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 26/II 2002 г.