

О РАСЧЕТЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДИФФУЗИИ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ТЕПЛОВОГО И ДИФФУЗИОННОГО ЧИСЕЛ ПРАНДТЛЯ

А. М. Супоницкий

(Москва)

Если поток вязкой несжимаемой жидкости, содержащий некоторое вещество обтекает тело, температура которого отлична от температуры потока, то под действием градиента температур происходит перенос компонент раствора. Расчет происходящего термодиффузионного разделения представляет интерес для ряда задач химической технологии. В предыдущей статье автора [1] был рассмотрен процесс разделения в случае больших тепловых и диффузионных чисел Прандтля. В капельных жидкостях диффузионное число Прандтля P достаточно велико (10^3 и более). Между тем тепловое число Прандтля P_1 для капельных жидкостей изменяется в довольно широком диапазоне (при 20° для воды ~ 7 , для смазочных масел $\sim 10^3$), поэтому принятое в [1] предположение $P_1 \gg 1$ ограничивает область приложения проведенных расчетов. Ниже рассмотрена задача расчета термодиффузионного разделения при умеренных значениях теплового и диффузионного чисел Прандтля ($P \geq 1$, $P_1 \geq 1$), а также дана элементарная теория термодиффузионного разделения в вынужденном потоке вязкой жидкости.

1. Рассмотрим задачу о термодиффузионном разделении в плоском ламинарном пограничном слое, образующемся при обтекании клина. Будем предполагать, что наличие в потоке инородного вещества не оказывает влияния на гидродинамику потока. Это предположение представляется вполне естественным, если вещество растворено в сравнительно небольших количествах или слабо отличается по удельному весу от вещества потока. Введем связанную с телом ортогональную систему координат x, y , так, чтобы линия $y = 0$ совпадала с контуром поверхности клина. Распределение скорости в гидродинамическом пограничном слое однородной жидкости дается выражениями [2]

$$u = Uf'(\eta), \quad v = -\left(\frac{m+1}{2} \nu u_1 x^{m-1}\right)^{1/2} \left[f(\eta) + \frac{m-1}{m+1} \eta f'(\eta) \right]$$

$$\eta = \left(\frac{m+1}{2} \frac{u_1}{\nu}\right)^{1/2} x^{\frac{m-1}{2}} y \quad \left(U = u_1 x^m, \quad m = \frac{\beta}{2-\beta} = \text{const} \right) \quad (1.1)$$

Здесь U — распределение скорости во внешнем потенциальном течении, β — угол раствора клина, ν — коэффициент кинематической вязкости, функция $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению Фокнера — Скана.

Перенос вещества в рассматриваемой задаче обусловливается совместным действием конвективного и молекулярного механизмов. Поток вещества в капельной жидкости, переносимый через поверхность молекулярным механизмом, при учете термодиффузии дается выражением [3]

$$j = -\rho D \left[\frac{\partial c}{\partial y} + \sigma c(1-c) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (1.2)$$

где $c(x, y)$ — концентрация вещества, $T(x, y)$ — температура жидкости, ρ — плотность жидкости, D — коэффициент диффузии, σ — коэффициент Соре, y — нормаль к поверхности.

Уравнения для определения концентрации вещества и температуры в диффузионном и тепловом пограничном слоях имеют вид (1.3)

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ D \left[\frac{\partial c}{\partial y} + \sigma c (1 - c) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \right\}, \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

где χ — коэффициент температуропроводности.

Будем считать, что тело непроницаемо для вещества, а концентрация вещества c_0 и температура вдали от тела T_0 , так же как и температура поверхности T_1 , постоянны, тогда граничные условия имеют вид

$$\left[\frac{\partial c(x, y)}{\partial y} + \sigma c(x, y) [1 - c(x, y)] \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (1.4)$$

$$T(x, 0) = T_1, \quad c(x, \infty) = c_0, \quad T(x, \infty) = T_0$$

$$T(0, y) = T_0, \quad c(0, y) = c_0$$

Примем, что раствор обладает постоянными физическими характеристиками. Если искать решение в виде

$$T = T(\eta), \quad c = c(\eta) \quad \left(\eta = \left[\frac{m+1}{2} \frac{u_1}{v} \right]^{1/2} x^{\frac{m-1}{2}} y \right) \quad (1.5)$$

то, подставляя (1.5) в (1.3), (1.4) и учитывая (1.1), получим

$$-P f(\eta) c_{\eta}' = c_{\eta\eta}'' + \sigma [c(1-c) T_{\eta\eta}']_{\eta}', \quad -P_1 f(\eta) T_{\eta}' = T_{\eta\eta}'' \quad (1.6)$$

$$c(\infty) = c_0, \quad T(\infty) = T_0, \quad [c_{\eta}'(\eta) + \sigma c(1-c) T_{\eta\eta}']_{\eta=0} = 0, \quad T(0) = T_1$$

Здесь $P = v/D$, $P_1 = v/\chi$ — диффузионное и тепловое числа Прандтля. Уравнение переноса тепла, второе уравнение системы (1.6), имеет решение, выраженное квадратурой

$$T(\eta) = \alpha(P_1) (T_0 - T_1) \int_0^{\eta} \exp \left(-P_1 \int_0^{\xi} f(h) dh \right) d\xi + T_1 \quad (1.7)$$

$$\alpha(P_1) = \left[\int_0^{\infty} \exp \left(-P_1 \int_0^{\xi} f(h) dh \right) d\xi \right]^{-1}$$

Значения функции $\alpha(P_1)$ для ряда значений P_1 при различных m были вычислены Эвансом [4]. Подставляя (1.7) в уравнение и граничные условия диффузионной части задачи (1.6), получим

$$-P f(\eta) c_{\eta}' = c_{\eta\eta}'' + \varepsilon \alpha(P_1) \left[c(1-c) \exp \left(-P_1 \int_0^{\eta} f(h) dh \right) \right]_{\eta}' \quad (1.8)$$

$$[c_{\eta}' + \varepsilon \alpha(P_1) c(1-c)]_{\eta=0} = 0, \quad c(\infty) = c_0, \quad \varepsilon = \sigma (T_0 - T_1)$$

Из (1.8) следует, что величина разделения $\Delta = [c(0) - c_0] / c_0$ для клина данного раствора зависит только от P , P_1 и ε .

2. Экспериментальные исследования показывают, что коэффициент Соре σ имеет значения порядка $10^{-2} - 10^{-3} 1 / \text{град}$, поэтому даже при значительных перепадах температур $T_0 - T_1$ величину $\varepsilon = \sigma (T_0 - T_1)$ можно считать малой.

Будем искать решение системы (1.8) в виде ряда по малому параметру ε

$$c(\eta) = c_0(\eta) + \varepsilon c_1(\eta) + \dots \quad (2.1)$$

Расчеты дают для первых двух членов ряда (2.1) при $\gamma = P_1 / P = D / \chi \neq 1$ следующее выражение

$$c = c_0 + \sigma (T_0 - T_1) \left\{ - \frac{c_0 (1 - c_0) \alpha (P_1)}{1 - \gamma} \left[\int_0^\eta \exp \left(- P \int_0^\xi f(h) dh \right) d\xi - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma \int_0^\eta \exp \left(- P_1 \int_0^\xi f(h) dh \right) d\xi \right] + \frac{c_0 (1 - c_0)}{1 - \gamma} \left[\frac{\alpha (P_1)}{\alpha (P)} - \gamma \right] \right\} + \dots \quad (2.2)$$

Концентрация вещества на поверхности клина определится из (2.2):

$$c(0) = c_0 + \frac{\sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0)}{1 - \gamma} \left[\frac{\alpha (P_1)}{\alpha (P)} - \gamma \right] \quad (2.3)$$

В случае больших значений величины P_1 при вычислении интеграла, определяющего $\alpha (P_1)$, для функции $f(\eta)$ можно принять ее значение вблизи $\eta = 0$. Полагая $f(\eta) = E\eta^2$, $E = \text{const}$, получим

$$\alpha (P_1) = \frac{P_1^{1/3} E^{1/3}}{3^{1/3} \Gamma(4/3)} \quad (2.4)$$

Таким образом, при больших значениях теплового и диффузионного чисел Прандтля выражение (2.3) с учетом (2.4) переходит в формулу (3.3) работы [1]

$$c(0) = c_0 + \sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0) \gamma^{1/3} (1 - \gamma^{1/3}) (1 - \gamma)^{-1} \quad (2.5)$$

В растворах слабой концентрации, полагая $c_0 (1 - c_0) \approx c_0$, из (2.5) получим

$$\Delta = \frac{c(0) - c_0}{c_0} = \frac{\sigma (T_0 - T_1) (\gamma^{1/3} + \gamma^{2/3})}{1 + \gamma^{1/3} + \gamma^{2/3}} \quad (2.6)$$

Функция $S(\gamma) = (\gamma^{1/3} + \gamma^{2/3}) (1 + \gamma^{1/3} + \gamma^{2/3})^{-1}$ на интервале (0.1) будет монотонно возрастающей. Напомним, что величина $\gamma = D / \chi$ для жидкости меньше единицы. Из (2.6) следует, что при увеличении γ разделение Δ возрастает. Физическая интерпретация этого факта дана в п. 5. Отметим, что экстраполяция результатов на интервал $(1, \infty)$ необоснована, что следует из метода получения уравнения (1.8).

Для водных растворов ($\gamma \ll 1$) формула (2.3) принимает вид

$$c(0) = c_0 + \frac{\sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0) \alpha (P_1)}{\alpha (P)} \quad (2.7)$$

Число P для водных растворов велико, вычисляя $\alpha (P)$ по формуле (2.4), получим

$$c = c_0 + \sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0) 3^{1/3} \Gamma(4/3) \alpha (P_1) E^{-1/3} P^{-1/3} \quad (2.8)$$

Если $\gamma = 1$, то первые два члена ряда (2.1) имеют вид

$$c = c_0 + \sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0) \left\{ - \alpha (P) \int_0^\eta \exp \left(- P \int_0^\xi f(h) dh \right) d\xi + \right. \\ \left. + \alpha (P) P \int_0^\eta \left[\exp \left(- P \int_0^\xi f(h) dh \right) \right] \left(\int_0^\xi f(h) dh \right) d\xi + \left[1 - \frac{\alpha (P) P}{\beta (P)} \right] \right\} + \dots \quad (2.9)$$

$$\beta (P) = \left\{ \int_0^\infty \left[\exp \left(- P \int_0^\xi f(h) dh \right) \right] \left(\int_0^\xi f(h) dh \right) d\xi \right\}^{-1}$$

Концентрация вещества на поверхности клина дается выражением

$$c(0) = c_0 + \sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0) \left[1 - \frac{\alpha(P) P}{\beta(P)} \right] \quad (2.10)$$

При больших значениях P формула (2.10) переходит в (2.6), в которой положено $\gamma = 1$.

3. При решении задачи в предыдущем пункте был использован метод малого параметра. Дадим приближенное решение задачи в замкнутом виде, внося некоторые изменения исходных уравнений (1.3) за счет частичного упрощения члена, выражающего влияние термодиффузии. Предположим, что тепловой пограничный слой значительно толще диффузионного. Разложим в ряд Маклорена выражение для распределения температуры в потоке (1.7) и ограничимся первыми двумя членами

$$T(\eta) = T_1 + \alpha(P_1)(T_0 - T_1)\eta \quad (3.1)$$

Подставим (3.1) в уравнение и граничные условия диффузионной части задачи (1.6). В случае раствора слабой концентрации получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с разделяющимися переменными. Интегрирование дает

$$c(\eta) = - \frac{c_0 \varepsilon \alpha(P_1)}{1 - \varepsilon \alpha(P_1) J} \int_0^\eta \exp \left[-P \int_0^\xi f(h) dh - \varepsilon \alpha(P_1) \xi \right] d\xi + \frac{c_0}{1 - \varepsilon \alpha(P_1) J} \left(J = \int_0^\infty \exp \left[-P \int_0^\xi f(h) dh - \varepsilon \alpha(P_1) \xi \right] d\xi \right) \quad (3.2)$$

Концентрация вещества на поверхности клина определится из (3.2):

$$c(0) = c_0 [1 - \varepsilon \alpha(P_1) J]^{-1} \quad (3.3)$$

При малых значениях параметра ε формула (3.3) переходит в (2.7), в которой, учитывая слабую концентрацию раствора, нужно положить $c_0(1 - c_0) \approx c_0$.

4. Рассмотрим класс ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости, в которых нормальная к поверхности компонента скорости v_y зависит только от расстояния по нормали к поверхности y . Этому классу течений, в частности, принадлежат: течение, вызванное вращением диска в жидкости, обтекание передней критической точки тела. Обзор задач тепло- и массообмена для этого класса течений можно найти в работе [5].

Изучим задачу термодиффузионного разделения для этих течений в предположении $P \gg 1$ и $P_1 \gg 1$. Нетрудно установить, что уравнения тепловой и диффузионной частей задачи термодиффузионного разделения допускают решения, зависящие только от нормальной к поверхности координаты y . С учетом этого соображения уравнения и граничные условия принимают вид

$$-Mf(y/N)c_y' = D[c_y' + \sigma c(1-c)T_y']_y', \quad -Mf(y/N)T_y' = \chi T_y''_y \\ c_y' + \sigma c(1-c)T_y' = 0, \quad T = T_1 \text{ при } y=0; \quad c = c_0, \quad T = T_0 \text{ при } y=\infty \quad (4.1)$$

Здесь M и N — константы. Для случая вращения диска с постоянной угловой скоростью ω в жидкости (задача Кармана)

$$M = (\omega v)^{1/2}, \quad N = (v/\omega)^{1/2}$$

нормальная к поверхности диска компонента скорости

$$v_y = -Mf(\omega^{1/2}y/v^{1/2})$$

Функция $f(y/N)$ была определена рядом авторов из численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Для других течений этого класса значения констант M, N можно найти в работе [5].

Введем следующие обозначения:

$$\eta = \frac{y}{N}, \quad P = \frac{MN}{D}, \quad P_1 = \frac{MN}{\chi}, \quad c^*(\eta) = c(y), \quad T^*(\eta) = T(y) \quad (4.2)$$

Если в системе (4.1) перейти к новой переменной η и ввести обозначения (4.2), то получим систему (1.6). Таким образом, все результаты, полученные для задачи термодиффузионного разделения на клине, имеют место для рассматриваемого класса течений.

5. Приведем некоторые элементарные соображения о термодиффузионном эффекте при вынужденной конвекции, которые основаны на некоторых гипотезах о структуре термодиффузионного пограничного слоя и соображениях подобия. Эти соображения представляют собой интерпретацию полученных выше результатов.

Пусть жидкость с начальной концентрацией c_0 помещена между двумя горизонтальными стенками, верхняя из которых имеет температуру T_0 , а нижняя T_1 . Предположим, что в слое отсутствует какое-либо конвективное течение (в том числе и свободная конвекция). Под действием градиента температур возникает перенос вещества при помощи молекулярного механизма. Через некоторое время процесс переноса закончится и установится стационарное распределение концентрации. Из условия равенства потока вещества j нулю и начального условия получим для раствора слабой концентрации следующие условия:

$$j = D \left(\frac{\partial c}{\partial y} + \sigma c \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad \int_0^l c(y) dy = c_0 l \quad (5.1)$$

Здесь l — расстояние между пластинами, y — расстояние по нормали к поверхности пластин. Считая, что величина $\varepsilon = \sigma(T_2 - T_1)$ мала, легко получить из (5.1) величину разделения

$$\Delta = \frac{c_1 - c_2}{c_0} = \sigma(T_0 - T_1) \quad (5.2)$$

где c_1, c_2 — концентрации вещества соответственно на нижней и верхней пластинах.

В случае термодиффузии в вынужденном потоке будем считать, что термодиффузионный слой можно разбить на два слоя: тепловой пограничный слой и находящийся внутри его диффузионный пограничный слой. Примем, что тепловой пограничный слой при вынужденном течении дает такое же разделение, как и в рассмотренном выше случае неподвижного слоя (это предположение присуще так называемым пленочным теориям). Далее допустим, что «работает», т. е. вызывает разделение лишь часть теплового пограничного слоя, совпадающая с диффузионным пограничным слоем. Обозначим соответственно $\delta_{(1)}, \delta_{(2)}, \delta$ — толщины диффузионного, теплового и гидродинамического пограничных слоев. Величина разделения Δ тогда дается выражением

$$\Delta = \sigma(T_0 - T_1) \delta_{(1)} \delta_{(2)}^{-1} \quad (5.3)$$

При больших значениях P и P_1

$$\delta_{(1)} = \frac{\delta}{P^{1/3}} = \frac{\delta D^{1/3}}{\nu^{1/3}}, \quad \delta_{(2)} = \frac{\delta}{P_1} = \frac{\delta \chi^{1/3}}{\nu^{1/3}} \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$\Delta = \sigma (T_0 - T_1) \gamma^{1/2} \quad (5.5)$$

Формула (5.5) совпадает с (2.6) в случае малых значений величины $\gamma^{1/2}$.

При увеличении γ согласно изложенным выше соображениям увеличивается действующая часть теплового пограничного слоя и величина разделения должна расти, что также следует из (2.6).

В случае $P \geq 1$ и $P_1 \geq 1$ определим толщины теплового и диффузионного слоев для клина выражениями

$$\delta_{(2)} = \frac{k(T_0 - T_1)}{j_1} = \frac{k(T_0 - T_1)}{k(T_0 - T_1) \alpha(P_1) \eta_{y'}|_{y=0}} = \frac{1}{\alpha(P_1) \eta_{y'}|_{y=0}} \quad (5.6)$$

$$\delta_{(1)} = \frac{D(c_0 - c_*)}{j} = \frac{D(c_0 - c_*)}{D(c_0 - c_*) \alpha(P) \eta_{y'}|_{y=0}} = \frac{1}{\alpha(P) \eta_{y'}|_{y=0}}$$

где j_1 и j — соответственно потоки тепла и вещества на поверхности клина, c_* — концентрация вещества поверхности клина. Подставляя значения для $\delta_{(2)}$ и $\delta_{(1)}$ в (5.3), получим формулу (2.7) для сильно разбавленных растворов.

6. Поток вещества через поверхность в газовых смесях, находящихся в неизотермических условиях, дается выражением [3]

$$j = -\rho \left[D \operatorname{grad} c + \frac{D_T c (1 - c) \operatorname{grad} T}{T} \right] \quad (6.1)$$

где D_T — коэффициент термодиффузии.

Ряд исследователей пользуются выражением (6.1) при описании термодиффузии в жидкостях. При задании потока вещества в виде (6.1) автомодельность термодиффузионной задачи при вынужденной конвекции, очевидно, не нарушается. Предполагая далее малость величин

$$\sigma_1 = D_T/D, \quad \varepsilon_1 = (T_0 - T_1)/T_1$$

нетрудно показать справедливость следующего положения: для расчета термодиффузионного разделения при вынужденной конвекции в случае задания молекулярного переноса вещества выражением (6.1) достаточно в решении, полученном при задании молекулярного переноса выражением (1.2), поменять $\sigma (T_0 - T_1)$ на $D_T(T_0 - T_1)/DT_1$.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за внимание и советы.

Поступила 13 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Супоницкий А. М. О расчете термической диффузии в ламинарном потоке несжимаемой вязкости жидкости при больших числах Прандтля. ПМТФ, 1962, № 2.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
3. Грю К. Э., Иббс Т. Л. Термическая диффузия в газах. Гостехиздат, 1956.
4. Evans H. L. Mass transfer through laminar boundary layers. За Similar solutions of the b-equation, when $B=0$ and $\sigma \geq 0.5$. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1961, vol. 3, No. 1.
5. Супоницкий А. М. Автомодельные задачи конвективной диффузии при наличии гетерогенных химических реакций со смешанной кинетикой. ПМТФ, 1963, № 2.