

УДК 534.01: 534.14

## УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С ПОСТОЯННЫМ ВРАЩАЮЩИМСЯ МАГНИТОМ В РОЛИ СТАТОРА И ИХ НЕЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Н. В. Кондратьева, Ф. Ф. Родюков, А. И. Шепелявый

Санкт-Петербургский государственный университет, 198504 Санкт-Петербург

Построена полная математическая модель движения рамки с током, питаемой от источника постоянного напряжения, которая помещена в поле постоянного магнита, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Из локального анализа этой модели следует ее неустойчивость при отсутствии внешней нагрузки, что противоречит практике эксплуатации двигателей. Поэтому рассмотренная модель ротора двигателей некорректна, хотя она часто используется. Для того чтобы устранить обнаруженное противоречие, вводится дополнительная рамка, ортогональная исходной, имеющая те же параметры, но короткозамкнутая. Полная математическая модель такой системы устойчива при отсутствии внешней нагрузки. Для случая асинхронного двигателя сформулированы условия дихотомичности, глобальной асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Рассмотрим схему электрической машины (ЭМ), в которой функцию статора выполняет вращающийся постоянный магнит, а функцию ротора — рамка с током. Представим магнитное поле статора ЭМ в виде постоянного по модулю вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , вращающегося в плоскости, перпендикулярной оси вращения ротора ЭМ, с постоянной угловой скоростью  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ , равной угловой частоте напряжения сети ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ). Рассмотрим сначала схему ротора в виде одного электрического контура (рамки), к которому через коллектор подводится постоянное напряжение возбуждения  $u_f \geq 0$ .

Следует отметить, что условие  $u_f > 0$  соответствует случаю синхронного двигателя,  $u_f = 0$  — случаю асинхронного двигателя. Это согласуется с физическими представлениями, так как синхронный двигатель есть асинхронный двигатель, к которому добавлена обмотка возбуждения, дающая дополнительную обобщенную силу, сдвигающую положение равновесия асинхронного двигателя и позволяющую синхронному двигателю работать в синхронном режиме под нагрузкой.

Целью настоящей работы является вывод полной системы уравнений и анализ ее устойчивости.

При составлении уравнений движения указанной электромеханической системы (рис. 1) используем уравнения Лагранжа — Максвелла. Запишем выражения кинетической энергии  $T$  и диссипативной функции  $D$ :

$$T = T_m + T_e + T_{em}, \quad D = D_m + D_e,$$

где  $T_m$  — механокинетическая энергия;  $T_e$  — электрокинетическая энергия;  $T_{em}$  — электромеханокинетическая энергия;  $D_m, D_e$  — механическая и электрическая составляющие диссипативной функции соответственно.

По-видимому, впервые представление кинетической энергии электромеханической системы в виде суммы трех слагаемых использовал Дж. К. Максвелл [1]. Третье слагаемое он назвал электропандерокинетической энергией. Для обнаружения этой составляющей,

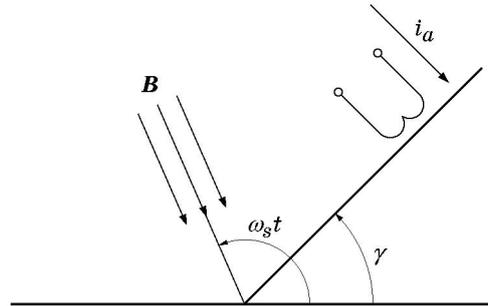


Рис. 1

содержащей произведения скоростей материальных точек и значений электрического тока, Дж. К. Максвелл провел эксперименты, результаты которых позволили сделать вывод, что вклад электропандерокинетической энергии в полную энергию системы столь незначителен, что не может быть обнаружен измерительными приборами. Этот вывод был подтвержден в начале XX в. с использованием более совершенной измерительной техники. В дальнейшем будем считать  $T_{em} = 0$ .

Известно, что суммарная мощность аэродинамических потерь и потерь на трение в подшипниках в ЭМ составляет доли процента номинальной мощности [2, с. 165]. Следовательно, величина  $D_m$  пренебрежимо мала и в дальнейшем можно считать  $D_m = 0$ . Следует отметить, что последнее предположение для дальнейших рассуждений непринципиально. Обычно считается, что момент трения в подшипниках есть величина постоянная, а момент, порождаемый силами аэродинамического сопротивления, пропорционален угловой скорости. Поэтому такие моменты можно рассматривать как составляющие внешнего момента нагрузки.

Запишем выражения для энергий  $T_m$ ,  $T_e$  и диссипативной функции  $D_e$ :

$$T_m = J\dot{\gamma}^2/2, \quad T_e = L_a i_a^2/2 + \Psi i_a \cos(\omega t - \gamma), \quad D_e = R_a i_a^2/2,$$

где  $J$  — момент инерции контура с током;  $\gamma$  — угол поворота магнитной оси рамки, проходящей через центр контура перпендикулярно его плоскости;  $L_a$  — индуктивность контура с током;  $i_a$  — ток в контуре;  $\Psi = BS w = \text{const}$  — амплитуда потокосцепления внешнего магнитного поля с электрическим контуром;  $B = \text{const}$  — модуль вектора магнитной индукции внешнего магнитного поля;  $S$  — площадь контура с током;  $w$  — число секций контура;  $R_a$  — сопротивление контура.

Уравнение Лагранжа — Максвелла для независимой электрической переменной  $i_a$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial i_a} + \frac{\partial D_e}{\partial i_a} = u_f$$

или

$$L_a \dot{i}_a - \Psi(\omega - \dot{\gamma}) \sin(\omega t - \gamma) + R_a i_a = u_f, \quad (1)$$

где  $u_f$  — обобщенная по координате  $i_a$  сила в виде постоянного напряжения возбуждения, подводимого к контуру с током.

Уравнение Лагранжа — Максвелла для независимой геометрической координаты  $\gamma$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T_e}{\partial \gamma} + M_H = 0$$

( $M_H$  — момент внешней нагрузки, приложенный к рамке с током) или

$$J\ddot{\gamma} = \Psi i_a \sin(\omega t - \gamma) - M_H. \quad (2)$$

Система уравнений (1), (2) полностью описывает динамику исследуемой электромеханической системы.

Введем угол нагрузки

$$\theta = \omega t - \gamma \quad (3)$$

и скольжение  $s$  контура с током относительно внешнего магнитного поля

$$s = (\omega - \dot{\gamma})/\omega. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует  $\dot{\theta} = \omega s$ .

Вместо текущего времени  $t$  введем безразмерное синхронное время  $\tau = \omega t$ , соответствующее углу поворота внешнего магнитного поля (вектора  $\mathbf{B}$ ). Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\begin{aligned} L_a \omega \frac{di_a}{d\tau} - \omega \Psi \left(1 - \frac{d\gamma}{d\tau}\right) \sin \theta + R_a i_a &= u_f, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = s = 1 - \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad \frac{ds}{d\tau} &= -\frac{1}{\omega^2 J} (\Psi i_a \sin \theta - M_H). \end{aligned} \quad (5)$$

Для исследования системы (5) целесообразно записать ее в безразмерном виде, введя безразмерные ток  $\bar{i}_a$ , момент внешней нагрузки  $\bar{M}_H$ , напряжение  $\bar{u}_f$  и потокосцепление  $\bar{\Psi}$ :

$$i_a = \frac{u}{\omega L_a} \bar{i}_a, \quad M_H = \frac{u \Psi}{\omega L_a} \bar{M}_H, \quad u_f = \frac{u R_a}{\omega L_a} \bar{u}_f, \quad \Psi = \frac{u}{\omega} \bar{\Psi}.$$

Здесь  $u$  — базисное напряжение (например, амплитудное значение напряжения сети).

В безразмерных переменных система (5) примет следующий вид (черта над безразмерными величинами опущена, точка над переменной обозначает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ ):

$$\dot{i}_a = -\alpha_r i_a + b s \sin \theta + \alpha_r u_f, \quad \dot{\theta} = s, \quad \dot{s} = -\delta (i_a \sin \theta - M_H). \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_r = R_a/(\omega L_a)$ ;  $b = \bar{\Psi}$ ;  $\delta = u \Psi/(\omega^3 L_a J)$ .

В установившемся режиме из (6) получаем  $s = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $i_a = u_f$ , из условия равновесия электромагнитного момента и момента нагрузки следует уравнение для  $\theta_0$

$$u_f \sin \theta_0 = M_H. \quad (7)$$

Отсюда вытекает существование двух положений равновесия при  $M_H < u_f$ .

Рассмотрим малые колебания системы (6) около положений равновесия. Соответствующая линейная система имеет вид

$$\dot{\tilde{i}}_a = -\alpha_r \tilde{i}_a + b \tilde{s} \sin \theta_0, \quad \dot{\tilde{\theta}} = \tilde{s}, \quad \dot{\tilde{s}} = -\delta (\tilde{i}_a \sin \theta_0 + u_f \tilde{\theta} \cos \theta_0), \quad (8)$$

где значения  $\theta_0$  определяются из уравнения (7).

Характеристическое уравнение системы (8) следующее:

$$\lambda^3 + \alpha_r \lambda^2 + \delta (b \sin^2 \theta_0 + u_f \cos \theta_0) \lambda + \delta u_f \alpha_r \cos \theta_0 = 0. \quad (9)$$

Миноры Гурвица для многочлена в (9) удовлетворяют условиям

$$\Delta_1 = \alpha_r > 0, \quad \Delta_2 = \delta \alpha_r b \sin^2 \theta_0 \geq 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2 \delta u_f \alpha_r \cos \theta_0 \geq 0.$$

Равенство нулю второго и третьего миноров имеет место в режиме холостого хода, когда  $M_H = 0$ . Холостой ход — естественный режим работы практически всех ЭМ. Ни одна из них не может работать в неустойчивом режиме. Это несоответствие теории и практики обусловлено выбором модели ротора ЭМ в виде одной обмотки (рамки).

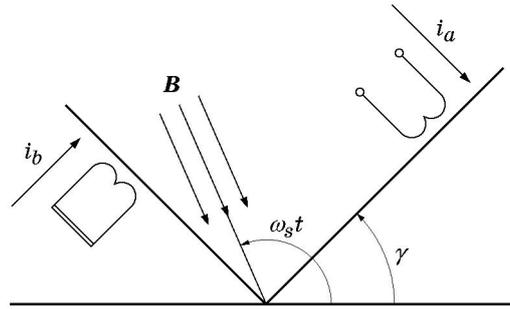


Рис. 2

Следует отметить, что уравнения, эквивалентные уравнениям (6), получаются из уравнений Горева для ЭМ без демпферных контуров [3], если статорные обмотки в них считать сверхпроводящими, а магнитное поле статора — установившимся. В [3], так же как в рассматриваемом случае, ротор моделируется только одним контуром. В [4, 5] доказано, что в уравнениях Горева [3, с. 192] при наличии сопротивлений статорных обмоток зона неустойчивости расширяется. Эта модель неустойчива не только в режиме холостого хода, но и при малых нагрузках. Появление зоны неустойчивости вызвано ненулевым сопротивлением статорных обмоток (см. [5, с. 225]).

Как отмечено выше, одна рамка (обмотка) не может смоделировать цилиндрический характер магнитного поля в воздушном зазоре ЭМ, формируемого магнитопроводами статора и ротора. Круговое поле могут смоделировать как минимум две ортогональные рамки (обмотки). Для того чтобы избежать описанного несоответствия теории и практики, к рамке (обмотке) на роторе необходимо добавить рамку (обмотку), аналогичную имеющейся, ортогональную ей и короткозамкнутую.

Назовем такую рамку (обмотку) фантомной и покажем, что при ее наличии указанное несоответствие исчезает. Для этого повторим приведенные выше выкладки с учетом фантомной рамки (рис. 2).

Выражения для кинетической энергии и диссипативной функции записываются в виде

$$T = T_m + T_e, \quad T_m = J\dot{\gamma}^2/2,$$

$$T_e = L_r(i_a^2 + i_b^2)/2 + \Psi[i_a \cos(\omega t - \gamma) - i_b \sin(\omega t - \gamma)], \quad D_e = R_r(i_a^2 + i_b^2)/2,$$

где  $L_r, R_r$  — индуктивность и сопротивление электрических контуров (обмоток);  $i_b$  — ток в фантомной обмотке. Соответственно уравнения Лагранжа — Максвелла для независимых координат имеют вид

$$\begin{aligned} L_r \dot{i}_a &= \Psi(\omega - \dot{\gamma}) \sin(\omega t - \gamma) - R_r i_a + u_f, & L_r \dot{i}_b &= \Psi(\omega - \dot{\gamma}) \cos(\omega t - \gamma) - R_r i_b, \\ J \ddot{\gamma} &= \Psi[i_a \sin(\omega t - \gamma) + i_b \cos(\omega t - \gamma)] - M_H. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично тому как это сделано выше, запишем уравнения (10) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \dot{i}_a &= -\alpha_r i_a + b s \sin \theta + \alpha_r u_f, & \dot{i}_b &= -\alpha_r i_b + b s \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= s, & \dot{s} &= -\delta(i_a \sin \theta + i_b \cos \theta - M_H), & \alpha_r &= R_r/(\omega L_r). \end{aligned} \quad (11)$$

Исследуем устойчивость в малом системы (11) в случае  $u_f > 0$  аналогично тому, как это сделано для системы (6). В установившемся режиме из (11) следует  $s = 0$ ,  $i_a = u_f$ ,  $i_b = 0$ ,  $u_f \sin \theta_0 = M_H$ . Соответствующие линеаризованные уравнения имеют вид

$$\dot{\tilde{i}}_a = -\alpha_r \tilde{i}_a + b \tilde{s} \sin \theta_0, \quad \dot{\tilde{i}}_b = -\alpha_r \tilde{i}_b + b \tilde{s} \cos \theta_0,$$

$$\dot{\theta} = \tilde{s}, \quad \dot{\tilde{s}} = -\delta(\tilde{i}_a \sin \theta_0 + \tilde{i}_b \cos \theta_0 + u_f \tilde{\theta} \cos \theta_0).$$

Из характеристического уравнения полученной линейной системы

$$(\lambda + \alpha_r)(\lambda^3 + \alpha_r \lambda^2 + \delta(b + u_f \cos \theta_0)\lambda + \delta u_f \alpha_r \cos \theta_0) = 0$$

следует, что необходимым и достаточным условием устойчивости в малом стационарных решений уравнений синхронных двигателей является условие  $\cos \theta_0 > 0$ , т. е., как и в реальных синхронных двигателях, малая нагрузка не может вызвать неустойчивость (необходимо лишь условие  $0 \leq M_H < u_f$ ).

Таким образом, доказана необходимость введения фантомной обмотки при моделировании ротора синхронных машин.

Следует отметить, что в известных уравнениях, описывающих движение ротора, как правило, содержится синхронизирующий момент в виде  $u_f \sin \theta$ . Для того чтобы и в системе (11) явно выделить этот синхронизирующий момент, сделаем в (11) замену переменной  $i_a = i'_a + u_f$ . Опуская в дальнейшем штрихи, получим

$$\begin{aligned} \dot{i}_a &= -\alpha_r i_a + b s \sin \theta, & \dot{i}_b &= -\alpha_r i_b + b s \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= s, & \dot{s} &= -\delta(i_a \sin \theta + i_b \cos \theta + u_f \sin \theta - M_H). \end{aligned}$$

Это преобразование означает перенос обобщенной по координате  $i_a$  силы на координату  $s$ . В результате обобщенная сила приобретает смысл дополнительного синхронизирующего момента на валу ротора. При этом в случае холостого хода ( $M_H = 0$ ) в установившемся режиме новое значение тока  $i_a = 0$ , как это имеет место в асинхронном двигателе.

Рассмотрим случай асинхронного двигателя ( $u_f = 0$ ). Приведем систему (11) к более удобному для дальнейшего анализа виду. Вводя переменные  $x, y$  по формулам

$$(-\alpha_r x + 1)b = -i_a \cos \theta + i_b \sin \theta, \quad \alpha_r b y = i_a \sin \theta + i_b \cos \theta,$$

получим

$$\dot{x} = -\alpha x - s y + 1, \quad \dot{y} = -\alpha y + s x, \quad \dot{\theta} = s, \quad \dot{s} = -\delta(\alpha b y - M_H). \quad (12)$$

Для проведения нелокального анализа математической модели (12) запишем ее в виде системы третьего порядка, не содержащей переменную  $\theta$ :

$$\dot{x} = -\alpha x - s y + 1, \quad \dot{y} = -\alpha y + s x, \quad \dot{s} = -\delta(\alpha b y - M_H). \quad (13)$$

Здесь  $x, y$  — квазиток в обмотках статора;  $s$  — скольжение ротора;  $\alpha = \alpha_r$  — сопротивление роторных обмоток;  $\delta$  — электромеханическая постоянная, обратно пропорциональная моменту инерции ротора;  $M_H$  — безразмерный момент внешней нагрузки на валу ротора.

При сделанных предположениях исследование устойчивости полной системы уравнений асинхронного двигателя может быть сведено к исследованию устойчивости системы уравнений третьего порядка (13).

Рассмотрим полную математическую модель асинхронного двигателя в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, которая описывает динамику асинхронного двигателя в общепринятых идеализированных представлениях, подробно изложенных, например, в [3, с. 28–36; 5, с. 142–156; 6, с. 128–131]. Основными из них являются следующие: 1) предположение о неизменности электромагнитного поля в любом поперечном сечении идеализированной физической модели асинхронного двигателя при пренебрежении торцевыми эффектами (гипотеза плоской модели); 2) предположение о возможности описания взаимодействия электромагнитных процессов в обмотках статора и ротора машины с использованием двух симметричных линейных электрических цепей.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) i_\alpha^s + \varkappa M \frac{d}{dt} (i_\alpha^r \cos \gamma - i_\beta^r \sin \gamma) &= -u_m \sin(\omega t), \\ \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) i_\beta^s + \varkappa M \frac{d}{dt} (i_\alpha^r \sin \gamma + i_\beta^r \cos \gamma) &= u_m \cos(\omega t), \\ M \frac{d}{dt} (i_\alpha^s \cos \gamma + i_\beta^s \sin \gamma) + \left(L_r \frac{d}{dt} + R_r\right) i_\alpha^r &= 0, \\ M \frac{d}{dt} (-i_\alpha^s \sin \gamma + i_\beta^s \cos \gamma) + \left(L_r \frac{d}{dt} + R_r\right) i_\beta^r &= 0, \\ J \dot{\gamma} &= M[(i_\alpha^r i_\beta^s - i_\beta^r i_\alpha^s) \cos \gamma - (i_\alpha^r i_\alpha^s + i_\beta^r i_\beta^s) \sin \gamma] - M_H. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $i_\alpha^s, i_\beta^s, i_\alpha^r, i_\beta^r$  — токи статорных и роторных обмоток;  $\gamma$  — угол поворота ротора;  $R_s, L_s, R_r, L_r$  — сопротивления и индуктивности соответствующих обмоток;  $M$  — амплитуда взаимной индукции;  $J$  — момент инерции ротора асинхронного двигателя;  $\omega = 2\pi f$ ;  $f, u_m$  — частота и амплитуда подводимого к статорным обмоткам напряжения;  $M_H$  — момент нагрузки на валу асинхронного двигателя;  $t$  — текущее время;  $\varkappa$  — параметр, характеризующий влияние электромагнитных процессов в роторе на процессы в обмотках статора. Уравнения (14) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (8-1в), (8-2г) в [6, с. 360].

Для дальнейших преобразований уравнений (14) потребуются выражения для потокосцеплений обмоток. В случае неявнополюсной ЭМ (например, в случае асинхронного двигателя) эти потокосцепления можно получить из формул (3-3а)–(3-3г) в [6, с. 133] с учетом выражений для индуктивностей (3-40)–(3-49) [6, с. 143]. В принятых выше обозначениях они имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^s &= L_s i_\alpha^s + \varkappa M (i_\alpha^r \cos \gamma - i_\beta^r \sin \gamma), & \psi_\beta^s &= L_s i_\beta^s + \varkappa M (i_\alpha^r \sin \gamma + i_\beta^r \cos \gamma), \\ \psi_\alpha^r &= M (i_\alpha^s \cos \gamma + i_\beta^s \sin \gamma) + L_r i_\alpha^r, & \psi_\beta^r &= M (-i_\alpha^s \sin \gamma + i_\beta^s \cos \gamma) + L_r i_\beta^r. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (14) и выражения для потокосцеплений (15) записаны в так называемых фазовых координатах  $\alpha, \beta$ . Для математического анализа они неудобны, но в данном случае для упрощения записи возможно неголономное преобразование координат Парка [3]. В случае асинхронного двигателя оно может быть записано путем введения вспомогательных ортогональных осей  $u, v$ , вращающихся с произвольной угловой скоростью и составляющих с магнитной осью фазы  $\alpha$  статора асинхронного двигателя угол  $\gamma_k$ . Такое преобразование приведено, например, в [6, с. 234, 235] и в используемых в данной работе обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} i_u^s &= i_\alpha^s \cos \gamma_k + i_\beta^s \sin \gamma_k, & i_v^s &= -i_\alpha^s \sin \gamma_k + i_\beta^s \cos \gamma_k, \\ i_u^r &= i_\alpha^r \cos(\gamma_k - \gamma) + i_\beta^r \sin(\gamma_k - \gamma), & i_v^r &= -i_\alpha^r \sin(\gamma_k - \gamma) + i_\beta^r \cos(\gamma_k - \gamma), \\ \psi_u^s &= \psi_\alpha^s \cos \gamma_k + \psi_\beta^s \sin \gamma_k, & \psi_v^s &= -\psi_\alpha^s \sin \gamma_k + \psi_\beta^s \cos \gamma_k, \\ \psi_u^r &= \psi_\alpha^r \cos(\gamma_k - \gamma) + \psi_\beta^r \sin(\gamma_k - \gamma), & \psi_v^r &= -\psi_\alpha^r \sin(\gamma_k - \gamma) + \psi_\beta^r \cos(\gamma_k - \gamma), \\ u_u &= u_m (-\sin(\omega t) \cos \gamma_k + \cos(\omega t) \sin \gamma_k) = -u_m \sin(\omega t - \gamma_k), \\ u_v &= u_m (\sin(\omega t) \sin \gamma_k + \cos(\omega t) \cos \gamma_k) = u_m \cos(\omega t - \gamma_k). \end{aligned}$$

Это преобразование означает, что от реальных (фазовых) переменных, записанных в двух ортогональных системах координат, одна из которых жестко связана со статором асинхронного двигателя, другая — с его ротором, происходит переход к проекциям этих переменных (квазипеременным) на одни и те же ортогональные оси  $u, v$ . В этих координатах (квaziтоки и квазипотокосцепления) уравнения (14) и выражения (15) принимают вид

$$L_s (\dot{i}_u^s - \dot{\gamma}_k i_v^s) + R_s i_u^s \varkappa M (i_u^r - \dot{\gamma}_k i_v^r) = -u_m \sin(\omega t - \gamma_k),$$

$$\begin{aligned}
L_s(\dot{i}_v^s + \dot{\gamma}_k i_u^s) + R_s i_v^s + \varkappa M(\dot{i}_v^r + \dot{\gamma}_k i_u^r) &= u_m \cos(\omega t - \gamma_k), \\
M[\dot{i}_u^s - (\dot{\gamma}_k - \dot{\gamma}) i_v^s] + R_r i_u^r + L_r[\dot{i}_u^r - (\dot{\gamma}_k - \dot{\gamma}) i_v^r] &= 0, \\
M[\dot{i}_v^s + (\dot{\gamma}_k - \dot{\gamma}) i_u^s] + R_r i_v^r + L_r[\dot{i}_v^r + (\dot{\gamma}_k - \dot{\gamma}) i_u^r] &= 0, \\
J\dot{\gamma} &= M(i_u^r i_v^s - i_v^r i_u^s) - M_H;
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\psi_u^s = L_s i_u^s + \varkappa M i_u^r, \quad \psi_v^s = L_s i_v^s + \varkappa M i_v^r, \quad \psi_u^r = M i_u^s + L_r i_u^r, \quad \psi_v^r = M i_v^s + L_r i_v^r. \tag{17}$$

В уравнениях (16) и формулах (17) перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned}
\tau = \omega t, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = 1 - s, \quad \psi^s = \frac{u_m}{\omega} \bar{\psi}^s, \quad \psi^r = \frac{u_m}{\omega} \frac{L_r}{M} \bar{\psi}^r, \quad i^s = \frac{u_m}{\omega L_s} \bar{i}^s, \quad i^r = \frac{u_m}{\omega} \frac{1}{M} \bar{i}^r, \\
\varepsilon_s = \frac{R_s}{\omega L_s}, \quad \varepsilon_r = \frac{R_r}{\omega L_r}, \quad \delta = \frac{u_m^2}{\omega^4 J L_s}, \quad \bar{M}_H = \frac{M_H}{\omega^2 J \delta}, \quad \mu = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}
\end{aligned}$$

( $\mu$  — коэффициент электромагнитного рассеяния в воздушном зазоре асинхронного двигателя).

Опуская черту над безразмерными величинами, уравнения (16) и соотношения (17) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\dot{i}_u^s - \dot{\gamma}_k i_v^s + \varepsilon_s i_u^s + \varkappa(\dot{i}_u^r - \dot{\gamma}_k i_v^r) &= -\sin(\tau - \gamma_k), \\
\dot{i}_v^s + \dot{\gamma}_k i_u^s + \varepsilon_s i_v^s + \varkappa(\dot{i}_v^r - \dot{\gamma}_k i_u^r) &= \cos(\tau - \gamma_k), \\
(1 - \mu)[\dot{i}_u^s - (\dot{\gamma}_k - 1 + s)i_v^s] + \varepsilon_r i_u^r + \dot{i}_u^r - (\dot{\gamma}_k - 1 + s)i_v^r &= 0, \\
(1 - \mu)[\dot{i}_v^s + (\dot{\gamma}_k - 1 + s)i_u^s] + \varepsilon_r i_v^r + \dot{i}_v^r + (\dot{\gamma}_k - 1 + s)i_u^r &= 0, \\
\dot{s} &= -\delta[(i_u^r i_v^s - i_v^r i_u^s) - \bar{M}_H];
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\psi_u^s = i_u^s + \varkappa i_u^r, \quad \psi_v^s = i_v^s + \varkappa i_v^r, \quad \psi_u^r = (1 - \mu)i_u^s + i_u^r, \quad \psi_v^r = (1 - \mu)i_v^s + i_v^r, \tag{19}$$

где  $\psi_u = \psi_u(\tau)$ ,  $\psi_v = \psi_v(\tau)$ ,  $i_u = i_u(\tau)$ ,  $i_v = i_v(\tau)$  — квазипотокосцепления и квазитоки соответствующих обмоток;  $s(\tau)$  — скольжение (относительная разность угловых скоростей вращений ротора и магнитного поля статора);  $\tau$  — безразмерное время (угол поворота магнитного поля статора);  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_r$  — сопротивления статорных и роторных обмоток;  $\gamma_k$  — угол поворота осей  $u$ ,  $v$ .

Положим в (18)  $\gamma_k = \tau$ , т. е. перейдем к так называемым синхронным осям координат  $x$ ,  $y$  (синхронно вращающимся с магнитным полем статора):

$$\begin{aligned}
\dot{i}_x^s - i_y^s + \varepsilon_s i_x^s + \varkappa(\dot{i}_x^r - i_y^r) &= 0, \quad \dot{i}_y^s + i_x^s + \varepsilon_s i_y^s + \varkappa(\dot{i}_y^r + i_x^r) = 1, \\
(1 - \mu)(\dot{i}_x^s - s i_y^s) + \varepsilon_r i_x^r + \dot{i}_x^r - s i_y^r &= 0, \quad (1 - \mu)(\dot{i}_y^s + s i_x^s) + \varepsilon_r i_y^r + \dot{i}_y^r + s i_x^r = 0, \\
\dot{s} &= -\delta[(i_x^r i_y^s - i_y^r i_x^s) - \bar{M}_H];
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\psi_x^s = i_x^s + \varkappa i_x^r, \quad \psi_y^s = i_y^s + \varkappa i_y^r, \quad \psi_x^r = (1 - \mu)i_x^s + i_x^r, \quad \psi_y^r = (1 - \mu)i_y^s + i_y^r. \tag{21}$$

Для исследования уравнений (20) удобнее перейти к квазитокам статорных и квазипотокосцеплениям роторных обмоток, исключив квазитоки роторных обмоток с помощью выражений (21):

$$i_x^r = \psi_x^r - (1 - \mu)i_x^s, \quad i_y^r = \psi_y^r - (1 - \mu)i_y^s.$$

В результате получим уравнения асинхронного двигателя в так называемых гибридных переменных, в которых вместо квазитоков  $i_x^s$ ,  $i_y^s$  введены переменные  $x$ ,  $y$  по формулам

$$x = \mu' i_x^s + \varkappa \psi_x^r, \quad y = \mu' i_y^s + \varkappa \psi_y^r, \quad \mu' = 1 - \varkappa(1 - \mu).$$

Тогда уравнения (20) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha'_s x + y + \varkappa \alpha'_s \psi_x^r, & \dot{y} &= -\alpha'_s y - x + \varkappa \alpha'_s \psi_y^r + 1, \\ \dot{\psi}_x^r &= -\alpha'_r \psi_x^r + s \psi_y^r + \alpha'_r (1 - \mu) x, & \dot{\psi}_y^r &= -\alpha'_r \psi_y^r - s \psi_x^r + \alpha'_r (1 - \mu) y, \\ \dot{s} &= -\delta[(\psi_x^r y - \psi_y^r x)/\mu' - \bar{M}_H], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\alpha'_s = \varepsilon_s/\mu'$ ;  $\alpha'_r = \varepsilon_r/\mu'$ .

С помощью замены переменных

$$\bar{x} = \frac{\psi_x^r + \alpha'_s \psi_y^r}{\alpha'_r (1 - \mu)}, \quad \bar{y} = \frac{\psi_y^r - \alpha'_s \psi_x^r}{\alpha'_r (1 - \mu)}, \quad \psi_x = \frac{x + \alpha'_s y - 1}{\alpha'_r (1 - \mu)}, \quad \psi_y = \frac{y - \alpha'_s x}{\alpha'_r (1 - \mu)}$$

систему (22) приведем к более удобному виду

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_x &= -\alpha_s \psi_x + \psi_y + \varkappa \alpha_s x, & \dot{\psi}_y &= -\alpha_s \psi_y - \psi_x + \varkappa \alpha_s y, \\ \dot{x} &= -\alpha_r x + s y + \alpha_r (1 - \mu) \psi_x + 1, & \dot{y} &= -\alpha_r y - s x + \alpha_r (1 - \mu) \psi_y, \\ \dot{s} &= \delta[\alpha_r b y + \alpha_r^2 b (1 - \mu) (\psi_x y - \psi_y x) + M_H]. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $x = \bar{x}$ ;  $y = \bar{y}$ ;  $\alpha_s = \alpha'_s$ ;  $\alpha_r = \alpha'_r$ ;  $M_H = \bar{M}_H$ ;  $b = (1 - \mu)/[\mu'(1 + \alpha_s'^2)]$ .

Наряду с системой (23) рассмотрим более простую систему

$$\dot{\psi}_x = -\alpha_s \psi_x + \psi_y, \quad \dot{\psi}_y = -\alpha_s \psi_y - \psi_x; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_r x + s y + \alpha_r (1 - \mu) \psi_x + 1, & \dot{y} &= -\alpha_r y - s x + \alpha_r (1 - \mu) \psi_y, \\ \dot{s} &= \delta[\alpha_r b y + \alpha_r^2 b (1 - \mu) (\psi_x y - \psi_y x) + M_H]. \end{aligned} \quad (25)$$

Система (24), (25) является нулевым приближением ( $\varkappa = 0$ ) системы (23) по малому регулярному параметру  $\varkappa$ . Предположение  $\varkappa = 0$ , по существу, означает отсутствие влияния электромагнитных процессов в роторе на процессы в статоре (см. первые два уравнения в (14)), что используется при моделировании статора вращающимся постоянным магнитом.

Рассмотрим упрощенную математическую модель ЭМ, описывающую медленное (по сравнению с электрическим) механическое движение ротора. Очевидно, что уравнения (24) для квазипотокоцеплений статорных обмоток асинхронного двигателя глобально устойчивы и имеют стационарное решение  $\psi_x^0 = 0$ ,  $\psi_y^0 = 0$ . Поэтому, следуя общепринятому квазистационарному подходу, для исследования полных расщепленных уравнений (24), (25) в уравнения (25) часто подставляют стационарное решение системы (24).

Таким образом, для исследования асинхронного двигателя получаем систему (13), в которой  $\alpha = \alpha_r$ .

Малость параметра  $\delta$  (обратно пропорционального моменту инерции ротора) лежит в основе указанного выше инженерного подхода к упрощению системы (13) при изучении колебаний ротора асинхронного двигателя и его устойчивости. Суть этого подхода заключается в замораживании медленной механической переменной  $s$  в уравнениях для быстрых электрических переменных  $x$ ,  $y$  и использовании в последнем из уравнений (13) значения  $y$  в стационарном режиме:

$$\dot{s} = -\delta(\alpha b s / (\alpha^2 + s^2) - M_H). \quad (26)$$

В установившемся режиме из (26) следует

$$M_H = \alpha b s / (\alpha^2 + s^2). \quad (27)$$

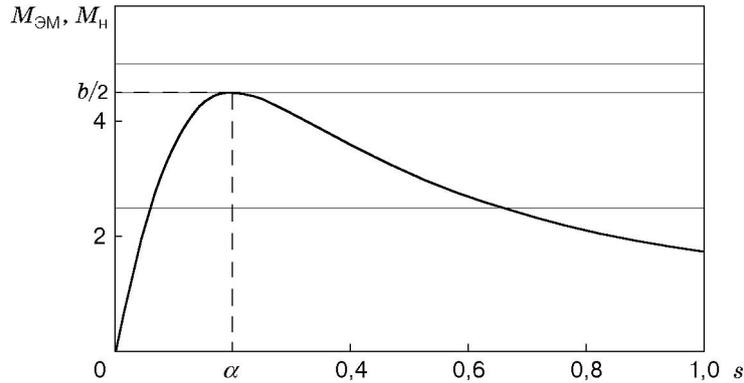


Рис. 3

Параметр  $M_H$  — общепринятая статическая механическая характеристика асинхронного двигателя. Из (27) следует, что электромагнитный момент достигает максимального значения  $M_H^{\max}$  при  $s = s_{кр} = \alpha$ . Параметр  $s$  в соответствии с ГОСТом обозначается  $s_{кр}$  и приводится в техническом паспорте каждого асинхронного двигателя.

Соотношение

$$m = M_H / M_H^{\max} = 2s s_{кр} / (s_{кр}^2 + s^2) = 2 / (s_{кр}/s + s/s_{кр}),$$

известное в теории асинхронного электропривода, называется формулой Клосса.

При формулировании результатов систему будем называть дихотомичной, если любое ее ограниченное на положительной полуоси решение стремится к стационарному множеству, и глобально асимптотически устойчивой, если любое решение этой системы стремится к некоторому состоянию равновесия.

Рассмотрим уравнение (26).

**Теорема 1.** Пусть  $M_H = \text{const}$ . Уравнение (26): 1) устойчиво в целом, если  $M_H = 0$ ; 2) дихотомично, если  $0 < M_H < b/2$ ; 3) имеет единственное полуустойчивое состояние равновесия, если  $M_H = b/2$ ; 4) не имеет ограниченных решений, если  $M_H > b/2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Пусть  $M_H = 0$ . Точка  $s = 0$  — единственная стационарная точка уравнения (26). Функция  $v = s^2/2$  вдоль любой траектории имеет отрицательную производную. Поэтому уравнение устойчиво в целом.

2. Пусть  $0 < M_H < b/2$ . Состояния равновесия:  $s = s_1$  (устойчивое) и  $s = s_2$  (неустойчивое). Из выражения  $v_i = (s - s_i)^2$ ,  $i = 1, 2$  следует, что интервал  $(-\infty, s_2)$  есть область притяжения состояния равновесия  $s = s_1$  и любая траектория  $s(t, s_0)$ , где  $s_0 > s_2$ , уходит на бесконечность. На рис. 3 показана статическая механическая характеристика асинхронного двигателя (горизонтальные прямые — постоянные моменты нагрузки). Видно, что точек пересечения может быть две, одна либо ни одной.

3. Пусть  $M_H = b/2$ . Уравнение (26) имеет единственную стационарную точку  $s = \alpha_r$ , область притяжения которой является интервал  $(-\infty, \alpha_r)$ . Любая траектория  $s(t, s_0)$ , где  $s_0 > \alpha_r$ , уходит на бесконечность (рис. 3). (Используется функция Ляпунова  $v = (s - \alpha_r)^2$ .)

4. Пусть  $M_H > b/2$ . Уравнение (26) не имеет стационарных точек. Производная функции  $v = s^2$  положительна вдоль любой траектории.

**Теорема 2.** Пусть  $M_H = k(1 - s)$ , где  $k = \text{const}$ ,  $k > 0$ . Уравнение (26): 1) устойчиво в целом, если имеется одна стационарная точка; 2) дихотомично, если стационарных точек две; 3) глобально асимптотически устойчиво, если стационарных точек три (рис. 4).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с использованием функций Ляпунова того же вида.

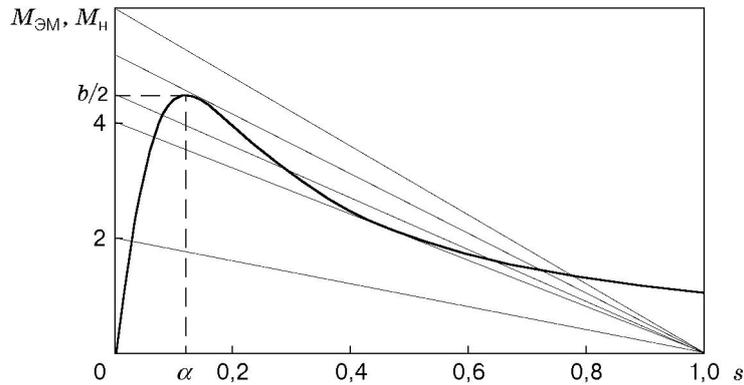


Рис. 4

В случае 1 область притяжения точки  $s_0$  является вся фазовая прямая  $(-\infty, +\infty)$ . В случае 2 область притяжения устойчивого состояния равновесия  $s = s_1$  есть интервал  $(-\infty, s_2)$ . Состояние равновесия  $s = s_2$  полуустойчиво. В случае 3 стационарные точки  $s_1$  и  $s_3$  устойчивы и имеют области притяжения  $(-\infty, s_2)$  и  $(s_2, +\infty)$  соответственно. Стационарная точка  $s_2$  является неустойчивой.

Рассмотрим систему (13). Отметим, что структура системы (13) аналогична структуре известной системы Лоренца [7]. Это обстоятельство позволяет провести нелокальный анализ этой системы с использованием функций Ляпунова, рассмотренных в [8], и получить условия дихотомичности и глобальной асимптотической устойчивости.

Система третьего порядка (13) в случаях постоянного и линейно зависящего от скольжения момента внешней нагрузки исследована в работах [9–11]. В [10, 11] показано, что исследование устойчивости системы пятого порядка (24), (25) сводится к исследованию устойчивости системы третьего порядка (13), т. е. при выполнении одних и тех же условий справедливы одни и те же утверждения как для системы (13), так и для системы (24), (25). Для удобства приведем без доказательств теоремы, в которых формулируются указанные результаты для систем (13) и (24), (25).

**Теорема 3.** Пусть  $M_H = \text{const}$ . Тогда имеют место следующие утверждения: 1) если  $0 < M_H < \min\{b/2, 2\alpha^2/\delta\}$ , то системы (13) и (24), (25) дихотомичны; 2) если  $b/2 < M_H < 2\alpha^2/\delta$ , то все решения систем (13) и (24), (34) неограничены.

**Теорема 4.** Пусть  $M_H = \bar{k}(1 - s)$ ,  $\bar{k} = \text{const}$ . Тогда, если  $0 < \bar{k}\delta \leq 3\alpha\sqrt{(\alpha + \bar{k}\delta)(\alpha - 2\bar{k}\delta)}$ , то системы (13) и (24), (25) глобально асимптотически устойчивы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
2. Ушаков Е. И. Статическая устойчивость электрических систем. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
3. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1985.
4. Родюков Ф. Ф. Некорректность уравнений синхронных машин без демпферных контуров // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. 1993. Сер. 1, вып. 1. С. 82–87.
5. Родюков Ф. Ф., Львович А. Ю. Уравнения электрических машин. СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 1997.
6. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. М.; Л.: Энергия, 1964.

7. **Странные** аттракторы. М.: Мир, 1981.
8. **Леонов Г. А.** О глобальной устойчивости системы Лоренца // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 5. С. 861–863.
9. **Кондратьева Н. В., Шепелявый А. И.** Об устойчивости системы дифференциальных уравнений из теории электрических машин // Нелинейные динамические системы. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1999. Вып. 2. С. 120–129.
10. **Kondrat'eva N. V., Leonov G. A., Rodyukov F. F., Shepeljavyi A. I.** Nonlocal analysis of differential equations of induction motors // Tech. Mech. 2001. Bd 21, h. 1. S. 75–86.
11. **Кондратьева Н. В., Леонов Г. А., Родюков Ф. Ф., Шепелявый А. И.** Нелокальный анализ дифференциальных уравнений асинхронной машины // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 257–280.

*Поступила в редакцию 25/III 2002 г.*

---