

5. То К. С. A phenomenological theory of subcritical creep crack growth under constant loading in an inert environment.— Int. J. Fract., 1975, vol. 11, N 4.
6. Vitek V. A theory of diffusion controlled intergranular creep crack growth.— Acta Met., 1978, vol. 26, N 9.
7. Астафьев В. И. О росте трещин при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины.— ПМТФ, 1979, № 6.
8. Leeuwen H. P. The application of fracture mechanics to creep crack growth.— Eng. Fract. Mech., 1977, vol. 9, N 4.
9. Ellison E. G., Harper M. P. Creep behaviour of components containing cracks. A critical review.— J. Strain Anal., 1978, vol. 13, N 1.
10. Fu L. S. Creep crack growth in technical alloys at elevated temperature. A review.— Eng. Fract. Mech., 1980, vol. 13, N 2.
11. Riedel H. Creep deformation at crack tip in elastic — viscoplastic solids.— J. Mech. Phys. Solids, 1981, vol. 29, N 1.
12. Bassani J. L., McClintock F. A. Creep relaxation of stress around a crack tip.— Int. J. Solids Struct., 1981, vol. 17, N 5.
13. Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material.— J. Mech. Phys. Solids, 1968, vol. 16, N 1.
14. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power — law hardening material.— J. Mech. Phys. Solids, 1968, vol. 16, N 1.
15. Barnby J. T., Nicholson R. D. Local stress and strain during crack growth by steady state creep.— J. Mater. Sci., 1977, vol. 12, N 10.
16. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.

УДК 539.374

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ

В. П. Зебриков

(Куйбышев)

Упругопластическое состояние эксцентрической трубы под действием внутреннего давления рассматривалось в [1]. Решение проводилось методом возмущений при условии, что пластическая зона полностью охватывает внутренний контур. В данной работе предлагается модифицированный метод возмущений, который позволяет исследовать напряженное состояние и развитие пластической зоны с охватом только части контура. Указанным методом решена задача об упругопластическом кручении эксцентрических труб [2].

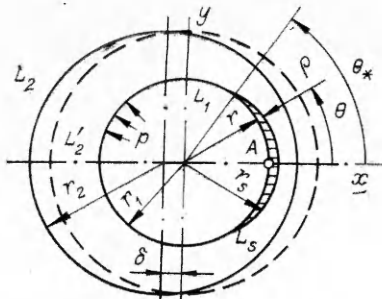
Рассмотрим поперечное сечение эксцентрической трубы (фиг. 1) из идеального упругопластического материала, нагруженной внутренним давлением. Уравнения внутреннего и наружного контуров поперечного сечения эксцентрической трубы имеют вид

$$(1) \quad L_1 : r = r_1,$$

$$L_2 : r = -\delta \cos \theta + \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \theta} = 1 - \delta \cos \theta + (\delta^2/2) \sin^2 \theta + \dots,$$

где все линейные размеры отнесены к r_2 .

При отсутствии пластической зоны внутреннее давление вызывает напряжения, которые определены методом возмущений [3] с учетом членов с δ не выше δ^2 :



Ф и г. 1

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_0} = & a_0 r^{-2} + 2c_0 + \delta(2b_1 r - 2a_1' r^{-3}) \times \\ & \times \cos \theta + \delta^2(a_0' r^{-2} + 2c_0' - (2a_2 + 6a_2' r^{-4} + \\ & + 4b_2' r^{-2}) \cos 2\theta), \\ \sigma_{\theta_0} = & -a_0 r^{-2} + 2c_0 + \delta(6b_1 r + 2a_1' r^{-3}) \times \\ & \times \cos \theta + \delta^2(-a_0' r^{-2} + 2c_0' + \\ & + (2a_2 + 12b_2 r^2 + 6a_2' r^{-4}) \cos 2\theta). \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = \delta(2b_1r - 2a_1'r^{-3}) \sin \theta + \delta^2(2a_2 - 6a_2'r^{-4} + 6b_2r^2 - 2b_2'r^{-2}) \sin 2\theta,$$

где

$$a_0 = -\frac{pr_1^2}{1-r_1^2}; \quad c_0 = \frac{pr_1^2}{2(1-r_1^2)}; \quad a_1' = -\frac{a_0r_1^4}{1-r_1^4};$$

$$b_1 = -\frac{a_0}{1-r_1^4}; \quad a_0' = \frac{Lr_1^2}{1-r_1^2}; \quad c_0' = -\frac{L}{2(1-r_1^2)};$$

$$a_2 = \frac{1}{2} D^{-1}(2G(r_1^{-2} - 1) - M(r_1^{-6} + r_1^{-2} - 2));$$

$$a_2' = \frac{1}{6} D^{-1}(2G(1 - r_1^2) - M(3r_1^{-2} - r_1^2 - 2)); \quad b_2 = \frac{1}{6} D^{-1}(G(r_1^{-6} -$$

$$- 4r_1^{-4} + 3r_1^{-2}) - M(-r_1^{-6} - 2r_1^{-4} + 3r_1^{-2})); \quad b_2' = \frac{1}{2} D^{-1}(G(-r_1^{-2} + r_1^2) -$$

$$- M(-2r_1^{-4} + r_1^{-2} + r_1^2)); \quad L = \frac{4a_0}{1-r_1^4}; \quad M = -\frac{a_0(3r_1^4 + 1)}{1-r_1^4};$$

$$G = -\frac{a_0(5 + 3r_1^4)}{1-r_1^4}; \quad D = r_1^{-6} - 4r_1^{-4} + 6r_1^{-2} + r_1^2 - 4.$$

Рассматривается случай, когда коэффициент Пуассона $\mu = 1/2$ и условия пластичности по Треска и Мизесу совпадают:

$$(3) \quad (\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4K^2$$

(K — предел текучести при сдвиге).

Исследуется случай, когда левая часть (3) максимальна в точке A [4] и пластическое течение начнется из точки A , когда $p = p_0$. Значение p_0 определяется из (3) при $\theta = 0$, $r = r_1$.

При $p > p_0$ пластическая зона будет распространяться из точки A и займет область, симметричную относительно оси x с углом охвата внутреннего контура $2\theta_*$. В дальнейшем под углом охвата внутреннего контура пластической зоны понимается θ_* .

Уравнение упругопластической границы L_s запишется в виде

$$(4) \quad r_s = r_1 + \rho(p, \theta),$$

где $\rho(p, \theta)$ — толщина пластической зоны.

Введем малый параметр

$$(5) \quad \varepsilon^2 = (p - p_0)/p_0.$$

Малый параметр ε из (5) связан с углом охвата пластической зоны θ_* контура L_1 соотношением

$$(6) \quad \varepsilon \sim \theta_*, \quad \sin \theta_* \sim \varepsilon, \quad \cos \theta_* \sim 1.$$

В упругой области напряжения представим в виде

$$(7) \quad \sigma_r = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{ri} \varepsilon^i, \quad \sigma_\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{\theta i} \varepsilon^i, \quad \tau_{r\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{r\theta i} \varepsilon^i.$$

В пластической области напряжения, согласно [1], имеют вид

$$(8) \quad \sigma_r^p = -p + 2K \ln \frac{r}{r_1}, \quad \sigma_\theta^p = -p + 2K \left(1 + \ln \frac{r}{r_1}\right).$$

Функцию ρ из (4) будем искать в виде разложения в ряд по ε :

$$(9) \quad \rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \varepsilon^k.$$

Напряжения в упругой области выражаются через функцию φ , удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$(10) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

где φ ищется в виде $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon^i$.

Из (10) следует

$$(11) \quad \Delta^2 \varphi_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Напряжения в каждом приближении имеют вид

$$\sigma_{ri} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta i} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta i} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r \partial \theta}.$$

Граничные условия на контуре L_1 в упругой области определяются из условия нагружения внутренним давлением p с учетом (5), (7):

$$(12) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{ri} \varepsilon^i = -p_0(1 + \varepsilon^2), \quad \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{r\theta i} \varepsilon^i = 0.$$

Приравнявая в каждом из уравнений (12) члены при одинаковых степенях ε , получим граничные условия для различных приближений на контуре L_1 :

$$(13) \quad \sigma_{r0} = -p_0, \quad \sigma_{r1} = 0, \quad \sigma_{r2} = -p_0, \quad \sigma_{ri} = 0, \quad i = 3, 4, \dots, \\ \tau_{r\theta i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Граничные условия на контуре L_2 :

$$(14) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{ri} \varepsilon^i \cos(n_2, r) + \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{r\theta i} \varepsilon^i \cos(n_2, \theta) = 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{\theta i} \varepsilon^i \cos(n_2, \theta) + \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{r\theta i} \varepsilon^i \cos(n_2, r) = 0,$$

где (n_2, r) , (n_2, θ) — углы между нормалью к L_2 и осями полярной системы координат. Выражения для $\cos(n_2, r)$, $\cos(n_2, \theta)$:

$$\cos(n_2, r) = \frac{\Phi_{,r}}{\sqrt{\Phi_{,r}^2 + (r^{-1}\Phi_{,\theta})^2}}, \quad \cos(n_2, \theta) = \frac{r^{-1}\Phi_{,\theta}}{\sqrt{\Phi_{,r}^2 + (r^{-1}\Phi_{,\theta})^2}},$$

где $\Phi = r - 1 + \delta \cos \theta + (\delta^2/2) \sin^2 \theta + \dots$ — уравнение наружного контура L_2 . Подставив $\Phi_{,r}$, $\Phi_{,\theta}$ и произведя преобразования, получим

$$(15) \quad \cos(n_2, r) = 1 - \delta^2 \sin^2 \theta / 2 + \dots, \quad \cos(n_2, \theta) = -\delta \sin \theta + \dots$$

Приравнявая в (14) члены при одинаковых степенях ε , получим граничные условия на контуре L_2 для различных приближений:

$$(16) \quad \sigma_{ri} \cos(n_2, r) + \tau_{r\theta i} \cos(n_2, \theta) = 0, \\ \sigma_{\theta i} \cos(n_2, \theta) + \tau_{r\theta i} \cos(n_2, r) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Краевые условия для упругой области на упругопластической границе определим из условия равенства напряжений:

$$(17) \quad \sigma_r = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^p, \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Используя (4), (7), (8), проведем разложение (17) в ряд по степеням ρ относительно контура L_1 , ограничиваясь членами со степенями не выше ε^3 :

$$(18) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{m!} \frac{\partial^m \sigma_{ri}}{\partial r^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \varepsilon^n \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \sigma_{r0}^p}{\partial r^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \varepsilon^n \right)^m,$$

и далее, раскрывая суммы:

$$(19) \quad \sigma_{r0} + \frac{\partial \sigma_{r0}}{\partial r} (\varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^3 \rho_3) + \frac{\partial^2 \sigma_{r0}}{\partial r^2} \left(\frac{\varepsilon^2 \rho_1^2}{2} + \varepsilon^3 \rho_1 \rho_2 \right) + \\ + \frac{\partial^3 \sigma_{r0}}{\partial r^3} \frac{\varepsilon^3 \rho_1^3}{6} + \sigma_{r1} \varepsilon + \frac{\partial \sigma_{r1}}{\partial r} (\varepsilon^2 \rho_1 + \varepsilon^3 \rho_2) + \frac{\partial^2 \sigma_{r1}}{\partial r^2} \frac{\varepsilon^3 \rho_1^2}{2} + \varepsilon^2 \sigma_{r2} + \frac{\partial \sigma_{r2}}{\partial r} \varepsilon^3 \rho_1 + \\ + \varepsilon^3 \sigma_{r3} = -p_0 - \varepsilon^2 p_0 + 2Kr_1^{-1} (\varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^3 \rho_3) - \\ - 2Kr_1^{-2} \left(\frac{\varepsilon^2 \rho_1^2}{2} + \varepsilon^3 \rho_1 \rho_2 \right) + \frac{2}{3} Kr_1^{-3} \varepsilon^3 \rho_1^3;$$

$$(20) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{m!} \frac{\partial^m \sigma_{\theta i}}{\partial r^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \varepsilon^n \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \sigma_{\theta 0}}{\partial r^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \varepsilon^n \right)^m;$$

$$(21) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{m!} \frac{\partial^m \tau_{r \theta i}}{\partial r^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \varepsilon^n \right)^m = 0.$$

При раскрытии суммы в выражении (20) получим равенство, аналогичное (19) с той разницей, что в правой части добавится член $2K$.

При раскрытии суммы в выражении (21) получим равенство, аналогичное (19) с той разницей, что правая часть равна нулю. Из сравнения членов в (19) следует

$$(22) \quad 2Kr_1^{-1} - \frac{\partial \sigma_{r0}}{\partial r} = 2 \left(\delta B_{r1} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \delta^2 D_{r1} \sin^2 \theta \right),$$

где $B_{r1} = 2b_1 + 6a_1' r_1^{-4}$; $D_{r1} = 24a_2' r_1^{-5} + 8b_2' r_1^{-3}$. Из выражения (22) после разложения $\sin^2(\theta/2)$, $\sin^2 \theta$ в ряд и удержания членов с θ не выше θ^3 получим

$$(23) \quad ((1/2)\delta B_{r1} + 2\delta^2 D_{r1})\theta^2.$$

Учитывая (23), (6) и приравнявая члены в (19) при ε , получим граничные условия для σ_{r1} на L_1 :

$$(24) \quad \sigma_{r1} = 0.$$

Из выражения (21) с учетом (6), приравнявая члены при ε , получим граничное условие на L_1 для $\tau_{r\theta 1}$:

$$(25) \quad \tau_{r\theta 1} = 0.$$

Из граничных условий (13), (16), (17) с учетом (24), (25) имеем

$$(26) \quad \varphi_1 = 0, \rho_1 = 0.$$

С учетом (26) из (18), (21) получим задачу для определения напряжений второго приближения:

$$(27) \quad \Delta^2 \varphi_2; \sigma_{r2} = -p_0, \tau_{r\theta 2} = 0 \text{ на } L_1; \\ \sigma_{r2} \cos(n_2, r) + \tau_{r\theta 2} \cos(n_2, \theta) = 0, \\ \sigma_{\theta 2} \cos(n_2, \theta) + \tau_{r\theta 2} \cos(n_2, r) = 0 \text{ на } L_2.$$

Краевая задача (27) совпадает с задачей об упругом нагружении эксцентрического кольца внутренним давлением, решением которой является (2). Удерживая члены с θ не выше θ^3 , можно показать, что

$$(28) \quad (-p_0 + 2K - \sigma_{\theta 0}) = L_1 \theta^2,$$

где $L_1 = \frac{1}{2} \delta B_{\theta 0} + 2\delta^2 D_{\theta 0}$; $B_{\theta 0} = 6b_1 r_1 + 2a_1' r_1^{-3}$; $D_{\theta 0} = 2a_2 + 12b_2 r_1^2 + 6a_2' r_1^{-4}$.

Из (20), принимая во внимание (26), (27), (28), определим

$$\rho_2 = \frac{\sigma_{\theta 0} \varepsilon^2 - L_1 \theta^2}{\left(-\frac{\partial \sigma_{\theta 0}}{\partial r} + 2Kr_1^{-1} \right) \varepsilon^2},$$

откуда после подстановки σ_{θ_0} , $\partial\sigma_{\theta_0}/\partial r$ с учетом (6) получим

$$(29) \quad \rho_2 = \frac{-L_1\theta^2 + M_1\varepsilon^2}{M_2\varepsilon^2},$$

где $M_1 = A_{\theta_0} + \delta B_{\theta_0} + \delta^2(C_{\theta_0} + D_{\theta_0})$; $M_2 = -(A_{\theta_1} + \delta^2(C_{\theta_1} + D_{\theta_1})) + 2Kr_1^{-1}$; $A_{\theta_0} = -a_0r_1^{-2} + 2c_0$; $C_{\theta_0} = -a_0'r_1^{-2} + 2c_0'$; $A_{\theta_1} = 2a_0r_1^{-3}$; $D_{\theta_1} = 24b_2r_1 - 24a_2'r_1^{-5}$.

Угол охвата θ_* контура L_1 пластической зоной определим из условия $\rho_2 = 0$ при $\theta = \theta_*$:

$$(30) \quad \theta_* = \varepsilon \sqrt{M_1/L_1}.$$

С учетом (30) определим ρ_2 :

$$(31) \quad \rho_2 = N(\theta_*^2 - \theta^2)/\varepsilon^2,$$

где $N = L_1/M_2$.

Определим напряжения для третьего приближения. Граничные условия для третьего приближения на L_1 получим, приравнявая члены при одинаковых степенях с ε^3 из (18), (21) с учетом (31):

$$(32) \quad \sigma_{r_3} = 0;$$

$$(33) \quad \tau_{r\theta_3} = -\frac{N(\theta_*^2 - \theta^2)}{\varepsilon^3} \frac{\partial\tau_{r\theta_0}}{\partial r}.$$

Подставим в (33) значение $\partial\tau_{r\theta_0}/\partial r$ с учетом (6) и получим

$$(34) \quad \tau_{r\theta_3} = -T(\theta_*^2\theta - \theta^3)/\varepsilon^3,$$

где $T = (\delta E_1 + 2\delta^2 F_1)N$, $E_1 = 2b_1 + 6a_1'r_1^{-4}$, $F_1 = 24a_2'r_1^{-5} + 12b_2r_1 + 4b_2'r_1^{-3}$.

Определим граничные условия на L_2 . Решение задачи для третьего приближения зависит от параметра δ , являющегося эксцентриситетом трубы. Ищем решение в виде ряда по степеням δ :

$$(35) \quad \sigma_{r_3} = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{r_3i} \delta^i, \quad \sigma_{\theta_3} = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{\theta_3i} \delta^i, \quad \tau_{r\theta_3} = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{r\theta_3i} \delta^i.$$

Из (1) следует, что радиусы r контуров L_2 , L_2' отличаются на $\Delta r = \delta \cos \theta + (\delta^2/2) \sin^2 \theta + \dots$. После подстановки (15), (35) в (16) и разложения напряжений в ряд по степеням Δr около контура L_2' , concentрически расположенного относительно L_1 , получим

$$(36) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\partial^m \sigma_{r_3i}}{\partial r^m} \frac{(\delta \cos \theta + \frac{\delta^2}{2} \sin^2 \theta)^m}{m!} \delta^i \left(1 - \frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{2} + \dots\right) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\partial^m \tau_{r\theta_3i}}{\partial r^m} \frac{(\delta \cos \theta + \frac{\delta^2}{2} \sin^2 \theta)^m}{m!} \delta^i (-\delta \sin \theta + \dots) = 0;$$

$$(37) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\partial^m \sigma_{\theta_3i}}{\partial r^m} \frac{(\delta \cos \theta + \frac{\delta^2}{2} \sin^2 \theta)^m}{m!} \delta^i (-\delta \sin \theta + \dots) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\partial^m \tau_{r\theta_3i}}{\partial r^m} \frac{(\delta \cos \theta + \frac{\delta^2}{2} \sin^2 \theta)^m}{m!} \delta^i \left(1 - \frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{2} + \dots\right) = 0.$$

В (36), (37) приравниваем члены при одинаковых степенях δ и, ограничиваясь членами со степенями не выше δ^2 , получим

$$(38) \quad \sigma_{r_30} = 0, \quad \tau_{r\theta_30} = 0;$$

$$(39) \quad \sigma_{r31} = \frac{\partial \sigma_{r30}}{\partial r} \cos \theta, \quad \tau_{r\theta31} = \sigma_{\theta30} \sin \theta;$$

$$(40) \quad \sigma_{r32} = \frac{\sigma_{r30} \sin^2 \theta}{2} + \frac{\partial \sigma_{r30}}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{2} - \frac{\partial^2 \sigma_{r30}}{\partial r^2} \frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{\partial \sigma_{r31}}{\partial r} \cos \theta + \tau_{r\theta31} \sin \theta,$$

$$\tau_{r\theta32} = -\frac{\partial \sigma_{\theta30}}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{\theta31} \sin \theta + \frac{\partial \tau_{r\theta31}}{\partial r} \cos \theta.$$

Решения уравнений (11) при краевых условиях (32), (34) на L_1 и (36), (37) на L_2 не существует, так как нагрузки, приложенные к контуру L_1 , будут не уравновешены. Действительно, проекции сил, действующих на внешний контур L_2 , равны нулю, а силы, действующие на внутренний контур L_1 , равны

$$(41) \quad F_y = 0, \quad F_x = \int_{-\theta_*}^{\theta_*} (\sigma_{r3} \cos \theta - \tau_{r\theta3} \sin \theta) r_1 d\theta.$$

Из подынтегрального выражения (41) следует, что $\tau_{r\theta3} \sin \theta$ порядка θ . Поэтому для получения $F_x = 0$ необходимы такие радиальные напряжения, которые по своей величине относятся к приближениям выше третьего. Отсюда следует, что радиальные напряжения для третьего приближения получились исключенными.

Для непрерывного задания $\tau_{r\theta3}$ на всем контуре L_1 разложим значение $\tau_{r\theta3}$ (34), заданное на $-\theta_* \leq \theta \leq \theta_*$ в ряд Фурье:

$$(42) \quad \tau_{r\theta3} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\theta,$$

где

$$b_k = -\frac{2T}{\pi e^3} \left(\left(-\frac{2\theta_*^2}{k^2} + \frac{6}{k^4} \right) \sin k\theta_* - \frac{6\theta_*}{k^3} \cos k\theta_* \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (42) следует, что только при $k = 1$ касательные напряжения дают силу вдоль оси x . Отсюда для решения поставленной задачи должны быть введены радиальные напряжения, уравновешивающие касательные при $k = 1$:

$$(43) \quad \sigma_{r3}^{(1)} = b_k \cos \theta, \quad k = 1,$$

которые имеют порядок по θ или ϵ выше, чем $\tau_{r\theta3}$. Отметим, что при $k \geq 2$ касательные напряжения будут самоуравновешенными.

Выражения (42), (43) являются граничными условиями на L_1 при различных k :

$$(44) \quad \sigma_{r3}^{(1)} = b_k \cos \theta, \quad \tau_{r\theta3}^{(1)} = b_k \sin \theta, \quad k = 1;$$

$$(45) \quad \sigma_{r3}^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta3}^{(k)} = b_k \sin k\theta, \quad k \geq 2.$$

Ограничимся членами не выше δ^2 . В (44), (45), приравняв члены при δ с одинаковыми степенями, получим граничные условия на L_1 , соответствующие (38) — (40) — граничным условиям на L'_2 :

$$(46) \quad \sigma_{r30}^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta30}^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(47) \quad \sigma_{r31}^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta31}^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(48) \quad \sigma_{r32}^{(1)} = e_k \cos \theta, \quad \tau_{r\theta32}^{(1)} = e_k \sin \theta, \quad k = 1, \quad \sigma_{r32}^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta32}^{(k)} = e_k \sin k\theta,$$

$$k = 2, 3, \dots,$$

где

$$e_k = -\frac{8r_1^6}{\pi e^3 (1-r_1^4)^2 (1-r_1^2)} \left(\left(-\frac{2\theta_*}{k^2} + \frac{6}{k^4} \right) \sin k\theta_* - \frac{6\theta_*}{k^3} \cos k\theta_* \right).$$

Выражения (38)–(40) совместно с (46)–(48) являются граничными условиями задачи о нагружении трубы внутренним давлением, пропорци-

ональным $\sin k\theta$, $\cos k\theta$. Причем (38), (46) — граничные условия для определения напряжений нулевого приближения по δ ; (39), (47) — для определения напряжений первого приближения по δ ; (40), (48) — для определения напряжений второго приближения по δ .

Следовательно, нахождение напряжений третьего приближения свелось к решению задачи о нагружении концентрической трубы внутренним и внешним давлением, пропорциональным $\sin k\theta$, $\cos k\theta$.

Используя решения [5], получим

$$(49) \quad \sigma_{r3} = \delta^2 \left(\sigma_{r32}^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{r32}^{(k)} \right);$$

$$(50) \quad \sigma_{\theta 3} = \delta^2 \left(\sigma_{\theta 32}^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{\theta 32}^{(k)} \right);$$

$$(51) \quad \tau_{r\theta 3} = \delta^2 \left(\tau_{r\theta 32}^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \tau_{r\theta 32}^{(k)} \right),$$

где

$$\sigma_{r32}^{(1)} = 2f(r - r^{-3}) \cos \theta; \quad \tau_{r\theta 32}^{(1)} = 2f(r - r^{-3}) \sin \theta;$$

$$\sigma_{\theta 32}^{(1)} = 2f(3r + r^{-3}) \cos \theta; \quad f = -\frac{c_k r_1^3}{2(1 - r_1^4)}; \quad k = 1;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r32}^{(k)} = & \frac{1}{2R} \left(-(k-1)(k+2) + k^2\beta^2 + (k-2)\beta^{-2k} \right) q^{k-2} + \\ & + \left((k-2)(k+1) + (k+2)\beta^{2k} - k^2\beta^2 \right) q^{-(k+2)} + \left(-(k-2)(k+1) + \right. \\ & + (k^2 - 4)\beta^{-2} - (k-2)\beta^{-2k} \left. \right) q^k + \left((k-1)(k+2) - (k^2 - 4)\beta^{-2} - \right. \\ & \left. - (k+2)\beta^{2k} \right) q^{-k} \left. \right) e_k \cos k\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 32}^{(k)} = & \frac{1}{2R} \left(((k-1)(k+2) - k^2\beta^2 - (k-2)\beta^{-2k}) q^{k-2} + \right. \\ & + \left(-(k-2)(k+1) + k^2\beta^2 - (k+2)\beta^{2k} \right) q^{-(k+2)} + \left((k+1)(k+2) - \right. \\ & \left. - (k+2)^2\beta^{-2} + (k+2)\beta^{-2k} \right) q^k + \left(-(k-2)(k-1) + (k-2)^2\beta^{-2} + \right. \\ & \left. + (k-2)\beta^{2k} \right) q^{-k} \left. \right) e_k \cos k\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta 32}^{(k)} = & \frac{1}{2R} \left(((k-1)(k+2) - k^2\beta^2 - (k-2)\beta^{-2k}) q^{k-2} + \right. \\ & + \left((k-2)(k+1) - k^2\beta^2 + (k+2)\beta^{2k} \right) q^{-(k+2)} + \left(k(k+1) - k(k+2)\beta^{-2} + \right. \\ & \left. + k\beta^{-2k} \right) q^k + \left(k(k-1) - k(k-2)\beta^{-2} - k\beta^{2k} \right) q^{-k} \left. \right) e_k \sin k\theta; \end{aligned}$$

$$R = 2(k^2 - 1) - k^2(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-2k} + \beta^{2k}); \quad \beta = \frac{1}{r_1}, \quad q = \frac{r}{r_1}.$$

Получив значение $\sigma_{\theta 3}$ (50), определим ρ_3 из (20), приравняв члены с ε^3 :

$$(52) \quad \rho_3 = \frac{\sigma_{\theta 3}}{2Kr_1^{-1} - \frac{\partial \sigma_{\theta 0}}{\partial r}}.$$

Согласно (9), используя (29), (52), получим толщину пластической зоны

$$\rho = \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^3 \rho_3$$

и из (4) — положение упругопластической границы (см. фиг. 1).

Из (7), (26), (27), (49) — (51) получим напряжения в упругой области, ограничиваясь третьим приближением:

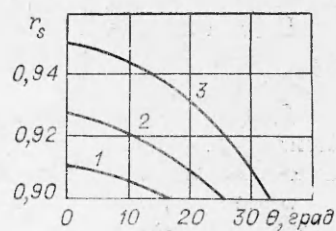
$$\begin{aligned} \sigma_r = & (1 + \varepsilon^2)\sigma_{r0} + \varepsilon^2\sigma_{r3}, \quad \sigma_{\theta} = (1 + \varepsilon^2)\sigma_{\theta 0} + \\ & + \varepsilon^3\sigma_{\theta 3}, \quad \tau_{r\theta} = (1 + \varepsilon^2)\tau_{r\theta 0} + \varepsilon^3\tau_{r\theta 3}. \end{aligned}$$

Полученное решение удовлетворяет точным уравнениям теории идеальной пластичности в пластической области и точным уравнениям теории упругости в упругой области. При этом из-за ограниченного числа приближений краевые условия на наружном контуре и условия сопряжения на упругопластической границе выполняются приближенно.

Следовательно, точность полученного решения можно определить по относительной невязке на упругопластической границе $1 - \sqrt{(\sigma_\theta -$

$-\sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2(2K)^{-1}$ и по относительной невязке краевых условий на наружном контуре $p_v(2K)^{-1}$, где $p_v = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; $\sigma = \sigma_r \cos^2(n_2, r) + \sigma_\theta \cos^2(n_2, \theta) + 2\tau_{r\theta} \cos(n_2, r) \cos(n_2, \theta)$; $\tau = (\sigma_\theta - \sigma_r) \cos(n_2, r) \cos(n_2, \theta) + \tau_{r\theta}(\cos^2(n_2, r) - \cos^2(n_2, \theta))$.

На фиг. 2 представлено положение границы L_s для трубы с параметрами $r_1/r_2 = 0,9$; $\delta/r_2 = 0,05$ при $\varepsilon = 0,13$; $0,22$; $0,29$ (кривые 1—3 соответственно).



Ф и г. 2

Поступила 7 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
2. Быковцев Г. И., Зебриков В. П. Упругопластическое кручение эксцентрических труб. — ПМТФ, 1982, № 3.
3. Быковцев Г. И., Зебриков В. П. Применение метода возмущений при расчете эксцентрических труб. — В кн.: Новые конструкции нефтепромысловых труб. Вып. 14. Куйбышев: изд. Всесоюз. научно-исслед. ин-та разработки и эксплуатации нефтепромысловых труб, 1979.
4. Чаплыгин С. А., Аржаников Н. С. К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением. Собр. соч. С. А. Чаплыгина. Т. 3. 1953.
5. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. Л.: Гостехиздат, 1950.

УДК 539.319 (075.8)

О ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л. Н. Германович, И. Д. Килль
(Москва)

Последнее время все более широкое распространение получает способ термического разрушения хрупких тел (см., например, [1]). При этом важное место занимает анализ полей напряжений и разрушений области. А так как время разрушения обычно весьма невелико, то получение простых асимптотических выражений для напряжений при малых временах приобретает большое значение. Тем более, что реальный расчет по формулам, выражающим точное решение, как правило, сильно затруднен необходимостью интегрирования для бесконечных областей и суммирования для конечных громоздких выражений, содержащих особенности.

При исследовании термического разрушения с макроскопических позиций критериев прочности весьма распространена модель упругого полупространства с местным нагревом поверхности [1].

В [2] найден первый член асимптотических разложений температур и напряжений для граничных условий теплопроводности первого рода. Также представляет интерес [1] рассмотрение условий третьего рода.

1. В цилиндрических координатах r , φ , z рассмотрим упругое полупространство $z \geq 0$, на границе которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой $z < 0$. Температура среды $\Theta = \Theta_0 f(r)$, где область значений $f(r)$ — отрезок $[0, 1]$. Требуется найти температуру и напряжения внутри упругого полупространства, начальная температура которого $T = 0$.