Физика горения и взрыва

1

1968 г.

К ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ В ОДНОРОДНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

И. С. Любченко

(Москва)

В работе [1] показано, что одномерный процесс горения газовой смеси для случая одной реагирующей компоненты и химической реакции первого порядка определяется на интервале $-\infty < x < \infty$ системой

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[k\frac{dT}{dx}\right] - u\rho c\frac{dT}{dx} + h\Phi(a, T) = 0, \\ &\frac{d}{dx}\left[D\rho\frac{da}{dx} + \gamma D\frac{\rho a}{T}\cdot\frac{dT}{dx}\right] - u\rho\frac{da}{dx} - \Phi(a, T) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

при условиях

$$x = -\infty, \quad T = T_0 > 0, \quad a = a_0 > 0; \quad x = \infty, \quad a = 0, \quad (2)$$

где T — температура смеси; a — концентрация активного вещества; D — коэффициент диффузии; ρ — плотность вещества; c — его теплоемкость; k — коэффициент теплопроводности; γ — постоянная термодиффузии; h — тепловой эффект реакции; $\Phi(a, T)$ — скорость реакции, причем

$$\Phi(a, T) = B\rho a \exp\left(-\frac{A}{RT}\right) \text{ при } T \in (T_1, T_2],$$

$$\Phi(a, T) \equiv 0 \text{ при } T \in [T_0, T_1]; \quad (3)$$

B — предэкспоненциальный фактор; A — энергия активации. Требуется определить скорость горения u, функции $T(x)$, $a(x)$. Предполагается, что k, ρ, D — функции температуры T и $c(T) = \text{const}$. Из системы (1) при условиях (2) вытекает, что $T(x)$ — монотонно возрастающая функция и

$$T(\infty) \equiv T_2 = T_0 + \frac{h a_0}{c}. \quad (4)$$

Сведем задачу (1), (2) к безразмерному виду, полагая

$$\alpha = \frac{a}{a_0}, \quad z = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_0}, \quad y = \frac{k(z)\, e^{x/2}\cdot\dfrac{dT}{dx}}{(T_2 - T_0)\sqrt{k(0)\,\rho(0)\,c\,B}},$$

$$\varkappa = \frac{A}{RT_2}, \quad m = u\rho\sqrt{\frac{c\,e^{\varkappa}}{B\,k(0)\,\rho(0)}}, \quad \nu(z) = \frac{D\rho c}{k},$$

$$\lambda = 1 - \frac{T_0}{T_2}, \quad f(z) = \frac{k(z)}{k(0)} \cdot \frac{1}{1-\lambda z}, \tag{5}$$

$$\varphi(\alpha, z) = \alpha \cdot f(z) \exp\left(-\frac{\varkappa\lambda z}{1-\lambda z}\right) \text{ при } z \in [0, \beta),$$

$$\varphi(\alpha, z) \equiv 0 \text{ при } \beta \leqslant z \leqslant 1, \text{ где } \beta = \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_0}, \quad 0 < \beta < 1.$$

В результате преобразований (5) для определения скорости распространения фронта экзотермической реакции m и функций $y(z, m)$, $\alpha(z, m)$ на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ имеем, как показано в [1], задачу

$$\left.\begin{aligned} & y\frac{dy}{dz} + my - \varphi(\alpha, z) = 0, \\ & y\frac{d}{dz}\left[\nu(z)\,y\frac{d\alpha}{dz} - \frac{\lambda\gamma\nu(z)}{1-\lambda z}\alpha \cdot y\right] + my\frac{d\alpha}{dz} - \varphi(\alpha, z) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$z = 0, \quad y = 0, \quad \alpha = 0. \quad y\frac{d\alpha}{dz} = 0; \quad z = 1, \quad y = 0. \tag{6'}$$

Ранее в работах [1—7] данная задача при $\gamma = 0$ рассматривалась с целью доказательства теорем существования и единственности, а также получения приближенных формул, оценивающих параметр m.

Целью настоящей работы является выяснение условий, при которых возможно построение асимптотических по параметру m формул для решения задачи (6), (6′), а следовательно, приближенное определение m, $y(z, m)$, $\alpha(z, m)$.

Поскольку система (6) имеет первый интеграл, то задача, эквивалентная (6), (6′), приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} & y\frac{dy}{dz} + my - \varphi(\alpha, z) = 0, \\ & \nu(z)\,y\frac{d\alpha}{dz} - \frac{\lambda\gamma\nu(z)}{1-\lambda z}\alpha \cdot y + m(\alpha - z) - y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$z=0, \quad y=0, \quad \alpha=0. \tag{7'}$$

$$z=1, \quad y=0. \tag{7''}$$

Учитывая, что при $\beta \leqslant z \leqslant 1$ $\varphi(\alpha, z) \equiv 0$, найдем на этом отрезке из первого уравнения системы (7) $y(z, m)$:

$$y(z, m) = m(1 - z). \tag{8}$$

В соответствии с (8) заменим условие (7″) следующим

$$z = \beta, \quad y = m(1 - \beta) \tag{9}$$

и на отрезке $0 \leqslant z \leqslant \beta$ $(0 < \beta < 1)$ для определения параметра m и функций $y(z, m)$, $\alpha(z, m)$ имеем задачу (7), (7′), (9). При этом полагаем, что

$$\lim_{z \to \beta - 0} \varphi(\alpha, z) = \alpha(\beta, m) f(\beta) \exp\left(-\frac{\varkappa\lambda\beta}{1-\lambda\beta}\right).$$

Исследуя задачу, рассмотрим четыре случая: 1) $\nu(z) \equiv 1$, $\gamma = 0$; 2) $\nu(z) > 1$, $\gamma \neq 0$; 3) $0 < \nu(z) < 1$, $\gamma > 0$; 4) $\nu(z) \equiv 0$, $\gamma = 0$, где первые три относятся к горению газовой смеси, а последний к распространению пламени в конденсированной среде.

1. СЛУЧАЙ ПОДОБИЯ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ

При $\nu(z) \equiv 1$, $\gamma = 0$ из второго уравнения (7) и условия (7′) следует, что $\alpha \equiv z$ и задача (7), (7′), (9) преобразуется к виду

$$y\frac{dy}{dz} + my - \varphi(z, z) = 0; \quad z = 0, \quad y = 0. \tag{1.1}$$

$$z = \beta, \quad y = m(1-\beta), \quad 0 < \beta < 1. \tag{1.2}$$

Точка $z=0$, $y=0$ является особой для уравнения (1.1) и через нее проходят две интегральные кривые, но, вследствие монотонного возрастания функции $T(x)$, $y(z, m) > 0$ при $z > 0$, и смысл имеет только одна с наклоном

$$y'(0, m) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{m^2+4} - m\right],$$

причем при $z \to 0$ $y(z, m) = y'(0, m)z + O(z)$.

В работе [1] показано, что решение задачи (1.1) с ростом параметра m монотонно убывает при любом фиксированном $z \in (0, \beta]$ и имеет место неравенство

$$y_0(z) - mz < y(z, m) < y_0(z), \quad z \in (0, \beta], \tag{1.3}$$

где $y_0(z)$ является решением задачи (1.1) при $m=0$:

$$y_0(z) = \left\{2\int_0^z sf(s)\exp\left(-\frac{\varkappa\lambda s}{1-\lambda s}\right)ds\right\}^{1/2}. \tag{1.4}$$

Там же, согласно условию (1.2), получена следующая оценка искомого параметра m

$$y_0(\beta) < m < \frac{y_0(\beta)}{1-\beta} \tag{1.5}$$

и при $\varkappa = 7 \div 20$, $\lambda = 0{,}75 \div 0{,}9$ в случае химической реакции 1-го порядка рекомендуется приближенная формула скорости распространения фронта пламени

$$m \approx \frac{\sqrt{2}}{\varkappa\lambda}. \tag{1.6}$$

Расчеты, проведенные в [6], основанные на численном интегрировании задачи (1.1), (1.2), показали, что формула (1.6) дает результаты при нижних значениях $\varkappa$, λ из вышеуказанных интервалов с точностью до $15 \div 20\%$ и с ростом величины $\varkappa\lambda$ параметр m уменьшается, а точность возрастает. В целях уточнения формулы (1.6) и определения функции $y(z, m)$, а следовательно, и температурного поля смеси $T(x)$, применим метод малого параметра, потребовав выполнение условия

$$\frac{y_0(\beta)}{1-\beta} < 1. \tag{1.7}$$

Очевидно, что при указанных значениях $\varkappa$ и λ условие (1.7) имеет место, т. е. $m<1$, так как при

$$\beta_0 = 1 - y_0(1) \tag{1.7'}$$

$$\max_{0 \leqslant z \leqslant \beta_0} \varphi(z, z) \gg \lim_{z \to \beta_0 - 0} \varphi(z, z) \approx 0.$$

Этот вывод следует также из формулы (1.6) и расчетов, проведенных в [6].

Будем искать решение задачи (1.1) в виде ряда

$$y(z, m) = y_0(z) + my_1(z) + m^2 y_2(z) + \ldots \tag{1.8}$$

Подставляя ряд (1.8) в уравнение (1.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях m, получим

$$\left.\begin{aligned} y_0' &= \frac{\varphi(z, z)}{y_0}, \quad y_1' = -\left[1 + \frac{y_0'}{y_0} y_1\right], \\ y_2' &= -\frac{1}{y_0}\left[y_0' y_2 + y_1(1 + y_1')\right], \\ y_n' &= -\frac{1}{y_0}\left[y_0' y_n + y_{n-1}(1 + y_1') + \sum_{k=1}^{n-2} y_k y_{n-k}'\right] \\ &\qquad (n = 3, 4, 5, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Присоединяя к дифференциальным уравнениям (1.9) начальные условия, вытекающие из условия (1.1),

$$y_n\big|_{z=0} = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

найдем $y_0(z)$ (см. (1.4)), $y_1(z)$ и т. д.

$$\left.\begin{aligned} y_1(z) &= -\frac{1}{y_0(z)} \cdot \int_0^z y_0(s)\,ds, \quad y_2(z) = -\frac{1}{y_0(z)} \cdot \int_0^z y_1(s)(1 + y_1'(s))\,ds, \\ y_n(z) &= -\frac{1}{y_0(z)} \cdot \int_0^z \left[y_{n-1}(s)(1 + y_1'(s)) + \sum_{k=1}^{n-2} y_k(s)\, y_{n-k}'(s)\right] ds \\ &\qquad (n = 3, 4, \ldots). \end{aligned}\right\}$$

Ограничиваясь затем отрезком ряда из N членов с помощью условия (1.2), найдем приближенное значение параметра m из уравнения

$$\sum_{n=0}^{N} m^n y_n(\beta_0) = m(1 - \beta_0),$$

определив его наименьший корень, например[1],

$$
\left.
\begin{aligned}
N = 1, \quad & m \approx \frac{y_0^2(\beta_0)}{(1-\beta_0)\, y_0(\beta_0) + \int\limits_0^{\beta_0} y_0(s)\, ds}, \\
N = 2, \quad & m \approx \frac{1 - \beta_0 + y_1(\beta_0)}{2y_2(\beta_0)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4y_0(\beta_0)\, y_2(\beta_0)}{(1 - \beta_0 + y_1)(\beta_0)^2}} \right].
\end{aligned}
\right|
$$

Вычислив параметр m и отрезок ряда (1.8) из N членов

$$
Y_N(z, m) = \sum_{n=0}^{N} m^n y_n(z), \tag{1.10}
$$

с точностью до сдвига по оси x, найдем зависимости $z = z(x) = \alpha(x)$ с помощью одной квадратуры

$$
x = \frac{e^{\varkappa/2}}{\sqrt{k(0)\, \rho(0)\, c B}} \int^{z} \frac{k(s)\, ds}{y(s, m)},
$$

где нижний предел интеграла произволен и

$$
y(z, m) \approx \begin{cases} Y_N(z, m) \text{ при } 0 \leqslant z < \beta_0, \\ m(1 - z) \text{ при } \beta_0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}
$$

Температурное поле газовой смеси вычисляется по формуле

$$
T(x) = T_2 \cdot [1 - \lambda z(x)],
$$

а массовая скорость распространения фронта пламени $(u\rho)_0$, согласно (5), может быть представлена в виде

$$
(u\rho)_0 = m e^{-\varkappa/2} \sqrt{\frac{B k(0)\, \rho(0)}{c}}.
$$

Покажем теперь, что для достаточно больших значений $\varkappa\lambda$ приближение (1.10) действительно имеет асимптотический характер, т. е. при $0 \leqslant z \leqslant b$

$$
y(z, m) = Y_N(z, m) + 0(m^{N+1}). \tag{1.11}
$$

Этим мы докажем неформальность разложения (1.8) и окончательно обоснуем предлагаемый нами метод решения задачи (1.1), (1.2).

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$
y' = F, \quad F = \frac{1}{y}\, \varphi(z, z) - m
$$

и, воспользовавшись неравенством (1.3), получим оценку

---

[1] При $N=1$ из этого уравнения легко получить формулу (1.6).

$$|F_y| \leqslant M(z, m) = \frac{z\,\Phi(z)}{[y_0(z) - mz]^2}, \quad \Phi(z) = f(z)\exp\left(-\frac{\varkappa\lambda z}{1-\lambda z}\right)$$

при $0 \leqslant z \leqslant \beta < 1$. Учитывая выпуклость функции $y_0(z)$ и замечая, что $y_0'(0) = 1$, потребуем выполнения неравенства

$$m < \frac{y_0(\beta)}{\beta}, \quad (0 < \beta < 1). \tag{1.12}$$

Тогда при $z \in (0, \beta]$ $y_0(z) - mz > 0$ и $M(z, m)$ при $z > 0$ особенностей не имеет, а в точке $z = 0$ $M(z, m)$ имеет простой полюс с вычетом $\mathrm{Res}[M(z, m); 0] = (1-m)^{-2}$.

Оценим теперь невязку $z_N(z, m)$ от подстановки (1.10) в уравнение (1.1). Очевидно, что

$$r_0(z, m) = m\,y_0(z),$$

$$r_1(z, m) = m^2 y_1(z)\,[1 + y_1'(z)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_N(z, m) = m^{N+1}\left[y_N(z)\,(1 + y_1'(z)) + \sum_{k=1}^{N-1} y_k(z)\,y_{N-k+1}'(z)\right].$$

Поскольку $0 \leqslant z \leqslant \beta$ $y_0(z) \leqslant \mathrm{const} \cdot z$, то получим

$$|r_N(z, m)| \leqslant \mathrm{const} \cdot z \cdot m^{N+1}, \; z \in [0, \beta]. \tag{1.13}$$

Найдем далее оценку модуля погрешности $\Delta y = y - Y_N$, рассматривая задачу

$$\frac{dw}{dz} - M(z, m)\,w = |r_N(z, m)|, \; z = 0, \; w = 0.$$

Ее решение представляется в виде несобственного интеграла

$$w(z, m) = \int_0^z |r_N(s, m)| \cdot \exp\left[\int_s^z M(t, m)\,dt\right] ds,$$

который при условии

$$m < \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right) \tag{1.14}$$

сходится абсолютно, и в силу (1.13) справедлива оценка

$$w(z, m) < C_1 \cdot m^{N+1}, \quad z \in [0, \beta],$$

где C_1 — некоторая постоянная, не зависящая от m. Тогда, как известно [8], на отрезке $0 \leqslant z \leqslant \beta$, $\beta \in (0, 1)$

$$|y(z, m) - Y_N(z, m)| < C_1 \cdot m^{N+1},$$

что эквивалентно представлению (1.11). Поскольку доказательство асимптотики требует выполнения неравенств (1.12), (1.14), то, учитывая верхнюю оценку (1.5), потребуем, чтобы

$$\frac{y_0(\beta)}{1-\beta} < \frac{y_0(\beta)}{\beta}, \quad \frac{y_0(\beta)}{1-\beta} < \frac{1}{2}(2-\sqrt{2}).$$

Отсюда следует требование к параметру β

$$\beta < \min\left\{0{,}5;\ 1 - \frac{y_0(1)}{0{,}5\cdot(2-\sqrt{2})}\right\}, \tag{1.15}$$

что, в свою очередь, обеспечивается при достаточно больших значениях $\varkappa\lambda$. Заметим, что условие (1.15) является более жестким, чем условие (1.7), но они оба являются только достаточными (а не необходимыми) и поэтому несколько завышены требования на $\varkappa\lambda$. Результаты же численного интегрирования задачи (1.1), (1.2) подтверждают тот факт, что параметр m остается меньше единицы при $\varkappa\lambda > 7$ [6]:

$\varkappa$	λ	$\varkappa\lambda$	m
7,94	0,884	7	0,1715
12,1	0,825	10	0,1396
14,2	0,842	12	0,1150

2. СЛУЧАЙ СМЕСИ ГАЗОВ РАЗЛИЧНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ВЕСА

Рассмотрим теперь случай $\nu(z) > 0$, $\gamma \neq 0$. При этом учтем, что функция $\nu(z)$ при $z \in [0, 1]$ не имеет нулей и особенностей и при $0 < \nu(z) < 1$ постоянная термодиффузии всегда положительна $\gamma > 0$, а при $\nu(z) > 1$, как правило, $\gamma < 0$ [1]. Из второго уравнения системы (7) следует, что

$$\alpha(z, m) = z + \int_0^z \left[\frac{1-\nu(s)}{\nu(s)} + \frac{\gamma\lambda s}{1-\lambda s}\right]\left(\frac{1-\lambda s}{1-\lambda z}\right)^{\gamma} \times$$

$$\times \exp\left[-m\int_s^z \frac{dt}{\nu(t)\, y(t, m)}\right] ds. \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай $\nu(z) > 1$, $\gamma < 0$. Тогда при условии

$$|\gamma| < \frac{1}{\bar{\nu}}\left[\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-\lambda} - 1\right], \quad \bar{\nu} = \max_{0 \leqslant z \leqslant 1} \nu(z)$$

функция $\Psi(z) > 0$ $(0 < z \leqslant \beta)$, где

$$\Psi(z) = z - \int_0^z \left[\frac{\nu(s)-1}{\nu(s)} + \frac{|\gamma|\lambda s}{1-\lambda s}\right]\left(\frac{1-\lambda z}{1-\lambda s}\right)^{|\gamma|} ds,$$

и при $0 < z \leqslant \beta$ имеют место неравенства

$$\left.\begin{aligned} \Psi(z) < \alpha(z, m) < z, \\ y_2(z, \bar{m}_2) < y(z, m) < y_1(z, \bar{m}_1). \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Функции $y_i\ (z,\ \bar{m}_i)$ $(i=1,\ 2)$ являются решением задачи (1.1), (1.2), где соответственно $\varphi_1=\varphi(z,\ z)$, $\varphi_2=\varphi[\Psi(z),\ z]$.

Поскольку существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) и из особой точки $z=0$, $y=0$, $\alpha=0$ системы (7) выходит интегральная кривая $\{y(z,\ m),\ \alpha(z,\ m)\}$ с наклоном

$$y'(0,\ m)=\frac{\sqrt{m^2+4\nu(0)}-m}{2\nu(0)}>0,\quad \alpha'(0,\ m)=$$

$$=\frac{1}{\nu(0)}\left[1-\frac{2m(1-\nu(0))}{m+\sqrt{m^2+4\nu(0)}}\right]>0,$$

то в силу (2.2) существует решение задачи (7), (7′), (9), а искомый параметр m нашей задачи удовлетворяет неравенству $\bar{m}_2<m<\bar{m}_1$, где $\bar{m}_1<1$ при достаточно больших значениях $\varkappa\lambda$. Заметим, что в работах [4, 5] при $\nu(z)>1$ приведены примеры неединственности задачи (7), (7′), (9), а следовательно, возможно наличие нескольких значений параметра m, заключенных между $\bar{m}_2$ и $\bar{m}_1<1$.

Рассмотрим теперь случай $0<\nu(z)<1$, $\gamma>0$ и найдем условие, при котором здесь также параметр $m<1$. Предварительно заметим, что из (2.1) следует оценка

$$\alpha(z,\ m)>z\qquad (0<z\leqslant\beta)\tag{2.3}$$

и при $m=0$ задача (7), (7′) имеет решение

$$\left.\begin{aligned} y_0(z)&=\left\{2\int_0^z\left[f(s)(1-\lambda s)^{-\gamma}\exp\left(-\frac{\varkappa\lambda s}{1-\lambda s}\right)\times\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.\times\int_0^s\frac{(1-\lambda t)^{\gamma}}{\nu(t)}\,dt\right]ds\right\}^{1/2},\\ \alpha_0(z)&=(1-\lambda z)^{-\gamma}\int_0^z\frac{(1-\lambda s)^{\gamma}}{\nu(s)}\,ds.\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

Полагая $y_m=\dfrac{\partial y}{\partial m}$, $\alpha_m=\dfrac{\partial \alpha}{\partial m}$, рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_m}{dz}&=\frac{\Phi(z)\,\alpha_m}{y}-\Phi(z)\frac{\alpha\cdot y_m}{y^2}-1,\quad \Phi(z)=f(z)\exp\left(-\frac{\varkappa\lambda z}{1-\lambda z}\right),\\ \frac{d\alpha_m}{dz}&=\frac{\lambda\gamma}{1-\lambda z}\alpha_m-\frac{m\cdot\alpha_m}{\nu(z)\,y}+\frac{(z-\alpha)(y-my_m)}{\nu(z)\,y^2},\\ &\qquad z=0,\quad y_m=0,\quad \alpha_m=0.\end{aligned}\right\}$$

Поскольку $1-\alpha'(0,\ m)<0$ и $\left.\dfrac{d\alpha_m}{dz}\right|_{z=0}<0$, $\left.\dfrac{dy_m}{dz}\right|_{z=0}<0$, то, согласно неравенству (2.3), рассуждениями, подобными приведенным в [3], можно легко показать, что функции $y(z,\ m)$, $\alpha(z,\ m)$ при любом фиксированном $z\in(0,\ \beta]$ монотонно убывают от значений (2.4) с ростом параметра m. Отсюда при условии (9) вытекает существование единственного решения исходной задачи и оценка

$$y(z, m) < y_0(z) \quad (0 < z \leqslant \beta).$$

Следовательно, с учетом того, что $\nu(0) \leqslant \nu(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant 1$ получим

$$m < \frac{y_0(\beta)}{1-\beta} < \frac{\bar{y}_0(\beta)}{(1-\beta)\sqrt{\nu(0)(1-\lambda)^\gamma}},$$

где $\bar{y}_0(z)$ вычисляется по формуле (1.4).

Если теперь потребовать выполнения условия $m<1$, то с запасом будем иметь

$$\beta_0 = 1 - \frac{\bar{y}_0(1)}{\sqrt{\nu(0)(1-\lambda)^\gamma}}, \quad \beta \leqslant \beta_0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что для $\nu(0)$, близких к единице, и $\varkappa\lambda$, достаточно больших, условие (2.5) выполняется, и асимптотику к решению задачи (7), (7′) можно брать в виде

$$y(z, m) \sim \sum_{n=0}^{N} m^n y_n(z), \quad \alpha(z, m) \sim \sum_{n=0}^{N} m^n \alpha_n(z), \tag{2.6}$$

где функции $\alpha_n(z)$, $y_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ определяются из дифференциальных уравнений

$$\alpha_1' = \frac{\lambda\gamma}{1-\lambda z}\alpha_1 + \frac{z-\alpha_0}{\nu \cdot y_0}, \quad y_1' = -\left[1 + \frac{y_0'}{y_0} y_1 - \frac{\alpha_1 \Phi(z)}{y_0}\right],$$

$$\alpha_n' = \frac{\lambda\gamma}{1-\lambda z}\alpha_n + \frac{1}{y_0}\left[-\frac{\alpha_{n-1}}{\nu} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k\left(\frac{\lambda\gamma}{1-\lambda z}\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k}'\right)\right],$$

$$(n = 2, 3, \ldots),$$

$$y_2' = -\frac{1}{y_0}\left[y_0' y_2 + y_1(1+y_1') - \Phi(z)\,\alpha_2\right],$$

$$y_n' = -\frac{1}{y_0}\left[y_0' y_n + y_{n-1}(1+y_1') + \sum_{k=1}^{n-2} y_k y_{n-k}' - \alpha_n \Phi(z)\right],$$

$$(n = 3, 4, \ldots)$$

при начальных условиях

$$y_n|_{z=0} = 0; \qquad \alpha_n|_{z=0} = 0 \quad (n=1, 2, \ldots, N),$$

а $y_0(z)$, $\alpha_0(z)$ даются выражениями (2.4).

Задавая β_0, согласно (2.5), для случая $0<\nu(z)<1$, $\gamma>0$, найдем приближенное значение параметра m из уравнения

$$\sum_{n=0}^{N} m^n y_n(\beta_0) = m(1-\beta_0), \tag{2.7}$$

взяв меньший его корень. В случае $\nu(z)>1$, $\gamma<0$ при β_0, удовлетворяющем (1.7′), уравнение (2.7) на отрезке $[m_2, m_1]$ может иметь несколько корней, каждому из которых отвечает своя интегральная кривая $\{y_i(z, m_i), \alpha_i(z, m_i)\}$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$, асимптотически представляемая формулами (2.6). Далее, как и ранее, с помощью одной квадратуры вычисляется функция $z=z(x)$, единственная для $0<\nu(z)<1$ и $z_i=z_i(x)$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ при $\nu(z)>1$, что позволяет легко определить поля, температуры и концентрации.

Заметим, что без существенной погрешности при больших значениях $\varkappa\lambda$ приближение (2.6), построенное на отрезке $0\leqslant z\leqslant\beta_0$, можно распространить на единичный отрезок $0\leqslant z\leqslant 1$ и также доказать асимптотический характер формул (2.6).

3. СЛУЧАЙ $\nu(z)\equiv 0$, $0\leqslant z\leqslant 1$, $\gamma=0$

Этот случай, реализуемый при распространении пламени в конденсированной среде безгазового состава, изучался с целью приближенного определения параметра m в [9, 10]. Задача (7), (7′), (9) на отрезке $0\leqslant z\leqslant\beta$ при $\nu(z)\equiv 0$, $\gamma=0$ преобразуется к виду

$$\mu(\alpha - z)\alpha' - \alpha\Phi(z) = 0, \quad z=0, \quad \alpha=0, \tag{3.1}$$

$$z=\beta, \quad \alpha=1, \tag{3.2}$$

где

$$\mu = m^2, \quad \Phi(z) = \frac{1}{1-\lambda z}\exp\left(-\frac{\varkappa\lambda z}{1-\lambda z}\right); \quad k(z) = k(0) = \mathrm{const}.$$

Вследствие монотонного роста функции $T(x)$, $y(z,\mu)>0$ при $z>0$, т. е.

$$y(z,\mu) = \sqrt{\mu}\,(\alpha - z) > 0, \quad \alpha > z > 0. \tag{3.3}$$

Через особую точку $z=0$, $\alpha=0$ уравнение (3.1) проходит две интегральные кривые, но, согласно (3.3), имеет смысл лишь одна с наклоном

$$\alpha'(0,\mu) = 1 + \frac{1}{\mu}. \tag{3.4}$$

Вводя замену переменных

$$dv = \Phi(z)\,dz, \quad v = \int_0^z \Phi(s)\,ds, \tag{3.5}$$

перепишем задачу (3.1), (3.2) в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{d\alpha} = \mu F(v,\alpha), \quad F(v,\alpha) = \frac{\alpha - z(v)}{\alpha} \\ &\alpha = 0, \quad v = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$$\alpha = 1, \quad v = \int_0^\beta \Phi(s)\, ds. \tag{3.7}$$

Покажем, что $v=(\alpha, \mu)$ при $\alpha \in (0,1]$ монотонно возрастает с ростом параметра μ. Пусть $v_\mu = \dfrac{\partial v}{\partial \mu}$, тогда, согласно (3.6), получим задачу

$$\frac{dv_\mu}{d\alpha} = F(v, \alpha) + \mu F_v(v, \alpha) \cdot v_\mu, \quad \alpha = 0, \quad v_\mu = 0. \tag{3.8}$$

Учитывая (3.4), (3.5), имеем

$$\left.\frac{dv_\mu}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = (1+\mu)^{-2} > 0. \tag{3.9}$$

В силу непрерывности в некоторой малой окрестности $\alpha=0$ (вследствие (3.9)) $v_\mu(\alpha, \mu)>0$. Предположим, что при продолжении $v_\mu(\alpha, \mu)$ обращается в нуль при $\tilde{\alpha} \in (0,1]$. Но тогда $[dv_\mu / d\alpha]_{\alpha=\tilde{\alpha}} < 0$, а это противоречит уравнению (3.8), так как $F(v, \alpha)>0$ при $\alpha>0$. Следовательно, $v_\mu(\alpha, \mu)>0$ при $0<\alpha \leqslant 1$, что и указывает на монотонное возрастание с ростом μ функции $v(\alpha, \mu)$. Учитывая (3.7), заметим, что при $0<\beta<1$ найдется единственное значение параметра μ, удовлетворяющее исходной задаче. Покажем теперь, что для достаточно больших значений $\varkappa\lambda$ параметр μ является малым, т. е. $\mu<0{,}5$. Из уравнения (3.6) и преобразования (3.5) следует, что

$$\mu\left[1 - \mu \frac{1}{\Psi(\beta)}\right]\alpha < v(\alpha, \mu) < \mu\,\alpha, \tag{3.10}$$

где

$$\Psi(\beta) = \min_{0 \leqslant z \leqslant \beta} \Phi(z) = \frac{1}{1-\lambda\beta} \exp\left(-\frac{\varkappa\lambda\beta}{1-\lambda\beta}\right).$$

Полагая в (3.10) $\alpha=1$ и учитывая (3.7), имеем при условии $\beta \leqslant \beta_0$ двустороннюю оценку параметра μ

$$\int_0^\beta \Phi(s)\, ds < \mu < \frac{1}{2}\Psi(\beta), \tag{3.11}$$

а β_0 определяется из уравнения

$$\int_0^\beta \Phi(s)\, ds = \frac{1}{4}\Psi(\beta).$$

Для достаточно больших значений $\varkappa\lambda$, характерных для распространения пламени в конденсированной фазе безгазового состава, условие $\beta \leqslant \beta_0$ выполняется и из верхней оценки (3.11) следует, что $\mu<0{,}5$.

Построим теперь приближение к решению задачи (3.6) в виде

$$v(\alpha, \mu) = \mu v_0(\alpha) + \mu^2 v_1(\alpha) + \mu^3 v_2(\alpha) + \ldots \tag{3.12}$$

Разлагая функцию $F(v(\alpha,\mu),\alpha)$ в ряд по параметру μ и учитывая (3.12), имеем

$$F(v,\alpha) = F(0,\alpha) + \mu F_V(0,\alpha)\cdot v_0(\alpha) + \frac{1}{2}\times$$
$$\times \mu^2 \left[F_{V^2}(0,\alpha)\cdot v_0^2(\alpha) + 2F_V(0,\alpha)\cdot v_1(\alpha)\right] + \ldots,$$

где, согласно преобразованию (3.5) и вида функций F и Φ,

$$F(0,\alpha) = 1, \quad F_V(0,\alpha) = -\frac{1}{\alpha}, \quad F_{V^2}(0,\alpha) = -\frac{\varkappa\lambda}{\alpha}.$$

Подставляя (3.12) в уравнение (3.6) и сравнивая члены с одинаковыми степенями μ, получим дифференциальные уравнения, которые при условиях $v_n(0)=0$ $(n=0, 1, \ldots)$ определяют функции $v_n(\alpha)$ $(n=0,1,\ldots)$. Ограничиваясь $n=2$, имеем

$$v_0(\alpha) = \alpha, \quad v_1(\alpha) = -\alpha, \quad v_2(\alpha) = -\frac{\alpha}{4}(\varkappa\lambda\alpha - 4),$$

а приближение 2-го порядка к решению задачи (3.6) будет

$$V_2(\alpha,\mu) = \mu\alpha\left[1 - \mu - \mu^2\left(\frac{\varkappa\lambda\alpha}{4} - 1\right)\right], \quad \alpha \in [0,1]. \qquad (3.13)$$

Можно без труда доказать, что приближение (3.13) при условии (3.11) является асимптотическим, т. е.

$$v(\alpha,\mu) = V_2(\alpha,\mu) + 0(\mu^4), \; \alpha \in [0, 1].$$

Возвращаясь к старой переменной по (3.5), получим соотношение для приближенного определения $\alpha = \alpha(z,\mu)$

$$V_2(\alpha,\mu) = \int_0^z \Phi(s)\,ds$$

и, согласно условию (3.7), найдем параметр μ из уравнения

$$\mu\left[1 - \mu - \mu^2\left(\frac{\varkappa\lambda}{4} - 1\right)\right] = \int_0^\beta \Phi(s)\,ds. \qquad (3.14)$$

Заметим, что из асимптотического представления интегральной показательной функции $Ei(-\varkappa)$ при $\varkappa > 2$ можно получить простую формулу для вычисления интеграла

$$b(z) = \int_0^z \Phi(s)\,ds \approx \frac{1}{\varkappa\lambda}\sum_{k=0}^{7}\frac{(-1)^k a_k}{\varkappa^k}\left[1 - (1-\lambda z)^{k+1}\exp\left(-\frac{\varkappa\lambda z}{1-\lambda z}\right)\right],$$

где $a_0 = 0{,}9\,999\,965$; $a_1 = 0{,}9\,989\,710$; $a_2 = 1{,}9\,487\,646$; $a_3 = 4{,}9\,482\,092$; $a_4 = 11{,}7\,850\,792$; $a_5 = 20{,}4\,523\,840$; $a_6 = 21{,}1\,491\,469$; $a_7 = 9{,}5\,240\,410$. Тогда при достаточно больших значениях $\varkappa\lambda$, полагая в (3.14)

$$b(\beta) \approx b(1) \approx \frac{1}{\varkappa\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{7}\frac{(-1)^k a_k}{\varkappa^k},$$

и решая кубическое уравнение (3.14), имеющее один отрицательный и два положительных корня, найдем величину $\mu = m^2$, равную меньшему из положительных корней. Затем определим функции:

$$\alpha(z, \mu) \approx \frac{2(1-\mu+\mu^2)}{\varkappa\lambda\mu^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\varkappa\lambda\mu\, b(z)}{(1-\mu+\mu^2)^2}}\right],$$

$$y(z, \mu) \approx \sqrt{\mu}\,[\alpha(z, \mu) - z]$$

и с точностью до сдвига по оси x функцию $z = z(x)$

$$x = -\sqrt{\frac{ke^{\varkappa}}{\rho(0)\, c\, B\mu}} \cdot \int^{z} \frac{ds}{\alpha(s, \mu) - s},$$

где нижний предел у интеграла произволен. Зная зависимость $z = z(x)$, тем самым находим поля температуры $T(x) = T_2[1 - \lambda z(x)]$ и концентрации $a(x) = a_0\alpha(x)$. Массовая скорость распространения фронта экзотермической реакции, согласно обозначениям (5), вычисляется по формуле

$$(u\rho)_0 = \sqrt{\frac{Bk\rho(0)}{c}\,\mu e^{-\varkappa}}. \tag{3.15}$$

Если ограничиться асимптотикой нулевого порядка $V_0(\alpha, \mu) = \mu\alpha$ и принять $b(1) \approx (\varkappa\lambda)^{-1}$, что эквивалентно известному приближению Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого, то из (3.15) легко получим упрощенную формулу, приведенную в [10].

В заключение отметим, что изложенный выше асимптотический метод может быть широко использован не только в задачах тепловой теории горения газов и конденсированных веществ с безгазовым составом, но и в случае процессов с четко выраженной поверхностью раздела фаз (горение нелетучих конденсированных веществ, линейный пиролиз). Кроме того, рассмотренный метод применим к квазистационарной задаче теплового взрыва и теплового самовоспламенения газовой смеси в потоке. В данной работе рассматривалась реакция 1-го порядка, но приведенная схема позволяет сделать обобщение на случай бимолекулярной, автокаталитической и других реакций. Критерием метода является известное требование $\varkappa\lambda \gg 1$.

Поступила в редакцию
21/VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1948, **22**, 1, 27.
2. Я. И. Канель. Докл. АН СССР, 1963, **149**, 2, 367.
3. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1965, 4, 86.
4. Р. Д. Бачелис, В. Г. Меламед. Докл. АН СССР, 1965, **163**, 6, 1338.
5. Р. Д. Бачелис, В. Г. Меламед. ПММ, 1966, **30**, 2, 368.
6. А. И. Розловский. Докл. АН СССР. 1961, **136**, 5, 1150.
7. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. Устойчивость пламен. Итоги науки. Гидромеханика. М., 1965.
8. С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., Изд-во «Наука», 1965.
9. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1965, 3, 43.
10. Б. В. Новожилов. Докл. АН СССР, 1961, **141**, 1, 151.