

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВЗРЫВОМ И ОБТЕКАНИЕМ ТЕЛ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

В. П. Коробейников

(Москва)

Известно, что результаты решения задачи о цилиндрическом точечном взрыве в газе могут быть использованы для приближенного определения ряда характеристик потока при стационарном гиперзвуковом обтекании тонких затупленных тел [1, 2, 3]. В работах [1-5] сравнение результатов теории взрыва с расчетами задачи обтекания затупленного цилиндра проводилось для случая автомодельного взрыва [6] без учета противодавления или с линеаризованной задачей о взрыве с учетом противодавления. Ниже указывается приближенный способ определения закона движения ударной волны и давления в центре взрыва; проводится сравнение этих вычислений с расчетами в задачах обтекания.

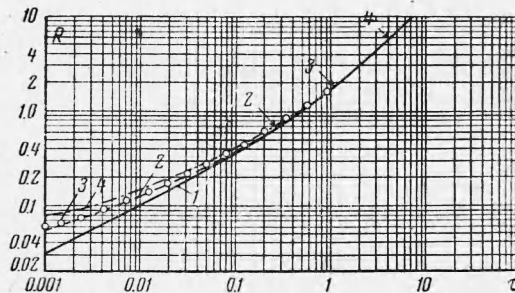
Для приближенного определения закона $r_2(t)$ движения ударной волны (r_2 — радиус ударной волны) может быть использован способ, указанный в работах [7, 8]. Обозначим индексом 1 величины перед фронтом ударной волны, а индексом 2 — величины непосредственно за фронтом волны. Введем безразмерные величины

$$R = \frac{r_2}{r^{\circ}}, \quad \tau = \frac{t}{t^{\circ}}$$

$$R_0 = \frac{\tau_0^{1/2}}{\alpha^{1/4}}, \quad r^{\circ} = \left(\frac{E_0}{\rho_1}\right)^{1/2}$$

$$a_1 = \left(\frac{\gamma p_1}{\rho_1}\right)^{1/2}, \quad t^{\circ} = r^{\circ} \frac{\sqrt{\gamma}}{a_1}$$

($\alpha = \text{const}$)



Фиг. 1

Здесь r° — динамическая длина; t° — динамическое время; a_1 — скорость звука в покоящемся газе; E_0 — энергия на единицу длины; τ_0 — значение τ , для которого можно использовать автомодельное решение.

В соответствии с результатами работ [7, 8] для нахождения зависимости $R(\tau)$ имеем формулы

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{4\gamma \sqrt{\alpha}} \left[\sqrt{1 + 16\gamma\alpha R^2} - \sqrt{1 + 16\gamma\alpha R_0^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 16\gamma\alpha R^2}}{1 + \sqrt{1 + 16\gamma\alpha R_0^2}} \right]$$

для $R \leq 2$ (1)

$$\tau - \tau^* = R\gamma^{-1/2} [1 - (\gamma\alpha)^{-1/2} 2^{-1/4} R^{-3/4}] \quad \text{для } R \geq 2 \quad (2)$$

Здесь τ^* — постоянная, определяемая из условия совпадения τ (заданных (1) и (2)) при $R = 2$; постоянная α известна из решения автомодельной задачи. Зависимость $R(\tau)$, соответствующая (1), (2) ($\gamma = 1.4$), указана на фиг. 1 (сплошная линия). Для приближенного определения давления в центре взрыва воспользуемся методом интегральных соотношений, аналогичным методам, рассмотренным в работах [1, 6, 9, 10].

Рассмотрим уравнения, выражающие закон сохранения энергии и постоянство энтропии в частице газа для случая одномерных движений совершенного газа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[r^{\nu-1} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{\nu-1} v \left(\frac{\gamma p}{\gamma-1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p^{1/\gamma} r^{\nu-1}) + \frac{\partial}{\partial r} (v p^{1/\gamma} r^{\nu-1}) = 0 \quad (4)$$

Здесь v — скорость, p — давление, ρ — плотность, для цилиндрического взрыва $\nu = 2$.

Как известно [7], из уравнения (3) следует интегральное соотношение

$$E_0 + \frac{\sigma_\nu}{\gamma-1} p_1 \frac{r_2^\nu}{\nu} = \sigma_\nu \int_0^{r_2} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) r^{\nu-1} dr$$

$$\sigma_\nu = 2\pi(\nu-1) + (\nu-2)(\nu-3) \quad (5)$$

Интегрируя (4) по r от r_2 до $r_0 < r_2$, получаем

$$v_0 p_0^{1/\gamma} r_0^{\nu-1} - v_2 r_2^{\nu-1} p_2^{1/\gamma} = - \int_{r_2}^{r_0} \frac{\partial}{\partial t} (p^{1/\gamma} r^{\nu-1}) dr \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{2c}{\gamma+1} (1-q), \quad p_2 = p_1 \frac{2\gamma - (\gamma-1)q}{(\gamma+1)q}, \quad q = \frac{a_1^2}{c^2} \quad \left. \begin{array}{l} (v_0 = v(r_0, t)) \\ (p_0 = p(r_0, t)) \end{array} \right\}$$

Здесь c — скорость ударной волны. Введем новые безразмерные переменные

$$l = R^\nu, \quad \xi = \left(\frac{r}{r_2} \right)^\nu, \quad \varphi = \frac{r_2}{r} \frac{v}{c}, \quad \psi = \left(\frac{p}{p_1} q \right)^{1/\gamma}, \quad g = \frac{\rho}{\rho_1}$$

Из (5) и (6) имеем

$$\frac{\nu q}{\sigma_\nu l} + \frac{q}{\gamma-1} = \int_0^1 e d\xi, \quad e = \frac{1}{2} \gamma g \xi^{2/\nu} \varphi^2 + \frac{\psi^\gamma}{\gamma-1} \quad (7)$$

$$\psi_0 (\varphi_0 - 1) \xi_0 + \psi_2 g_2^{-1} = \left(-1 + \frac{z}{\gamma q} \right) \int_1^{\xi_0} \psi d\xi - z \frac{\partial}{\partial q} \int_1^{\xi_0} \psi d\xi + z \psi_0 \xi_0' \quad (8)$$

$$\xi_0 = \xi_0(q) = \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^\nu, \quad g_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}, \quad z = l \frac{dq}{dt}$$

Зависимость $l(q)$, соответствующая приближенной формуле (1), имеет вид

$$l = \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha \gamma} \frac{q}{(1-q)^2} \quad (9)$$

Как известно [6,7,14], вблизи центра взрыва, т. е. в окрестности $\xi = 0$, решение может быть представлено в виде

$$\varphi = \frac{z}{\gamma} \left(-\gamma \frac{d \ln \psi_0}{dq} + \frac{1}{q} \right) + O(\xi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}) \quad (10)$$

$$\psi = \psi_0(q) + O(\xi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}), \quad e = \frac{\psi_0^\gamma}{\gamma-1} + O(\xi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}) \quad (11)$$

Для нахождения приближенного значения ψ_0 будем предполагать, что по ξ от $\xi = 0$ до $\xi = \xi_0$ для ψ и e верны формулы (11), а от $\xi = \xi_0$ до $\xi = 1$ применять для вычисления ψ и e линейную интерполяцию. Заменяя φ по формуле (10) и учитывая (9), из (8) и (7), вычисляя входящие в них.

интегралы методом трапеций, найдем дифференциальное уравнение для ψ_0

$$\psi_0' = \frac{B + C + D}{A} \quad (12)$$

Здесь

$$A = (1 + \xi_0) [\gamma \psi_2 \psi_0^{\gamma-1} - (\gamma - 1) (\psi_0^\gamma + e_2)]$$

$$B = \frac{a}{q} \left\{ 2\psi_2 g_2^{-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} [2\psi_0 \xi_0 + (1 - \xi_0) (\psi_0 + \psi_2)] \right\}$$

$$C = -a(1 - \xi_0) \psi_2' - \frac{2a}{1-q} [\psi_0(1 + \xi_0) - 2\psi_2 g_2^{-1} + (1 - \xi_0) \psi_2]$$

$$a = \psi_0^\gamma - (\gamma - 1) e_2$$

$$D = (\psi_2 - \psi_0) \left[2 - \frac{4(\gamma-1)}{\Delta(1-q)} - (1 - \xi_0) (\gamma - 1) e_2' \right], \quad \Delta = \frac{\sigma_v}{v} \frac{l}{q}$$

$$e_2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{(1-q)^2}{\gamma-1+2q} + \frac{2\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)} - \frac{q}{\gamma+1}, \quad \psi_2^\gamma = \frac{2\gamma}{\gamma+1} - q \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

Величина центрального интервала ξ_0 вычисляется по формуле

$$\xi_0 = \frac{2(\gamma-1)\Delta^{-1} + 2q - (\gamma-1)e_2 - \psi_0^\gamma}{\psi_0^\gamma - e_2(\gamma-1)}$$

В уравнениях (8) — (12) штрих означает производную по q . Уравнение (12) следует интегрировать от малых q до значений q , близких к единице.

Из решения автомодельной задачи (т. е. при $q = 0$) известно, что $\psi_0(0) = 0.544$, $\alpha = 0.984$ при $\gamma = 1.4$. При интегрировании уравнения (12) для $\gamma = 1.4$ были заданы начальные данные при $q = 0.06$ по решению линеаризованной задачи [7,11,12] о цилиндрическом взрыве. Расчет был проведен до $q = 0.994$. С учетом зависимости $l(q)$ и соотношений (1), (2) можно определить изменение p_2/p_1 с ростом τ (эта зависимость указана сплошной линией на фиг. 2).

Для сравнения полученных результатов теории взрыва с характеристиками потока при обтекании затупленного цилиндра использовались данные работ [5,13]. При этом в соответствии с результатами работы [1] при переходе к нестационарным переменным производилась замена величин $c_x^{1/2} \rho U^2 d^2$, x на E_0 , Ut соответственно.

Здесь U — скорость набегающего потока, направленная по оси x ; c_x — коэффициент сопротивления затупления; d — поперечный размер затупления. Переменные τ и R примут вид

$$\tau = \frac{1}{M^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c_x}} \frac{1}{\gamma} \frac{x}{d}, \quad R = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{r}{\sqrt{c_x}} \frac{1}{Md} \quad \left(M = \frac{U}{a_1} \right) \quad (13)$$

Отметим, что аналогичные переменные использовались в работе [1] при исследовании аналогии между теорией взрыва и задачами обтекания.

Сравнение результатов теории взрыва и решения задачи обтекания дано на фиг. 1, 2. Кривые 1 на этих фигурах соответствуют приближенному расчету цилиндрического взрыва; кривые 2, 3, 4 соответствуют расчету методом характеристик [13] задачи об обтекании затупленного тела при разных формах затупления ($M = 10$, $M = 6$).

Кривая 2 соответствует сферическому затуплению, $M = 10$; кривая 3 — затуплению в форме эллипсоида вращения с большой полуосью вдоль по потоку, $M = 6$; кривая 4 — сферическому затуплению, $M = 6$.

На фиг. 2 приведена также кривая 5, соответствующая расчету обтекания затупленного цилиндра воздухом [5] при числе $M \approx 18$ (затупление сферической формы). На фиг. 1 дано сравнение законов движения удар-

ной волны (формы ударной волны в стационарной задаче). Из сравнения зависимостей $R(\tau)$ следует, что расчетные кривые, заимствованные из [13] для больших M , близки к кривой, полученной из (1), (2). Концы кривых 2, 3, 4 отмечены на фиг. 1 стрелками.

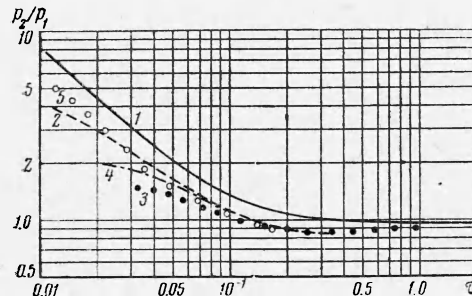
Отметим, что тангенс угла наклона ударной волны dy/dx в стационарном случае для больших x (x — расстояние вдоль тела) стремится к наклону характеристики, т. е.

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow (M^2 - 1)^{-1/2}$$

Скорость же ударной волны в нестационарной задаче dr_2/dt стремится к скорости звука a_1 ; осуществляя переход к переменным τ и R , получаем

$$\frac{dR}{d\tau} \rightarrow V \sqrt{\gamma} \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad \frac{dR}{d\tau} \rightarrow V \sqrt{\gamma}$$

для обтекания и взрыва соответственно.



Фиг. 2

Таким образом, при обтекании форма ударной волны на больших расстояниях будет тем ближе к форме, полученной из теории взрыва, чем больше число M . Это накладывает ограничения для переноса данных нестационарной задачи на задачу обтекания и обратно.

Данное на фиг. 2 сравнение давлений в центре взрыва и на теле указывает на влияние числа M и формы затупления на величины давлений. Следует учесть, что найденные приближенные значения давления в задаче о взрыве являются завышенными. Это вытекает из сравнения приближенных величин ψ_0 для сферического случая, найденных способом, аналогичным указанному выше, с точным расчетом, данным в работе [14].

Из сравнения зависимостей p/p_1 от τ , указанных на фиг. 2, следует, что с ростом M распределение давлений на поверхности цилиндра приближается к зависимости $p/p_1(\tau)$, полученной из теории цилиндрического точечного взрыва. К сожалению, автор не имел возможности сравнить распределения давлений, полученные по теории взрыва в совершенном газе с распределением давлений, полученным из расчета задачи о стационарном обтекании тел методом характеристик при $M > 10$.

Указанная на фиг. 2 кривая, для больших M , заимствованная из работы [5], соответствует расчету обтекания затупленного цилиндра воздухом с учетом равновесной диссоциации. Зная приближенные зависимости p/p_1 в центре взрыва и на фронте ударной волны путем линейной интерполяции, можно найти изменение p/p_1 с течением времени и для значений ξ , лежащих в интервале $\xi_0 < \xi < 1$, а также приближенно определить распределение давлений по пространству в фиксированные моменты времени.

Аналогично может быть рассмотрен случай плоского взрыва и сравнение его параметров с соответствующими величинами, полученными из расчета задачи о стационарном обтекании затупленной пластины гиперзвуковым потоком совершенного газа. Для плоского взрыва динамическая длина r° определяется по формуле

$$r^\circ = E_0/p_1$$

Здесь E_0 — энергия взрыва, рассчитанная на единицу площади. Приближенная зависимость $R(\tau)$, дающая закон движения ударной волны для этого случая [7], имеет вид

$$\tau - \tau_0 = \frac{\alpha^{-1/2}}{3\gamma} \left[2(R_0^{1/2} - R^{1/2}) + R^{1/2} \Phi^{1/2} - R_0^{1/2} \Phi_0^{1/2} - \omega^{-1/2} \ln \frac{\Phi^{1/2} + \omega^{-1/2} R^{1/2}}{\Phi_0^{1/2} + \omega^{-1/2} R_0^{1/2}} \right]$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi = 1 + \omega R, \quad \omega = 9\gamma\alpha, \quad R_0 = \alpha^{-1/3} \tau_0^{2/3}$$

Для расчета давления в центре взрыва следует использовать уравнение (12) с учетом, что в плоском случае параметр ν следует взять равным единице и соответственно изменить формулу (9).

При сравнении с результатами обтекания затупленной пластины должно быть учтено [1], что в этом случае следует заменить x на Ut , а $2E_0$ на

$$^{1/2} c_x \rho_1 U^2 d$$

В заключение заметим, что рассмотренный выше способ определения давления не позволяет определить время и место возникновения и интенсивность второй ударной волны, следующей за основной ударной волной. По аналогии со сферическим случаем [15] вторая ударная волна может возникнуть в цилиндрическом и плоском случаях.

Поступила 27 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течение газа при больших сверхзвуковых скоростях. Физматгиз, 1959.
2. Hayes W., Probstein R. Hypersonic flow theory. Academic Press, New York - London, 1959.
3. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies. Journ. Aeron. Sci., 1957, vol. 24, No. 3.
4. Чушкин П. И. Исследование обтекания затупленных тел вращения при гиперзвуковой скорости. Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1962, т. 2, № 2.
5. Feldman S. Numerical comparison between exact and approximate theories of hypersonic inviscid flow past slender blunt nosed bodies. ARS Journal, 1960, vol. 30, No 5.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4-е, Гостехиздат, 1957.
7. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. Физматгиз, 1961.
8. Коробейников В. П. Приближенные формулы для расчета характеристик фронта ударной волны при точечном взрыве в газе. ДАН СССР, 1956, т. 111, № 3.
9. Черный Г. Г. Применение интегральных соотношений в задачах о распространении сильных ударных волн. ПММ, 1960, т. 24, № 1.
10. Белоцерковский О. М., Чушкин П. И. Численный метод интегральных соотношений. Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5.
11. Sakurai A. On propagation and structure of the blast wave. Journ. Phys. Soc. Japan, 1954, vol. 9, No 2.
12. Брушлинский Д. Н., Соломахова Т. С. Исследование задачи о сильном взрыве с учетом противодействия. Сб. статей № 19, Теоретическая гидромеханика, Оборонгиз, 1956, вып. 7.
13. Чушкин П. И., Шулишина Н. П. Таблицы сверхзвукового течения околозатупленных конусов. М., Вычислит. центр АН СССР, 1961.
14. Хоцимский Д. Е., Кондрашова И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1957, т. 50.
15. Хоцимский Д. Е., Власова З. П. О поведении ударных волн на большом расстоянии от места взрыва. Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.