УДК 532.526

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА МАРАНГОНИ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. А. Батищев

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: batishev-v@mail.ru

Для уравнений движения жидкости в приближении Обербека — Буссинеска, в которых вязкость и температуропроводность малы, рассчитаны стационарные осесимметричные режимы течений жидкости в термогравитационном пограничном слое вблизи свободной поверхности при неравномерном распределении температуры на этой границе. С учетом термокапиллярного эффекта показано, что в результате бифуркации при локальном охлаждении свободной поверхности в пограничном слое могут возникать режимы течений неоднородной жидкости с вращением, тогда как вне этого слоя вращение отсутствует.

Ключевые слова: свободная граница, неоднородная жидкость, пограничный слой, бифуркации, термокапиллярный эффект, вращение.

DOI: 10.15372/PMTF20200313

В однородной жидкости в случае малых диффузионных коэффициентов в окрестности свободной поверхности при воздействии на эту поверхность касательных напряжений могут формироваться тонкие пограничные слои. Эти напряжения возникают, например, при наличии градиента температуры вдоль свободной границы. В результате формируется термокапиллярное течение жидкости (эффект Марангони). В работе [1] впервые получены автомодельные решения, описывающие термокапиллярные течения однородной жидкости. Важный цикл исследований эффекта Марангони проведен В. В. Пухначевым с соавторами. Например, в работах [2, 3] исследованы свойства нестационарных и стационарных пограничных слоев Марангони.

Нелинейные пограничные слои могут формироваться в окрестности свободной границы при отсутствии поверхностных касательных напряжений на этой границе. Это явление имеет место в отсутствие эффекта Марангони в неоднородной жидкости, течение которой описывается уравнениями движения в приближении Обербека — Буссинеска. В результате влияния поля температур на поле скоростей жидкости в ней формируется термогравитационный пограничный слой вблизи свободной границы. В зависимости от значений параметров задачи эффект Марангони может оказывать малое или конечное воздействие на динамику неоднородной жидкости. Влияние эффекта Марангони на термогравитационное течение жидкости в тонком слое изучалось в работе [4]. Настоящая работа посвящена исследованию влияния эффекта Марангони на термогравитационное течение в пограничном слое вблизи свободной поверхности неоднородной жидкости, занимающей слой конечной толщины. Определены условия, при которых вблизи свободной границы может возникать режим течения жидкости с вращением.

1. Математическая модель. В условиях осевой симметрии изучается стационарное течение неоднородной жидкости, заполняющей горизонтальный слой с конечной толщиной h, ограниченный снизу твердой стенкой, а сверху свободной границей Γ, на которой задано неравномерное распределение температуры. Течение жидкости рассчитывается на основе уравнений движения в приближении Обербека — Буссинеска

$$(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}=-\rho^{-1}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{g}\beta T,\qquad \boldsymbol{v}\nabla T=\chi\Delta T,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.$$

Здесь $\boldsymbol{v}=(v_r,v_\theta,v_z)$ — вектор скорости в цилиндрических координатах r, θ, z; $\boldsymbol{g}=(0,0,-g_t)$; g_t — ускорение свободного падения; β — коэффициент теплового расширения; T — температура жидкости; кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ полагаются малыми. Условия осевой симметрии означают, что скорость, давление и температура не зависят от окружной координаты θ.

Краевые условия на свободной поверхности состоят из динамических условий для нормальных и касательных напряжений, кинематического условия и заданной температуры T_Γ:

$$p=2\nu\rho\boldsymbol{n}\Pi\boldsymbol{n}-\sigma(k_1+k_2)+\rho gz+p_*,\qquad \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}=0,\qquad (r,\theta,z)\in\Gamma,$$
$$2\nu\rho(\Pi\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{n}\Pi\boldsymbol{n})\boldsymbol{n})=\nabla_\Gamma\sigma,\qquad T=T_\Gamma,\qquad (r,\theta,z)\in\Gamma,$$

где Π — тензор скоростей деформации; p — динамическое давление, обусловленное конвективным движением жидкости [5]; ρgz — гидростатическое давление; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ; k_1, k_2 — главные кривизны свободной поверхности; σ — коэффициент поверхностного натяжения, причем будем полагать, что этот коэффициент линейно зависит от температуры: $\sigma=\sigma_0-|\sigma_T|(T-T_\sigma)$ (σ_0, σ_T, T_σ — постоянные); на свободной границе давление p_* считается постоянным; ∇_Γ — градиент вдоль границы Γ. На твердой стенке выполняется условие прилипания жидкости $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ и задается постоянная температура $T=T_S$.

Начало системы координат выбирается на свободной поверхности. Затем находится решение задачи, в котором свободная граница в главном приближении не деформируется и описывается уравнением $z=0$. Твердая граница определяется уравнением $z=-h$. Предположим, что на границе Γ температура изменяется по закону $T_\Gamma=T_S+T_m(r^2/L^2-1)$ при $r\leqslant L$ и $T_\Gamma=T_S$ при $r>L$ ($T_m=T_\Gamma|_{r=L}-T_\Gamma|_{r=0}$ — перепад температуры на отрезке $r\in[0,L]$). Очевидно, что при $T_m>0$, $r<L$ свободная граница в окрестности оси симметрии охлаждается, при $T_m<0$ — нагревается.

Введем безразмерную разность температур α на поверхности Γ по формуле $\alpha=T_m/T_S$. Уравнения движения и краевые условия также приведем к безразмерному виду. В качестве масштабов длины, температуры, скорости и давления примем величины L, T_S, U_a, ρU_a^2 ($U_a=\sqrt{g_t\beta LT_S}$). В предположении, что при охлаждении разность температур изменяется: $0<T_m<T_S$, имеем $0<\alpha<1$. В случае если параметр $\sqrt{\alpha}$ конечен, $\sqrt{T_S}$ и $\sqrt{T_m}$ имеют одинаковый порядок и, значит, масштаб U_a имеет порядок $U_a\sim\sqrt{g_t\beta LT_m}$. Выражение для температуры на поверхности Γ представим в виде $T_\Gamma=1+\alpha(r^2-1)$ при $r\leqslant 1$, $T_\Gamma=1$ при $r>1$.

Введем безразмерный параметр $\varepsilon=\nu/(LU_a)$, который является малым при малом значении кинематической вязкости и конечных значениях параметра L. Запишем уравнения движения в безразмерной форме

$$(\boldsymbol{v},\nabla)\,\boldsymbol{v}=-\nabla p+\varepsilon\Delta\boldsymbol{v}+T\boldsymbol{e}_z,\qquad \boldsymbol{v}\nabla T=(\varepsilon/\,\mathrm{Pr})\,\Delta T,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{e}_z$ — вектор с компонентами $(0,0,1)$; Pr — число Прандтля.

2. Асимптотический метод. В безразмерных переменных параметр ε находится перед старшими производными в уравнениях движения (1.1). Это означает, что в данном случае вблизи свободной границы формируется область термогравитационного пограничного слоя D_Γ. Вне этого слоя возникает внешнее течение, которое в главном приближении описывается бездиффузионными уравнениями. Рассмотрим случай, когда при $\varepsilon \to 0$ порядок компонент вектора скорости в области пограничного слоя и во внешнем потоке одинаков. Предположим, что внешнее течение не закручено, т. е. $v_\theta = 0$ вне D_Γ. Далее находим порядок вектора скорости и толщины пограничного слоя. Для этого введем преобразование растяжения $s_1 = z/\varepsilon^k$ в области D_Γ и проведем оценку порядков скорости, давления и температуры в уравнениях и краевых условиях. В результате получаем, что вектор скорости имеет порядок, равный $O(\varepsilon^{1/5})$. Температура и давление имеют конечный порядок $O(1)$. Порядок толщины пограничного слоя равен $O(\varepsilon^{2/5})$. Отклонение свободной границы от невозмущенного уровня $z = 0$ имеет порядок $O(\beta T_m \varepsilon^{2/5})$ и значительно меньше толщины пограничного слоя.

Для решения краевой задачи используем метод пограничного слоя [6]. При $\varepsilon \to 0$ асимптотические разложения полей скорости, температуры и давления строим по дробным степеням параметра ε:

$$\begin{gathered} v_r = \varepsilon^{1/5}(v_{r1} + h_{r1}) + \ldots, \qquad v_z = \varepsilon^{1/5} v_{z1} + \varepsilon^{3/5}(v_{z2} + h_{z2}) + \ldots, \\ v_\theta = \varepsilon^{1/5} h_{\theta 1} + \varepsilon^{3/5} h_{\theta 2} + \ldots, \qquad p = p_0 + \varepsilon^{2/5}(p_1 + q_1) + \ldots, \\ T = 1 + T_1(r, s) + \varepsilon^{2/5}(T_2(r, s) + T_{1b}(r, z)) + \ldots . \end{gathered} \tag{2.1}$$

Функции h_{r1}, h_{z2}, $h_{\theta 1}$, $h_{\theta 2}$, T_1, T_2 определены в области пограничного слоя D_Γ, зависят от растянутой переменной $s = z/\varepsilon^{2/5}$ и стремятся к нулю при выходе из области D_Γ, т. е. при $s \to -\infty$. Функция $q_1(r, s)$ определена в области D_Γ и стремится к постоянному значению на бесконечности. Функции v_{r1}, v_{z1}, v_{z2}, p_0, p_1, T_{1b} (внешнее решение) зависят от переменных r, z, определены во всей области течения жидкости и описывают решение задачи вне области пограничного слоя D_Γ. Условия $h_{\theta 0} \to 0$, $h_{\theta 1} \to 0$ при $s \to -\infty$ означают, что вращение жидкости в пограничном слое не вызывает вращения вне области D_Γ.

Подставим асимптотические ряды (2.1) в систему уравнений движения (1.1) и краевые условия и приравняем к нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях ε. Введем функции H_r, H_z по формулам $H_r = h_{r1} + v_{r1}|_\Gamma$, $H_z = h_{z2} + v_{z2}|_\Gamma + s\,\partial v_{z1}/\partial z|_\Gamma$. В главном приближении получаем систему уравнений пограничного слоя для расчета термогравитационного течения жидкости в области D_Γ:

$$\begin{gathered} H_r \frac{\partial H_r}{\partial r} + H_z \frac{\partial H_r}{\partial s} - \frac{h_{\theta 1}^2}{r} = -\frac{\partial q_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial s^2} + v_{r1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r}\Big|_\Gamma, \\ H_r \frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial r} + H_z \frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial s} + \frac{H_r h_{\theta 1}}{r} = \frac{\partial^2 h_{\theta 1}}{\partial s^2}, \qquad -\frac{\partial q_1}{\partial s} + T_1 = 0, \\ H_r \frac{\partial T_1}{\partial r} + H_z \frac{\partial T_1}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 T_1}{\partial s^2}, \qquad \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_z}{\partial s} = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Краевые условия на свободной границе и условия при выходе из области D_Γ имеют вид

$$\begin{gathered} H_z = 0, \qquad \frac{\partial H_r}{\partial s} = -\gamma \tau r, \qquad \frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial s} = 0, \qquad T_1 = \theta_\Gamma, \qquad s = 0, \\ H_r \to v_{r1}\big|_\Gamma, \qquad \frac{\partial H_r}{\partial s} \to 0, \qquad h_{\theta 1} \to 0, \qquad T_1 \to 0, \qquad s \to -\infty, \qquad \tau = 2\alpha. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Функция θ_Γ приводится к виду $\theta_\Gamma = 0{,}5\tau(r^2 - 1)$, параметр γ в краевых условиях определяется по формуле $\gamma = |\sigma_T| \rho^{-1} (T_S^2 \nu^{-4} L^{-4} g_t^{-3} \beta^{-3})^{1/5}$, в которой учитывается эффект Марангони. При $\gamma = 0$ термокапиллярный эффект не учитывается.

Заметим, что в отличие от уравнений пограничного слоя Прандтля для однородной жидкости система уравнений (2.2) содержит производные от функции давления q_1 по обеим пространственным координатам r, s. Это обусловлено влиянием поля температур на поле скоростей в неоднородной жидкости.

При решении краевой задачи для уравнений Обербека — Буссинеска функции внешнего решения v_{r1}, v_{z1}, v_{z2}, p_0, p_1, T_{1b} будем искать с использованием первого итерационного процесса в методе пограничного слоя [6]. В результате определяем p_0 и находим, что вектор $\boldsymbol{v}_1$ с компонентами v_{r1}, v_{z1}, $v_{\theta 1} = 0$, а также функции p_1, T_{1b} в разложениях (2.1) удовлетворяют системе уравнений (1.1) при $\varepsilon = 0$. Предположим, что радиальная компонента скорости внешнего течения на свободной границе в окрестности оси симметрии линейно зависит от радиальной координаты: $v_{r1}|_\Gamma = Ur$ ($U \geqslant 0$). Приведем асимптотическое значение поля скорости внешнего течения в окрестности свободной границы: $v_{r1} \sim Ur$, $v_{z1} \sim -2Uz$, $v_{\theta 1} = 0$ при $|z| \leqslant h_1$ (h_1 — безразмерная толщина слоя жидкости; U — амплитуда скорости внешнего потока на свободной поверхности).

С учетом квадратичной зависимости температуры от радиальной координаты на свободной границе точное решение задачи (2.2), (2.3) построим в виде

$$
\begin{gathered}
H_r = r(U - W'(\eta)), \qquad H_z = 2(\eta U - W), \qquad h_{\theta 1} = rG(\eta), \\
T_1 = 0{,}5r^2 T_{11}(\eta) + T_{12}(\eta), \qquad q_1 = -0{,}5r^2 q_{11}(\eta) - q_{12}(\eta), \qquad \eta = -s.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Формулы (2.4) определяют решение задачи только в окрестности оси симметрии, не распространяются на область вне этой окрестности, в частности, несправедливы в области $r > 1$, где решение можно продолжить численно.

Из (2.2), (2.3) для функций W, G, T_{11}, T_{12} выводим краевую задачу

$$
\begin{gathered}
W^{(4)} = 2(W - \eta U)W''' + 2GG' + T_{11}, \qquad G'' = 2(W - \eta U)G' + 2(U - W')G, \\
T_{11}'' = 2\,\mathrm{Pr}\,((W - \eta U)T_{11}' + (U - W')T_{11}), \qquad T_{12}'' = 2\,\mathrm{Pr}\,(W - \eta U)T_{12}', \\
W = 0, \qquad W'' = -\gamma\tau, \qquad G' = 0, \qquad T_{11} = \tau, \qquad T_{12} = -0{,}5\tau \qquad (\eta = 0), \\
W' = W'' = G = T_{11} = T_{12} = 0 \qquad (\eta = +\infty).
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

Используя (2.2), (2.4), выражаем функции q_{11}, q_{12} через T_{11}, T_{12}. Решив краевую задачу (2.5), функции q_{11}, q_{12} находим по формулам

$$
q_{11} = \int\limits_0^\eta T_{11}\,d\eta + \mathrm{const}, \qquad q_{12} = \int\limits_0^\eta T_{12}\,d\eta + \mathrm{const}\,.
$$

В случае если в задаче (2.5) $U = 0$, имеем $v_{r1} = v_{z1} = v_{\theta 1} = 0$. Вектор скорости внешнего течения имеет компоненты v_{r2}, v_{z2}, $v_{\theta 2} = 0$, которые индуцируются пограничным слоем (функциями W, G, T_{11}, T_{12}), причем кинематическое условие для внешнего течения на поверхности Γ принимает вид $v_{z2}|_\Gamma = -2W(\infty)$.

3. Режимы течения жидкости в отсутствие вращения. Функции W, G, T_{11}, T_{12}, описывающие течение жидкости в пограничном слое, находятся численно путем решения задачи (2.5) методом пристрелки. Расчеты проводились для значения числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 7$. Введем параметр $V = U - W'(0)$, описывающий амплитуду радиальной компоненты скорости на свободной границе. На рис. 1 показана зависимость параметра V от амплитуды скорости внешнего потока U на границе Γ. Видно, что с увеличением скорости внешнего потока U монотонно увеличивается скорость жидкости на свободной границе. Наличие эффекта Марангони при $\tau < 0$ приводит к увеличению скорости жидкости на свободной поверхности Γ.

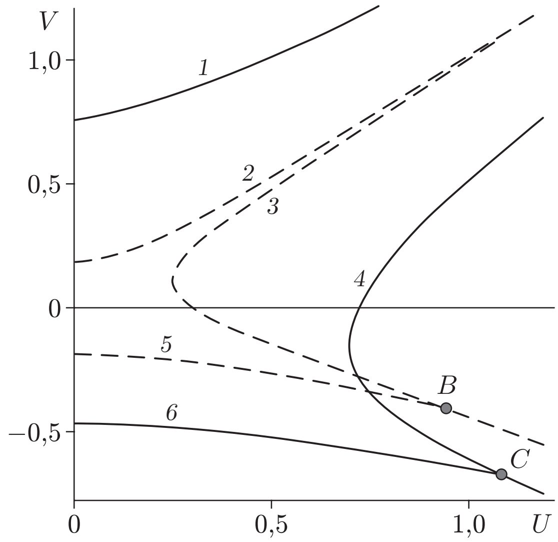

Рис. 1. Зависимость параметра V от амплитуды скорости внешнего потока U на свободной границе при различных значениях параметров γ, τ:
сплошные линии — $\gamma = 1$, штриховые — $\gamma = 0$; *1–4* — режимы течения в отсутствие вращения ($G = 0$), *5, 6* — режимы течения с вращением ($G \neq 0$); *1, 2* — $\tau = -0{,}75$ (локальный нагрев), *3–6* — $\tau = 0{,}75$ (локальное охлаждение); B, C — точки бифуркации

При охлаждении свободной границы режимы течений жидкости в отсутствие вращения существуют только в случае, если амплитуда скорости внешнего потока U на поверхности Γ не меньше некоторого предельного значения U_m. Заметим, что при $\gamma = 1$ $U_m \approx 0{,}7029$, при $\gamma = 0$ $U_m \approx 0{,}2489$. При наличии эффекта Марангони параметр U_m увеличивается. Параметру U_m соответствуют крайние левые точки (“вершины”) кривых *3, 4*. При $U > U_m$ каждому значению параметра U соответствуют два решения для режима течения в отсутствие вращения, различающиеся формой профиля скорости. При $U = U_m$ эти решения совпадают, при $U < U_m$ — исчезают. Анализ профилей скорости в пограничном слое показывает, что при $V < 0$ область течения разбивается на зону, в которой жидкие частицы удаляются от оси симметрии ($v_r > 0$), и зону, в которой они приближаются к оси симметрии ($v_r < 0$). Зона $v_r < 0$, примыкающая к свободной границе, значительно уже зоны $v_r > 0$. При $V > 0$, $\tau > 0$ область пограничного слоя состоит только из зоны $v_r > 0$. В этом случае вследствие наличия эффекта Марангони уменьшается радиальная компонента скорости жидкости на поверхности Γ. При $V < 0$ эффект Марангони оказывает неоднозначное влияние на эту компоненту. Для одних значений параметра U модуль этой компоненты на поверхности Γ может увеличиваться с ростом параметра γ, для других U — уменьшаться (при малых значениях параметра $|V|$).

Обозначим через $V_r = U - W'(\eta)$ амплитуду радиальной компоненты скорости в главном приближении внутри области пограничного слоя D_Γ. Результаты расчетов показывают, что при нагреве свободной границы компонента скорости V_r для режимов течения жидкости в отсутствие вращения монотонно уменьшается при удалении от свободной границы, а при охлаждении — монотонно возрастает. При выходе из области D_Γ амплитуда V_r стремится к предельному значению, равному U.

4. Бифуркации. Режимы течения жидкости с вращением. При локальном охлаждении свободной границы в случае $U < U_m$ режимы течения жидкости в отсутствие вращения ($G = 0$) в пограничном слое отсутствуют, и краевая задача (2.5) имеет решения, описывающие режимы течения с вращением при $G \neq 0$, которые появляются в результате

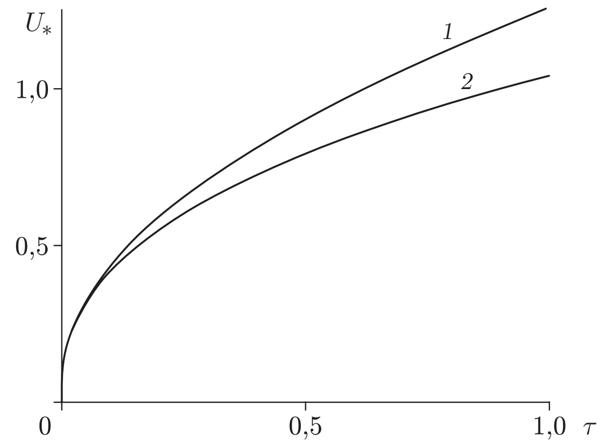

Рис. 2. Зависимость бифуркационных значений параметра U от параметра τ при различных значениях параметра γ:
1 — $\gamma = 1$, *2* — $\gamma = 0$

бифуркации режимов течения в отсутствие вращения. Точки бифуркации определяются при численном решении краевой задачи на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (2.5) вблизи решения, описывающего режимы течения в отсутствие вращения. Обозначая через W_c, G_c, T_{c1}, T_{c2} собственные функции, краевую задачу для определения этих функций и собственных значений представим в виде

$$\begin{gathered}
W_c^{(4)} = 2W'''W_c + 2(W - \eta U)W_c''' + T_{c1}, \qquad G_c'' = 2(W - \eta U)G_c' - 2(W' - U)G_c, \\
T_{c1}'' = 2\Pr(W_c T_{11}' - W_c' T_{11} + (W - \eta U)T_{c1}' - (W' - U)T_{c1}), \\
T_{c2}'' = 2\Pr(W_c T_{12}' + (W - \eta U)T_{c2}'), \\
W_c = W_c'' = T_{c1} = T_{c2} = G_c' = 0 \quad (\eta = 0), \qquad W_c' = W_c'' = T_{c1} = T_{c2} = G_c = 0 \quad (\eta = +\infty).
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Задача на собственные значения (4.1) решается численно. Параметры U, τ, γ изменялись в ограниченной области

$$M = \{(U, \tau, \gamma); \quad U \in [0, 2], \quad \tau \in [-1, 1], \quad \gamma \in [0, 1]\}.$$

При локальном нагреве свободной границы ($\tau < 0$) собственных значений не обнаружено. В случае охлаждения границы ($\tau > 0$) рассчитана ветвь простых собственных значений $U_*(\gamma, \tau)$ параметра U в области M. Собственные функции находим в виде $G_c = c_g G_*(\eta)$, $W_c = T_{c1} = T_{c2} = 0$ (c_g — произвольная постоянная, не равная нулю). Функция $G_*(\eta)$ удовлетворяет условию нормировки $G_*(0) = 1$, монотонно убывает с увеличением переменной η и стремится к нулю при $\eta \to +\infty$. На рис. 2 приведена зависимость бифуркационных значений параметра U_* от параметра τ. Результаты численных расчетов показывают, что при наличии термокапиллярного эффекта бифуркационное значение параметра U увеличивается как с увеличением параметра τ при фиксированном значении γ, так и с увеличением параметра γ при фиксированном значении τ. С ростом параметра γ влияние эффекта Марангони усиливается.

Решения, описывающие режимы течения с вращением, ответвляются от решений, описывающих режимы течения в отсутствие вращения, в точках бифуркации B и C (см. рис. 1). Для каждой точки, принадлежащей кривым *5*, *6*, рассчитано по два режима, которые различаются только направлением вращения.

На рис. 3 для точек свободной границы приведена зависимость амплитуды окружной компоненты скорости для режимов течения с вращением $G_0 = G(0)$ от скорости внешнего

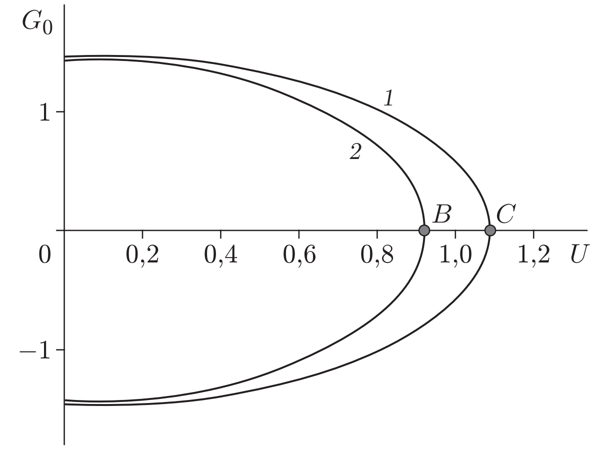

Рис. 3

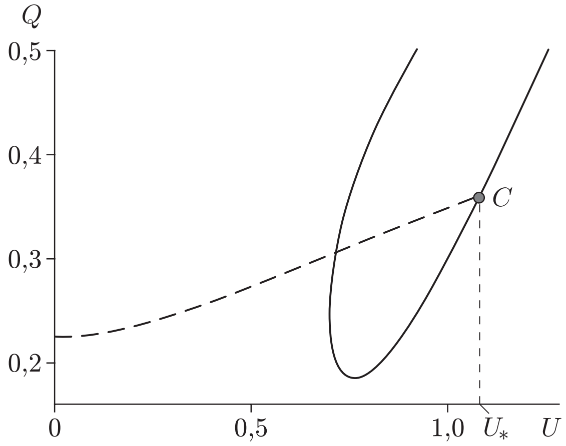

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость амплитуды окружной компоненты скорости G_0 от скорости внешнего потока U на свободной границе для режимов течения жидкости с вращенимем при $\tau = 0{,}75$ и различных значениях γ:
1 — $\gamma = 1$, *2* — $\gamma = 0$; B, C — точки бифуркации

Рис. 4. Зависимость $Q(U)$ на свободной поверхности при $\gamma = 1$, $\tau = 0{,}75$, $r = 0{,}5$:
сплошная линия — режим течения в отсутствие вращения, штриховая — режим течения с вращением; C — точка бифуркации

потока U при $\tau = 0{,}75$. Вследствие наличия термокапиллярного эффекта увеличивается окружная компонента скорости на свободной границе. При $U < U_*$ рассчитано по два режима с симметричными значениями $\pm|G_0|$ на свободной границе.

При решении краевой задачи (2.5) вычислялся также тепловой поток на свободной границе, причем для расчета нормальной к границе компоненты потока использовалась формула $q_z = -\lambda\, \partial T/\partial z|_\Gamma$, преобразованная к виду $q_z = q_* Q(r, U, \tau, \gamma)$ ($q_* = \lambda T_S L^{-1} \varepsilon^{-2/5}$ — размерный параметр, содержащий теплопроводность λ; $Q = 0{,}5 r^2 T'_{11}(0) + T'_{12}(0)$ — безразмерная функция). Результаты расчетов приведены на рис. 4. Видно, что в случае режимов течения с вращением тепловой поток монотонно увеличивается с ростом параметра U на промежутке $[0, U_*]$.

5. Асимптотика режимов течения жидкости с вращением в окрестности точки бифуркации. Введем параметр δ по формуле $\delta = U - U_*$, где U, U_* — соответственно текущее и бифуркационное значения параметра U. Очевидно, что в малой окрестности точки бифуркации при $U \to U_*$ параметр δ является малым. Обозначим через W_*, T_{*1}, T_{*2} режим течения жидкости в точке бифуркации. Введем параметр ε_* по формуле $\varepsilon_* = G(\eta, U, \tau, \gamma)|_{\eta=0}$, где $G(0, U, \tau, \gamma)$ — амплитуда окружной компоненты скорости для режима течения с вращением на границе Γ. Заметим, что параметр $\varepsilon_*(U, \tau, \gamma)$ обращается в нуль при $U = U_*$. В малой окрестности точки бифуркации при $U \to U_*$ параметр ε_* является малым. Режимы течения с вращением в окрестности точки бифуркации представим в виде

$$W = W_* + \Psi, \qquad G = \varepsilon_* g, \qquad T_{11} = T_{*1} + t_1, \qquad T_{12} = T_{*2} + t_2.$$

Из соотношения $\varepsilon_* = G(0, U, \tau, \gamma)$ следует краевое условие $g(0) = 1$.

С учетом (2.5) для определения функций Ψ, g, t_1, t_2 получаем краевую задачу

$$L\Psi = t_1 - 2\delta\eta(\Psi''' + W'''_*) + 2\varepsilon_*^2 g g' + 2\Psi\Psi''',$$

$$N t_1 = 2\,\mathrm{Pr}\,(\Psi T'_{*1} - \Psi' T_{*1} + \Psi t'_1 - \Psi' t_1 + \delta(T_{*1} - \eta T'_{*1} + t_1 - \eta t'_1)),$$

$$
\begin{gathered}
t_2'' = 2\,\mathrm{Pr}\,((W_* - \eta U_*)t_2' + \Psi t_2' + \Psi T_{*2}' - \delta\eta(t_2' + T_{*2}')),\\
Kg = 2\Psi g' - 2\Psi' g + 2\delta(g - \eta g'),\\
\Psi = 0, \qquad \Psi'' = 0, \qquad g' = 0, \qquad t_1 = 0, \qquad t_2 = 0 \qquad (\eta = 0),\\
\Psi' = 0, \qquad \Psi'' = 0, \qquad g = 0, \qquad t_1 = 0, \qquad t_2 = 0 \qquad (\eta = +\infty),
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

где L, K, N — линейные операторы:

$$
L = D^4 - 2(W_* - \eta U_*)D^3 - 2W_*'''E,
$$

$$
K = D^2 - 2(W_* - \eta U_*)D + 2(W_*' - U_*)E, \qquad N = D^2 - 2\,\mathrm{Pr}\,((W_* - \eta U_*)D - (W_*' - U_*)E),
$$

$D = d/d\eta$ — оператор дифференцирования; E — единичный оператор.

Решения краевой задачи (5.1) построим в виде асимптотических рядов по степеням параметра δ:

$$
\begin{gathered}
\Psi = \delta\Psi_1 + \delta^2\Psi_2 + \ldots \qquad (\delta \to 0),\\
t_1 = \delta t_{11} + \delta^2 t_{12} + \ldots, \qquad t_2 = \delta t_{21} + \delta^2 t_{22} + \ldots, \qquad g = G_* + \delta G_1 + \ldots.
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Свойства функции G_* приведены выше. Из условий $G_*(0) = 1$, $g(0) = 1$ для функции G_1 в (5.2) выводим краевое условие $G_1(0) = 0$.

Из соотношения $U = \delta + U_*$ следует, что параметр $\varepsilon_*(U, \tau, \gamma)$ зависит от параметра δ. Параметр ε_* определяется при решении краевой задачи (5.1) с учетом дополнительного краевого условия $g(0) = 1$. Поскольку в задачу (5.1) параметр ε_* входит только в виде квадратичной функции ε_*^2, будем полагать, что параметр ε_*^2, как и функции Ψ, t_1, t_2, g, можно представить в виде асимптотического ряда по степеням параметра δ:

$$
\varepsilon_*^2 = \delta B_1 + \delta^2 B_2 + \ldots \qquad (\delta \to 0). \tag{5.3}
$$

Для определения коэффициентов асимптотических разложений (5.2), (5.3) подставляем эти разложения в краевую задачу (5.1) и приравниваем к нулю суммы коэффициентов при последовательных степенях параметра δ. Краевая задача для главных членов асимптотических рядов (5.2) имеет вид

$$
\begin{gathered}
L\Psi_1 = t_{11} + 2B_1 G_* G_*' - 2\eta W_*''', \qquad N t_{11} = 2\,\mathrm{Pr}\,(\Psi_1 T_{*1}' - \Psi_1' T_{*1} + T_{*1} - \eta T_{*1}'),\\
\Psi_1 = 0, \quad \Psi_1'' = 0, \quad t_{11} = 0 \quad (\eta = 0), \qquad \Psi_1' = 0, \quad \Psi_1'' = 0, \quad t_{11} = 0 \quad (\eta = +\infty).
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

Функция t_{12} находится путем решения линейной краевой задачи после интегрирования задачи (5.4).

Задача (5.4) содержит неизвестный параметр B_1, поэтому функции Ψ_1, t_{11} при интегрировании (5.4) можно представить в виде $\Psi_1 = \Psi_{b1} + B_1\Psi_{b2}$, $t_{11} = t_{b1} + B_1 t_{b2}$. Краевые задачи для функций Ψ_{b1}, t_{b1}, Ψ_{b2}, t_{b2} не содержат параметр B_1 и решаются численно. Параметр B_1 и функция G_1 находятся при решении линейной краевой задачи

$$
\begin{gathered}
KG_1 = 2(\Psi_{b1} G_*' - \Psi_{b1}' G_* + G_* - \eta G_*') + 2B_1(\Psi_{b2} G_*' - \Psi_{b2}' G_*),\\
G_1'(0) = 0, \qquad G_1(+\infty) = 0.
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

Задача (5.5) с учетом дополнительного условия $G_1(0) = 0$ решена численно, при этом параметры γ, τ изменялись на промежутке $[0, 1]$. На рис. 5 приведена зависимость параметра B_1 от параметра γ при $\tau = 1$. Установлено, что при $\tau \in [0, 1]$ параметр B_1 является отрицательным. В случае отсутствия термокапиллярного эффекта ($\gamma = 0$) параметр B_1 принимает значения $B_1 \approx -4{,}7265\tau^{2/5}$.

Из формулы (5.3) получаем соотношение

$$
\varepsilon_* = \pm\sqrt{\delta B_1} + O(\delta) \qquad (\delta \to 0),
$$

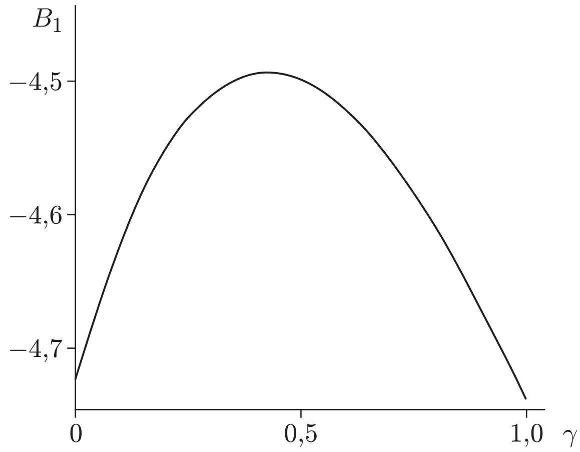

Рис. 5. Зависимость параметра B_1 от параметра γ при $\tau = 1$

из которого следует, что в точке бифуркации от решений, описывающих режим течения в отсутствие вращения в пограничном слое, могут ответвляться решения, описывающие два режима течения с вращением, различающиеся только направлением вращения. Эти режимы возникают при $U < U_*$.

Заключение. В работе исследовано возникновение вращения неоднородной жидкости в пограничном слое вблизи свободной границы при условии, что эта граница локально неравномерно охлаждается в окрестности оси симметрии. Рассчитано влияние термокапиллярного эффекта на режимы течения жидкости при наличии вращения и в его отсутствие. В частности, показано, что при наличии эффекта Марангони усиливается вращение в пограничном слое, вне которого вращение отсутствует. Вращение жидкости возникает при бифуркации режимов течения в отсутствие вращения. Наличие эффекта Марангони приводит к увеличению бифуркационных значений скорости внешнего потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. of the 3rd Europ. symp. on material science in space, Grenoble (France), 24–27 Apr. 1979. P.: Europ. Space Agency, 1979. P. 313–315.
2. **Пухначев В. В.** Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1061–1064.
3. **Batishchev V. A., Kuznetsov V. V., Pukhnachev V. V.** Marangoni boundary layers // Progr. Aerospace Sci. 1984. V. 26. P. 353–370.
4. **Батищев В. А., Хорошунова Е. В.** Возникновение вращательных режимов при термокапиллярном течении неоднородной жидкости в слое // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 5. С. 560–568.
5. **Изаксон В. Х., Юдович В. И.** О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 23–28.
6. **Вишик М. А., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–102.

Поступила в редакцию 17/IX 2019 г.,
после доработки — 29/XI 2019 г.
Принята к публикации 23/XII 2019 г.