

УДК 532.592

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ТЕЧЕНИИ НАД КОМБИНИРОВАННЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: makarenko@hydro.nsc.ru, maltseva@hydro.nsc.ru

Рассмотрена задача о стационарных внутренних волнах в докритических течениях стратифицированной жидкости над конечной последовательностью возвышений дна. Методом возмущений по малому параметру высоты препятствий построено асимптотическое решение второго порядка точности, учитывающее нелинейные эффекты. Исследованы интерференционные волновые структуры в ближнем волновом поле.

Ключевые слова: стратифицированные течения, внутренние волны.

Введение. Исследование атмосферных и океанических течений, формирующихся в окрестности обтекаемого рельефа, является актуальной задачей метеорологии и океанологии [1–6]. Одним из известных режимов течений является стационарная конфигурация в виде присоединенного цуга внутренних волн с периодической асимптотикой вниз по потоку. Такие волновые следы образуются при набегании докритического потока тяжелой неоднородной жидкости на финитную неровность подстилающей поверхности и называются подветренными волнами. Линейная теория подветренных волн развивалась во многих работах начиная с [7–9], в которых рассматривались течения над изолированным одиночным хребтом. В последние годы возрос интерес к важному для приложений, но малоисследованному вопросу о поведении волнового поля в переходной области над комбинированным препятствием в виде системы нескольких хребтов. Интерференция подветренных волн, образующихся при обтекании двух изолированных возвышений дна, экспериментально изучалась в работе [10]. Там же отмечено, что возникающие волновые структуры очень чувствительны к форме и расположению препятствий. В [11] с использованием топографических независимых переменных выведена и численно исследована приближенная математическая модель, описывающая взаимодействие столбовых мод длинных подветренных волн, возникающих над достаточно пологими смежными возвышениями. В [12] экспериментально изучались стационарные внутренние волны в течениях над синусоидальным рельефом участка дна конечной протяженности. В частности, обнаружена фрагментация ближнего волнового поля на несколько зон с разными характерными масштабами подветренных волн. В работе [13] предложена линейная полуаналитическая модель, описывающая указанный интерференционный эффект умеренно коротких внутренних волн. Целью данной работы является исследование влияния нелинейности на такие волновые структуры над комбинированным рельефом дна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00671) и в рамках Программы Президиума РАН № 23 (проект № 2).

© Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л., 2014

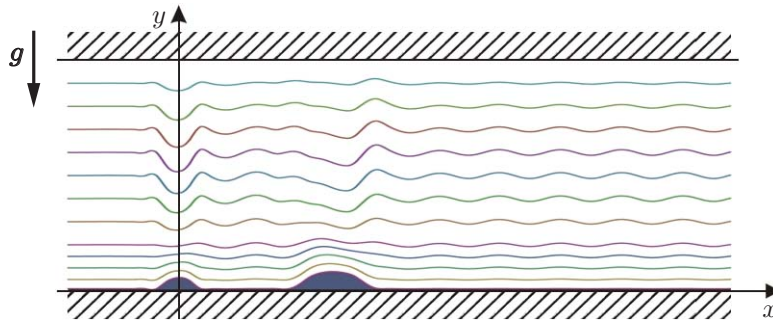


Рис. 1. Схема стратифицированного течения

1. Постановка задачи. Рассматриваются двумерные стационарные течения неоднородной несжимаемой жидкости в слое конечной глубины над неровным дном. Исходными являются уравнения Эйлера

$$\rho(uu_x + vv_y) + p_x = 0, \quad \rho(uv_x + vv_y) + p_y = -\rho g; \quad (1)$$

$$u\rho_x + v\rho_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad (2)$$

где u, v — компоненты вектора скорости; ρ — плотность жидкости; p — давление; g — ускорение свободного падения. Предполагается, что область течения ограничена сверху жесткой крышкой $y = H$, а неровность дна, задаваемая гладкой кривой $y = h(x)$, представляет собой систему конечного числа препятствий, возвышающихся над уровнем $y = 0$ (рис. 1). Граничные условия на дне и крышке имеют вид

$$v - uh_x = 0|_{y=h(x)}, \quad v = 0|_{y=H}. \quad (3)$$

Предполагается, что вверх по течению волны отсутствуют, поэтому поле скорости должно удовлетворять условию

$$(u, v) \rightarrow (U, 0) \quad (x \rightarrow -\infty).$$

В случае малой высоты препятствий a первое из граничных условий (3) часто заменяется упрощенной версией условия на дне, которое сносится на невозмущенный уровень $y = 0$: $v(x, 0) = U dh/dx$. Во многих случаях это существенно упрощает построение асимптотики волнового поля в дальнем следе за препятствием. В данной работе для моделирования структуры течения непосредственно над препятствием используется точная форма (3) граничного условия на дне.

Введем функцию тока ψ , полагая $u = \psi_y, v = -\psi_x$. В результате интегрирования уравнения для плотности (2) получаем зависимость $\rho = \rho(\psi)$ с известным в силу условия при $x \rightarrow -\infty$ профилем плотности $\rho(\psi) = \rho_\infty(\psi/U)$. Исключение давления p из уравнений импульса (1) позволяет свести систему уравнений Эйлера к эквивалентному квазилинейному эллиптическому уравнению второго порядка

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \frac{\rho'(\psi)}{\rho(\psi)} \left(gy - \frac{g\psi}{U} + \frac{1}{2} (|\nabla\psi|^2 - U^2) \right) = 0 \quad (4)$$

(уравнение Дюбрей-Жакотэн — Лонга). Граничные условия (3) на дне и крышке, являющихся линиями тока, принимают форму

$$\psi = 0|_{y=h(x)}, \quad \psi = UH|_{y=H}. \quad (5)$$

Обычным предположением в теории подветренных волн является требование постоянства частоты плавучести N , определяемой формулой

$$N^2(y) = -g\rho'_\infty(y)/\rho_\infty(y).$$

В этом случае плотность ρ_∞ зависит от высоты по экспоненциальному закону $\rho_\infty(y) = \rho_0 \exp(-N^2 y/g)$ (ρ_0 — значение плотности жидкости при $y = 0$).

Для формулировки задачи в безразмерных переменных введем характерные масштабы величин и определим безразмерные параметры. Основными безразмерными константами являются параметр Буссинеска σ и квадрат обратного денсиметрического (плотностного) числа Фруда λ , определяемые формулами

$$\sigma = N^2 H / g, \quad \lambda = \sigma g H / U^2.$$

Величина σ задает наклон профиля плотности экспоненциально стратифицированной жидкости в состоянии покоя, а параметр λ является мерой до- или сверхкритичности набегающего потока. Отметим, что справедливо равенство $\lambda = F^{-2}$, где $F = U / (NH)$ — стандартное число Фруда. В то же время справедливо соотношение $\lambda = \text{Lo}^2$, где $\text{Lo} = NH / U$ — безразмерная величина, известная как число Лонга. В данной работе в качестве естественного малого параметра используется безразмерная высота препятствия $\alpha = a / H$. Выбирая толщину слоя жидкости H в качестве масштаба длины и скорость U в качестве масштаба скорости жидкости, введем безразмерные переменные

$$(x, y, h) = H (\bar{x}, \bar{y}, \bar{h}), \quad \psi = U H \bar{\psi}.$$

В этих переменных уравнение, определяющее форму поверхности дна, записывается в виде $\bar{y} = \alpha \bar{h}(\bar{x})$, а функция, задающая профиль плотности невозмущенного течения, принимает безразмерный вид $\rho_\infty / \rho_0 = \exp(-\sigma \bar{y})$. Опуская черту над буквами, из (4), (5) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + \psi_{yy} + \lambda(\psi - y) &= \sigma(\psi_x^2 + \psi_y^2 - 1)/2, \\ \psi &= 0 \Big|_{y=\alpha h(x)}, \quad \psi = 1 \Big|_{y=1}, \\ \psi(x, y) &\rightarrow y \quad (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \tag{6}$$

2. Преобразование Мизеса и асимптотическое решение. Поскольку в случае криволинейной формы дна построение асимптотического решения затруднено, используем полулагранжевы независимые переменные Мизеса (x, ψ) с искомой формой линий тока в виде $y = Y(x, \psi)$. При этом функция Y должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{Y_x}{Y_\psi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{1 + Y_x^2}{Y_\psi^2} + \lambda(\psi - Y) &= \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{1 + Y_x^2}{Y_\psi^2} - 1 \right), \\ Y(x, 0) &= \alpha h(x), \quad Y(x, 1) = 1; \\ Y(x, \psi) &\rightarrow \psi \quad (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи (7) строится с помощью метода возмущений по малому параметру α . Подставляя в эти уравнения степенное разложение

$$Y(x, \psi) = \psi + \alpha w_0(x, \psi) + \alpha^2 w_1(x, \psi) + \dots,$$

нетрудно показать, что нелинейное дифференциальное уравнение (7) сводится к линейному в главном порядке по α . Отметим, что нелинейные члены исходного дифференциального уравнения в (6) содержат только параметр Буссинеска σ , характеризующий слабую стратификацию, а параметр α , задающий высоту препятствия, имеется лишь в граничном условии на дне. При использовании преобразования Мизеса роли этих параметров меняются таким образом, что геометрический параметр α также учитывает нелинейность в рассматриваемой постановке. В результате получаем уравнения для коэффициента w_0

$$\begin{aligned} w_{0xx} + w_{0\psi\psi} - \sigma w_{0\psi} + \lambda w_0 &= 0 \quad (0 < \psi < 1), \\ w(x, 0) &= h(x), \quad w(x, 1) = 0, \\ w_0 &\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

и уравнения для коэффициента w_1

$$\begin{aligned} w_{1xx} + w_{1\psi\psi} - \sigma w_{1\psi} + \lambda w_1 &= f(w_0) \quad (0 < \psi < 1), \\ w_1(x, 0) &= w_1(x, 1) = 0, \\ w_1 &\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \end{aligned}$$

где

$$f(w) = (w_x w_\psi)_x + (w_x^2 + 3w_\psi^2)_\psi / 2 - \sigma(w_x^2 + 3w_\psi^2) / 2.$$

При построении решений этих уравнений целесообразно использовать разложение по обобщенным собственным функциям нормальных мод

$$\varphi_n(x, \psi) = e^{ikx} e^{\sigma\psi/2} \sin(\pi n\psi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

соответствующим собственным значениям $\lambda_n = \pi^2 n^2 + k^2 + \sigma^2/4$ с волновым числом k . Параметрическая область m -й моды определяется значениями плотностного числа Фруда λ , удовлетворяющими неравенствам

$$\pi^2 m^2 + \sigma^2/4 < \lambda < \pi^2 (m+1)^2 + \sigma^2/4. \quad (8)$$

Для заданного значения λ , удовлетворяющего указанному выше условию докритичности (8), набор волновых чисел

$$k_n = \sqrt{\lambda - \sigma^2/4 - \pi^2 n^2} \quad (n = 1, \dots, m) \quad (9)$$

фиксирует длины волн в базисных гармониках асимптотики волнового следа за препятствием. Таким образом, при известной форме дна $h(x)$ функция w_0 имеет вид

$$w_0(x, \psi) = e^{\sigma\psi/2} \left(y(\psi) h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} w_0^{(n)}(x) \sin(\pi n\psi) \right), \quad (10)$$

где функция

$$y(\psi) = \frac{\sin(k_0(1-\psi))}{\sin k_0} \quad (11)$$

удовлетворяет уравнению гидростатического приближения $y_{\psi\psi} + k_0^2 y = 0$ с волновым числом “нулевой” моды $k_0 = \sqrt{\lambda - \sigma^2/4}$ и граничным условиям $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, а ряд в правой части (10) представляет собой негидростатическую часть решения. Выражения для коэффициентов $w_0^{(n)}$ в (10) имеют вид

$$w_0^{(n)}(x) = -\frac{c_n}{k_n} \int_{-\infty}^x \sin(k_n(x-s)) h''(\xi) d\xi \quad (n = 1, \dots, m),$$

где волновые числа k_n определяются формулой (9), и

$$w_0^{(n)}(x) = \frac{c_n}{2k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_n|x-s|} h''(\xi) d\xi \quad (n \geq m+1),$$

где $k_n = \sqrt{\pi^2 n^2 + \sigma^2/4 - \lambda}$. В этих формулах для $w_0^{(n)}$ вещественные числа c_n являются коэффициентами Фурье разложения функции $y(\psi)$ в (11) по тригонометрическому базису $\{\sin(\pi n\psi)\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично можно записать представление в виде ряда для функции $w_1(x, \psi)$, в котором используется найденное на первом шаге выражение для w_0 в нелинейной правой части $f(w_0)$ уравнения для w_1 .

В случае финитной неровности дна учет условия вверх по потоку в приведенном выше решении обеспечивает экспоненциальное затухание w_0, w_1 при $x \rightarrow -\infty$ и экспоненциально быстрый выход на периодическую по x асимптотику

$$w_j(x, \psi) \sim e^{\sigma\psi/2} \sum_{n=1}^m (a_j^{(n)} \sin(k_n x) + b_j^{(n)} \cos(k_n x)) \sin(\pi n \psi) \quad (j = 0, 1)$$

с постоянными $a_j^{(n)}, b_j^{(n)}$ при $x \rightarrow +\infty$. Наличие такой пары числовых параметров в каждом приближении по α для каждой моды $1 \leq n \leq m$ означает, что амплитуда и фаза волны в течении за препятствием формируются нелинейным образом. При этом длина волны в дальнем следе определяется дисперсионным соотношением (9) с волновыми числами $k_n = k_n(\lambda)$. Подобное математическое описание нелинейной дифракции стратифицированного течения в целом аналогично бифуркационной схеме, предложенной в работе [14] при решении задачи о докритических течениях однородной жидкости со свободной поверхностью над неровным дном.

3. Результаты расчетов. Проведены серии расчетов для препятствий в виде конечной последовательности колоколообразных профилей Гаусса (необязательно одинаковых), а также для синусоидальной формы участка дна конечной протяженности. Значения управляющих параметров выбирались с учетом известных данных об условиях применимости рассматриваемой схемы течения. Так, известно, что формированию стационарной структуры подветренных волн может препятствовать распространение возмущений навстречу набегающему потоку (блокировка течения препятствием). Указанный гидравлический эффект отсутствует, если выполнено неравенство $2U/(Na) < 1$ (см. [4, 10]) или (в используемых в данной работе безразмерных переменных) при $\alpha\sqrt{\lambda} < 2$, что выполнялось во всех расчетах. Ниже приводятся примеры картин внутренних стационарных волн главной моды $m = 1$ в (8), для которых учитывалось 10 гармоник в разложении вида (10) как для линейного приближения w_0 , так и для нелинейной поправки w_1 . В этих примерах $\alpha = 0,04$, $\lambda = 17$, значение параметра Буссинеска $\sigma = 0,2$ соответствует стратификации приземных атмосферных течений.

На рис. 2 показано влияние нелинейности (сплошные линии тока) на волновые структуры в течении над двумя колоколообразными препятствиями. Существенное отличие от линейного приближения наблюдается только над вторым, более высоким препятствием. При этом дальний волновой след практически не претерпевает возмущений. Иная ситуация возникает в случае течения над участком дна с 10 возвышениями, показанного на рис. 3 в линейном приближении и с учетом нелинейности. Линейная дисперсия волн над такой достаточно протяженной неровностью дна приводит к распаду всего волнового поля на отдельные зоны с разными пространственными масштабами волн. Следует отметить наличие четко выраженной границы между областью вынужденных волн непосредственно над обтекаемой поверхностью, где период волн совпадает с периодом линии дна, и областью слабомодулированных свободных волн высоко над препятствием. При этом волновая граница между указанными областями имеет квазипериодический характер. Подобное разделение областей течения над синусоидальным препятствием наблюдалось в экспериментах, описанных в работе [12], где указанное явление объяснялось влиянием вязкости в пограничном слое. В данной работе этот эффект описывается моделью невязкой жидкости.

На рис. 3,б видно, что нелинейность обуславливает усиление модуляции волновых пакетов в зоне течения непосредственно над неровностью дна, а также увеличение амплитуды волн и сдвига фазы в следе за препятствиями. Подобное изменение фаз известно для столбовых мод внутренних волн в слое жидкости неограниченной толщины над одиночным препятствием [15, 16]. Для слоя жидкости конечной толщины модулированные

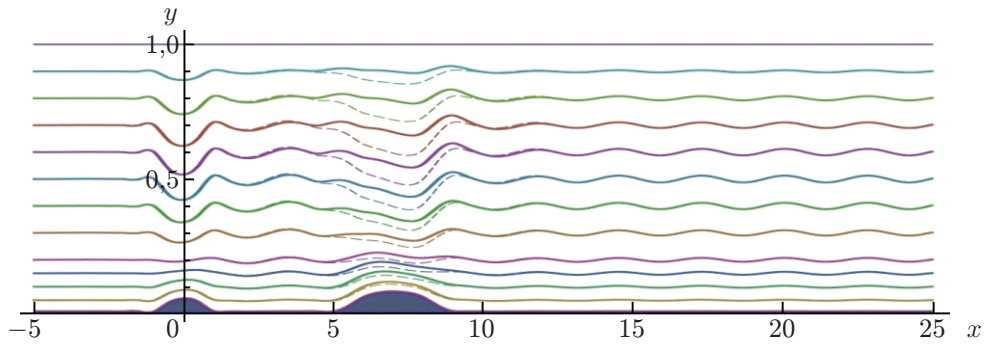


Рис. 2. Течение над двумя изолированными возвышениями:
сплошные линии — линии тока, полученные в линейном приближении, штриховые —
линии тока, полученные в нелинейном приближении

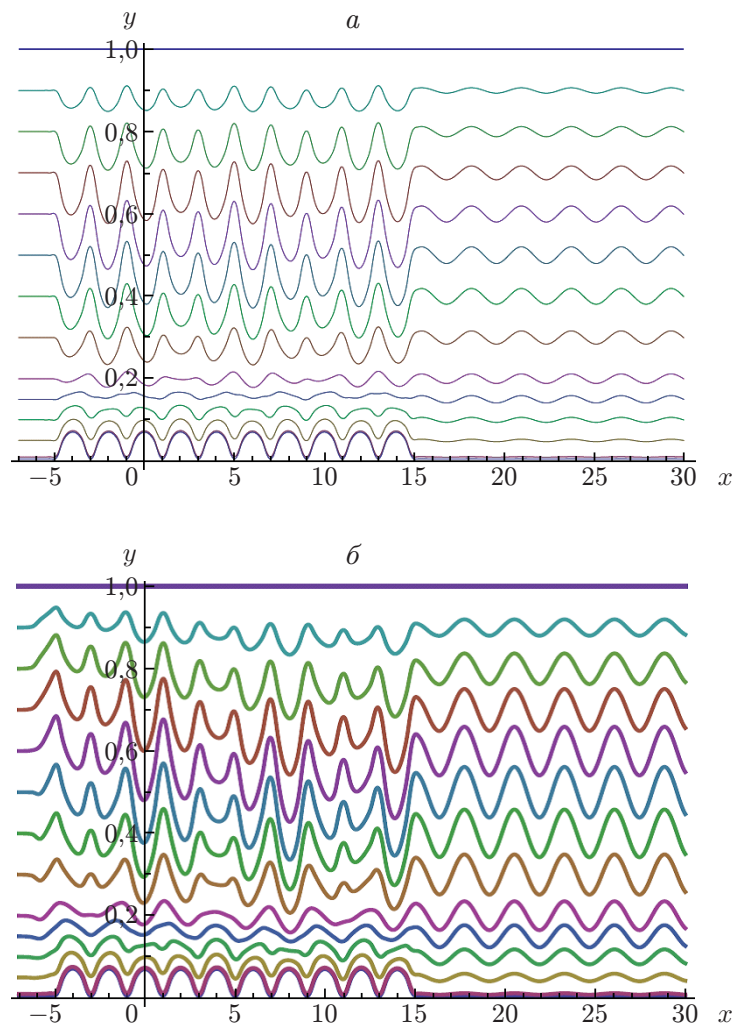


Рис. 3. Волновые структуры над комбинированным препятствием:
a — линейное приближение, *б* — нелинейное приближение

волновые пакеты оказываются запертыми в ограниченной области над финитным препятствием, поэтому все изменения происходят при переходе из зоны вынужденных волн над препятствием в подветренную область свободных периодических волн.

Заключение. В работе рассмотрена полуаналитическая модель стационарных волн в докритическом потоке стратифицированной жидкости над комбинированным препятствием. Используемый метод основан на асимптотическом анализе уравнения Дюбрей-Жакотен — Лонга, записанного в переменных Мизеса. Данный подход обеспечивает выполнение точного граничного условия на дне в главном асимптотическом порядке по параметру высоты препятствий. Как следствие предлагаемая модель адекватно описывает чувствительность волновых структур к возмущениям геометрии области течения и нелинейным возмущениям течения. Показано, что нелинейная поправка может оказывать существенное влияние на поведение линий тока в локальных областях течения, при этом структурные элементы картины волнового поля сохраняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Long R. R.** Finite amplitude disturbances in the flow of inviscid rotating and stratified fluids over an obstacle // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1972. V. 4. P. 69–92.
2. **Yih C. S.** *Stratified flows.* N. Y.: Acad. Press, 1980.
3. **Wurtele M. G., Sharman R. D., Datta A.** Atmospheric lee waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1996. V. 28. P. 429–476.
4. **Baines P. G.** *Topographic effects in stratified flows.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
5. **Grimshaw R.** *Environmental stratified flows.* Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001.
6. **Nappo C. J.** *An introduction to atmospheric gravity waves.* San Diego: Acad. Press, 2002.
7. **Дородницын А. А.** Возмущения воздушного потока, вызванные неровностями на поверхности Земли // *Тр. Гл. геофиз. обсерватории.* 1938. № 6, вып. 23. С. 3–17.
8. **Lyra G.** Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre // *Z. angew. Math. Mech.* 1943. Bd 23. S. 1–28.
9. **Queney P.** The problem of air flow over mountains: A summary of theoretical studies // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 1948. V. 29. P. 16–26.
10. **Gyüre B., János I. M.** Stratified flow over asymmetric and double bell-shaped obstacles // *Dynam. Atmospher. Oceans.* 2003. V. 37. P. 155–170.
11. **Humi M.** Long’s equation in terrain following coordinates // *Nonlinear Process. Geophys.* 2009. V. 16. P. 533–541.
12. **Aguilar D., Sutherland B. R., Muraki D. J.** Generation of internal waves over sinusoidal topography // *Deep-Sea Res.* 2006. V. 53. P. 96–115.
13. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** Interference of lee waves over mountain ranges // *Nat. Hazards Earth System Sci.* 2011. V. 11. P. 27–32.
14. **Налимов В. И.** Стационарные поверхностные волны над неровным дном // *Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики.* 1982. Вып. 58. С. 108–156.
15. **Кожевников В. Н.** Орографические возмущения в двумерной стационарной задаче // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1968. Т. 4, № 1. С. 33–52.
16. **Miles J. W.** Lee waves in a stratified flow. Pt 1. Thin barrier // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. P. 549–568.