УДК 539.3

МНОГОЗНАЧНЫЕ СМЕЩЕНИЯ И ДИСЛОКАЦИИ ВОЛЬТЕРРА В ПЛОСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. М. Зубов, М. И. Карякин

(*Ростов-на-Дону*)

Решена задача определения плоского поля перемещений сплошной среды по заданному в неодносвязной плоской области однозначному полю тензора конечных деформаций, удовлетворяющему нелинейному уравнению совместности. Для плоской задачи дано обобщение классической теоремы Вейнгартена на случай больших деформаций. Получено выражение векторов Бюргерса и Франка дислокации Вольтерра (изолированного дефекта) через поле тензора конечных деформаций. Дана постановка плоской задачи об определении напряжений в нелинейно-упругом теле, содержащем изолированный дефект с заданными характеристиками. Для конкретной модели нелинейно-упругого материала найдено точное решение задачи о клиновой дисклинации. Установлено, что при нелинейной постановке задачи поле напряжений не имеет сингулярности на оси дисклинации.

1. Плоская деформация сплошной среды описывается соотношениями

$$X_1 = X_1(x_1,\ x_2),\ X_2 = X_2(x_1,\ x_2),\ X_3 = x_3, \tag{1.1}$$

где x_k и X_k — декартовы координаты точек среды соответственно до и после деформации. Координатные орты обозначим $\mathbf{e}_k$ ($k = 1,\ 2,\ 3$). Введем комплексные координаты и ассоциированные с ними векторные базисы [1—5]

$$\zeta = x_1 + ix_2,\ \bar\zeta = x_1 - ix_2,\ z = X_1 + iX_2,\ \bar z = X_1 - iX_2,$$

$$\mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{f}}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2),\quad \mathbf{f}^1 = \bar{\mathbf{f}}^2 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{f}^3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3,\quad \mathbf{f}_k.\mathbf{f}^n = \delta_k^n.$$

Здесь δ_k^n — символ Кронекера. Плоскую деформацию (1.1) можно, очевидно, задать при помощи комплекснозначной функции

$$z = z(\zeta,\ \bar\zeta),\ X_3 = x_3. \tag{1.2}$$

Градиент места (тензор дисторсии) [2, 6], соответствующий преобразованию (1.2), имеет вид

$$\mathbf{C} = \frac{\partial X_k}{\partial x_n}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_k = \frac{\partial z}{\partial \zeta}\mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 + \frac{\partial \bar z}{\partial \zeta}\mathbf{f}^1\mathbf{f}_2 + \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\mathbf{f}^2\mathbf{f}_1 + \frac{\partial \bar z}{\partial \bar\zeta}\mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3\mathbf{f}_3. \tag{1.3}$$

Полярное разложение градиента места приводит [7, с. 59, 60] к мере искажения $\mathbf{U}$, являющейся симметричным положительно определенным тензором второго ранга, и к собственно ортогональному тензору поворота $\mathbf{A}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{A},\ \mathbf{U} = \mathbf{G}^{1/2},\ \mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T. \tag{1.4}$$

Тензор конечных деформаций Коши — Грина $\mathbf{E}$ выражается через меру деформации Коши $\mathbf{G}$ соотношением [2, с. 24]

$$\mathbf{E} = (1/2)(\mathbf{G} - \mathbf{I}) \tag{1.5}$$

($\mathbf{I}$ — единичный тензор). При плоской деформации тензор поворота имеет представление

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\cos\chi + (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\sin\chi + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^{i\chi}\mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 + \mathbf{e}^{-i\chi}\mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3\mathbf{f}_3, \tag{1.6}$$

где χ — угол поворота главных осей деформации. Из (1.3) найдем меру деформации Коши

$$\mathbf{G} = G_1^1\mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 + G_1^2\mathbf{f}^1\mathbf{f}_2 + G_2^1\mathbf{f}^2\mathbf{f}_1 + G_2^2\mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3\mathbf{f}_3, \tag{1.7}$$

$$G_1^1 = G_2^2 = \frac{\partial \bar z}{\partial \bar\zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar z}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta},\quad G_1^2 = \overline{G}_2^1 = 2\,\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial \bar z}{\partial \zeta}.$$

Комплексные компоненты G_α^β тензора **G** выражаются через его декартовы компоненты $G_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_\beta$ по формулам $G_1^1 = \frac{1}{2}(G_{11} + G_{22})$, $G_1^2 = \frac{1}{2}(G_{11} - G_{22} - 2iG_{12})$.

Поставим задачу определения плоского поля перемещений по заданному тензору $\mathbf{E}(x_1, x_2)$. Согласно (1.5), эта проблема эквивалентна задаче нахождения функции $z(\zeta, \bar\zeta)$ из нелинейной системы уравнений (1.7) при заданных непрерывно дифференцируемых функциях $G_\alpha^\beta(\zeta, \bar\zeta)$. В случае плоской деформации уравнения совместности относительно $G_{\alpha\beta}$ сводятся к одному соотношению, которое означает обращение в нуль компоненты R_{1212} тензора кривизны Римана — Кристоффеля, построенного по метрике $G_{\alpha\beta}$:

$$(1.8)\quad (G_{11}G_{22} - G_{12}^2)\left(\frac{\partial^2 G_{22}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x_2^2}\right) + G_{11}\left(\frac{\partial G_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} - \right.$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} - \left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1}\right)^2\right) + G_{22}\left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2}\right)^2\right) - G_{12}\left(2\frac{\partial G_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1}\right) = 0.$$

В комплексных переменных это соотношение записывается в виде

$$(1.9)\quad (G_1^1G_2^2 - G_2^1G_1^2)\left(2\frac{\partial^2 G_1^1}{\partial\zeta\partial\bar\zeta} - \frac{\partial^2 G_1^2}{\partial\bar\zeta^2} - \frac{\partial^2 G_2^1}{\partial\zeta^2}\right) + G_1^2\left(\frac{\partial G_1^1}{\partial\zeta}\frac{\partial G_2^1}{\partial\zeta} - \right.$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial G_1^2}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial G_2^1}{\partial\zeta} - \left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_2^1}{\partial\zeta}\right)^2\right) + G_2^1\left(\frac{\partial G_1^1}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial G_1^2}{\partial\zeta} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_1^2}{\partial\zeta}\frac{\partial G_2^1}{\partial\zeta} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_1^2}{\partial\bar\zeta}\right)^2\right) - G_1^1\left(2\frac{\partial G_1^1}{\partial\zeta}\frac{\partial G_1^1}{\partial\bar\zeta} - \frac{\partial G_1^1}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial G_1^2}{\partial\bar\zeta} - \frac{\partial G_1^1}{\partial\zeta}\frac{\partial G_2^1}{\partial\zeta} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial G_1^2}{\partial\zeta}\frac{\partial G_2^1}{\partial\bar\zeta} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_1^2}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial G_2^1}{\partial\zeta}\right) = 0.$$

На основании (1.4)

$$(1.10)\quad \mathbf{C} = U_1^1 e^{i\chi}\mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 + U_1^2 e^{-i\chi}\mathbf{f}^1\mathbf{f}_2 + U_2^1 e^{i\chi}\mathbf{f}^2\mathbf{f}_1 + U_2^2 e^{-i\chi}\mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3\mathbf{f}_3,$$
$$U_\alpha^\beta = \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{f}^\beta.$$

Сравнивая выражения (1.3) и (1.10), получим

$$(1.11)\qquad \frac{\partial z}{\partial\zeta} = U_1^1 e^{i\chi}, \quad \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta} = U_2^1 e^{i\chi}.$$

Пользуясь формулами, приведенными в [8, с. 64], запишем явные выражения компонент меры искажения через компоненты тензора **G**:

$$(1.12)\qquad U_1^1 = U_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{G_1^1G_2^2 - G_1^2G_2^1} + 2G_1^1},$$
$$U_1^2 = (\bar U_2^1) = \frac{1}{2}(U_1^1)^{-1}G_1^2.$$

Если бы было известно поле поворотов $\chi(\zeta, \bar\zeta)$, то, согласно (1.11), функция $z(\zeta, \bar\zeta)$ определилась квадратурой $z = \int e^{i\chi}(U_1^1 d\zeta + U_2^1 d\bar\zeta)$.

Условие интегрируемости системы (1.11) относительно $z(\zeta, \bar{\zeta})$, очевидно, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(U_1^1 e^{i\chi}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(U_2^1 e^{i\chi}\right). \tag{1.13}$$

Соотношение (1.13) и комплексно-сопряженное ему составляют уравнения для определения поля поворотов. Действительно, указанные соотношения преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\zeta} = \eta(\zeta, \bar{\zeta}), \quad \frac{\partial\chi}{\partial\bar{\zeta}} = \overline{\eta(\zeta, \bar{\zeta})}, \tag{1.14}$$

$$\eta(\zeta, \bar{\zeta}) = -i\Delta^{-1}\left[U_1^1\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}U_1^2 - \frac{\partial}{\partial\zeta}U_2^2\right) - U_1^2\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}U_2^1 - \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}U_1^1\right)\right],$$

$$\Delta = U_1^2 U_2^1 - U_1^1 U_2^2.$$

Используя представление (1.12), можно проверить, что условие интегрируемости системы (1.14) $\partial\eta/\partial\bar{\zeta} = \partial\bar{\eta}/\partial\zeta$ совпадает с уравнением совместности деформаций (1.9), которому по условию удовлетворяют компоненты тензора **G**.

Если задано значение $\chi_0 = \chi(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)$ угла поворота в некоторой точке M_0 с комплексными координатами ζ_0, $\bar{\zeta}_0$, то поле поворотов в случае односвязной области однозначно определяется из системы (1.14). После определения $\chi(\zeta, \bar{\zeta})$ функция $z(\zeta, \bar{\zeta})$ однозначно находится путем интегрирования системы (1.11) при заданном значении $z_0 = z(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)$.

2. Предположим, что материальное тело в отсчетной конфигурации (недеформированном состоянии) занимает двухсвязную область. Эту область можно превратить в односвязную, проведя разрез (перегородку) вдоль некоторой кривой σ. Рассмотрим путь интегрирования, состоящий из кривой, соединяющей точки M_0 и M и не пересекающей перегородки σ, и замкнутого не стягиваемого в точку контура, состоящего из n полных оборотов в положительном направлении. Решение уравнений (1.14) в двухсвязной области многозначно и имеет вид

$$\chi = \chi_* + nK, \quad \chi_* = \chi_0 + \int_{M_0}^{M} \eta d\zeta + \bar{\eta} d\bar{\zeta}; \tag{2.1}$$

$$K = \oint \eta d\zeta + \bar{\eta} d\bar{\zeta}. \tag{2.2}$$

Из (1.11), (2.1) следует многозначное выражение для z, определяющей положение частиц среды в деформированном состоянии:

$$z = z_0 + e^{inK}\int_{M_0}^{M} e^{i\chi_*}\left(U_1^1 d\zeta + U_2^1 d\bar{\zeta}\right) + \left(1 + e^{iK} + \ldots + e^{i(n-1)K}\right) \times \tag{2.3}$$
$$\times \oint e^{i\chi_*}\left(U_1^1 d\zeta + U_2^1 d\bar{\zeta}\right).$$

После превращения области в односвязную путем проведения разреза σ неоднозначность функций χ и z устраняется, но предельные значения этих функций на противоположных берегах разреза не совпадают. Из (2.2), (2.3) вытекает, что предельные значения на разных сторонах перегородки связаны соотношениями

$$\chi_+ - \chi_- = K, \; z_+ = e^{iK} z_- + \beta; \tag{2.4}$$

$$\beta = \oint \exp\left[i\chi_0 + i\int_{M_0}^{M}(\eta d\zeta + \bar{\eta} d\bar{\zeta})\right]\left(U_1^1 d\zeta' + U_2^1 d\bar{\zeta}'\right) + z_0\left(1 - e^{iK}\right). \tag{2.5}$$

Обход замкнутого контура в (2.2), (2.3), (2.5) совершается от стороны разреза σ, отмеченной знаком —, к стороне, отмеченной знаком +. Кроме того, замкнутый контур в (2.3), (2.5) должен начинаться и заканчиваться в точке M_0.

Формула (2.4) показывает, что положение одного берега разреза в деформированном состоянии отличается от положения другого конечным плоским перемещением абсолютно твердого тела, причем вещественная постоянная K представляет собой угол конечного поворота, а комплексная постоянная β определяет относительное поступательное смещение берегов разреза. Фактическая реализация такого деформированного состояния требует, вообще говоря, удаления или добавления материала. Соотношение (2.4) выражает обобщение на нелинейный случай теоремы Вейнгартена [1, 9] классической теории упругости.

Из (2.4) вытекает формула для скачка вектора перемещений $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = \left(1 + \frac{1}{4}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}\right)^{-1} \mathbf{q}\times\left(\mathbf{R}_- + \frac{1}{2}\mathbf{q}\times\mathbf{R}_-\right) + \mathbf{b}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r},\ \mathbf{R} = X_n\mathbf{e}_n,\ \mathbf{r} = x_n\mathbf{e}_n;$$

$$\mathbf{q} = 2\,\mathrm{tg}\frac{K}{2}\,\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \mathrm{Re}\,\beta\mathbf{e}_1 + \mathrm{Im}\,\beta\mathbf{e}_2. \tag{2.7}$$

При непрерывном поле тензора деформации, удовлетворяющем уравнениям совместности, и при наличии на разрезе двухсвязной области скачка перемещений, соответствующего жесткому смещению, в линейной теории упругости говорят о дислокации или дисторсии Вольтерра [1, 9—11]. Аналогично этому в двухсвязном нелинейно-упругом теле содержится дислокация Вольтерра, или изолированный дефект, если постоянные векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ не равны одновременно нулю. Характеристики изолированного дефекта $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$, как и в линейной теории упругости [9], назовем соответственно вектором Бюргерса и Франка. Формулы (2.2), (2.5), (2.7) дают выражение характеристик изолированного дефекта в плоском случае через поле тензора конечных деформаций.

Возможен случай, когда неодносвязной является область, занимаемая материальным телом в деформированном состоянии, а требуется определить отсчетную конфигурацию тела по заданному как функция эйлеровых координат полю тензора деформации Альманзи $\mathbf{E}' = \frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\times$ $\times(\mathbf{C}^T\cdot\mathbf{C})^{-1}$. Этот случай рассматривается способом, аналогичным изложенному выше, с той разницей, что отсчетная и деформированная конфигурации меняются ролями. Скачок вектора перемещений на разрезе неодносвязной области в данном случае определяется соотношением $\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = -\left(1 + \frac{1}{4}\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'\right)^{-1}\mathbf{q}'\times\left(\mathbf{r}_- + \frac{1}{2}\mathbf{q}'\times\mathbf{r}_-\right) + \mathbf{b}$.

3. Пусть q^n — криволинейные координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты). Лагранжев векторный базис деформированной конфигурации находится из $\mathbf{R}_n = \frac{\partial X_m}{\partial q^n}\mathbf{e}_m$, $\mathbf{R}^k\cdot\mathbf{R}_n = \delta_n^k$.

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил можно записать в виде [11, с. 38]

$$\frac{\partial}{\partial q^n}\left(\sqrt{D}t^{nm}\right) + \Gamma_{nk}^m\sqrt{D}t^{nk} = 0, \tag{3.1}$$

где $t^{nm} = \mathbf{R}^n\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^m$; $\Gamma_{nk}^m = \frac{1}{2}G^{ms}\left(\frac{\partial G_{sn}}{\partial q^k} + \frac{\partial G_{sk}}{\partial q^n} - \frac{\partial G_{nk}}{\partial q^s}\right)$; $G_{nk} = \mathbf{R}_n\cdot\mathbf{R}_k$; $D = \det\|G_{nk}\|$; T — тензор напряжений Коши. Согласно определяющим соотношениям упругого материала [11, с. 360],

$$t^{nm} = 2\sqrt{d/D}\,\frac{\partial W}{\partial G_{nm}}, \quad d = \det\|g_{nk}\|, \tag{3.2}$$

$$g_{nk} = \mathbf{r}_n\cdot\mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_n = \frac{\partial x_m}{\partial q^n}\mathbf{e}_m$$

(W — удельная потенциальная энергия деформации).

Присоединив к (3.1), (3.2) уравнение совместности (1.8), в котором x_α надо заменить на q^α, получим полную систему уравнений относительно $G_{\alpha\beta}$ в плоской задаче нелинейной теории упругости. В случае двухсвязной области к указанным уравнениям необходимо добавить соотношения (2.2), (2.5), задающие параметры дислокации Вольтерра.

Что касается граничных условий в напряжениях, то, как известно [2, с. 131, 132], в нелинейной теории упругости ограничиваются рассмотрениями «мертвого» и «следящего» нагружений. Для «мертвого» нагружения граничные условия имеют вид $\sqrt{D/d}\ n_s t^{sm}\mathbf{R}_m = \mathbf{f}^0$. Здесь $\mathbf{n} = n_s\mathbf{r}^s$ — нормаль к поверхности тела в отсчетной конфигурации; $\mathbf{f}^0$ — заданная на этой же поверхности поверхностная сила. Для наиболее типичного случая «следящего» нагружения — гидростатического давления — граничные условия запишем в форме $n_s t^{sm}\ G_{mk} = -pn_k$ (p — интенсивность давления). Таким образом, для случая «следящего» давления граничные условия удается записать непосредственно в компонентах меры деформации $\mathbf{G}$, для «мертвого» же нагружения необходимо уже знание поля поворотов, определяемого через $\mathbf{G}$ (в случае плоской деформации) по формулам (2.1).

Применим полученные соотношения для решения задачи о дефекте в упругом кольце $a \leqslant r \leqslant b$.

Будем искать решение уравнений (3.1) в виде

$$\mathbf{G} = G_{11}(r)\mathbf{r}^1\mathbf{r}^1 + G_{22}(r)\mathbf{r}^2\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^3\mathbf{r}^3. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{r}^n$ — векторный базис, взаимный к лагранжеву базису отсчетной конфигурации $\mathbf{r}_n$, соответствующему цилиндрическим координатам $q^1 = r$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$.

Уравнение совместности деформаций (1.8) в этом случае принимает вид

$$G_{11}G_{22}\frac{d^2G_{22}}{dr^2} - \frac{1}{2}\frac{dG_{22}}{dr}\left(G_{22}\frac{dG_{11}}{dr} + G_{11}\frac{dG_{22}}{dr}\right) = 0. \tag{3.4}$$

Пользуясь положительной определенностью тензора $\mathbf{G}$, введем положительные функции $A(r)$ и $B(r)$ такие, что

$$G_{11}(r) = A^2(r),\ G_{22}(r) = B^2(r). \tag{3.5}$$

С использованием этих функций уравнение (3.4) запишем как $A\dfrac{d^2B}{dr^2} - \dfrac{dB}{dr}\dfrac{dA}{dr} = 0$. Интегрируя это соотношение и обозначая константу интегрирования через $\ln \varkappa (\varkappa > 0)$, получаем $|dB/dr| = \varkappa A$. В данном соотношении можно опустить знак модуля, но тогда считать $\varkappa$ произвольным — как положительным, так и отрицательным. Случай $\varkappa < 0$ (соответственно $dB/dr < 0$) отвечает деформации, сопровождаемой выворачиванием кольца наизнанку, и здесь рассматриваться не будет. Поэтому в дальнейшем, опуская знак модуля, считаем $\varkappa > 0$:

$$dB/dr = \varkappa A. \tag{3.6}$$

Соотношение (2.2) для угла Франка в нашем случае примет вид

$$K = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{U_{11}}\frac{dU_{22}}{dr} + \frac{U_{22}}{U_{11}} - 1\right)d\varphi. \tag{3.7}$$

Здесь U_{11} и U_{22} — компоненты меры искажения $\mathbf{U}$ в ортонормированном базисе цилиндрических координат. С учетом (3.5) $U_{11}(r) = A(r)$, $U_{22}(r) = r^{-1}B(r)$. С учетом (3.6) соотношение (3.7) преобразуется: $K = 2\pi(\varkappa - 1)$.

Таким образом, по заданному углу Франка K определяется константа $\varkappa$:

$$\varkappa = (2\pi + K)/2\pi. \tag{3.8}$$

В данном случае поле поворотов $\chi_* = (\varkappa - 1)\varphi$. Здесь считаем, что разрез проведен вдоль линии $\varphi = 0$ и для точки M_0, лежащей на этом разрэзе, положено $\chi(M_0) = 0$.

Преобразовывая (2.5) для β, имеем соотношение $\beta = (1 - e^{iK})\times\times(z_0 - (1/\varkappa)B(r_0))$, которое показывает, что представлением (3.3) удается решить задачу о клиновой дисклинации (поворотной дислокации), в то время как для решения задачи о трансляционной дислокации такого представления уже недостаточно. В самом деле, положив $K = 0$ (отсутствие поворотной дислокации), получаем, что и $\beta = 0$, т. е. в теле вообще нет дефекта.

При задании характеристик дефекта $K = 0$, $\beta \neq 0$ решения задачи вида (3.3) не существует.

Изучение напряженно-деформированного состояния кольца с дисклинацией проведем для полулинейного материала [2, 11]. Выражение для W имеет вид $W = (1/2)\lambda\,\mathrm{tr}^2\,(\mathbf{U} - \mathbf{I}) + \mu\,\mathrm{tr}\,((\mathbf{U} - \mathbf{I})^2)$ (λ и μ — постоянные материала).

Выражения для компонент тензора напряжений (3.2) в этом случае с учетом представлений (3.3), (3.5) следующие:

$$t^{11} = rA^{-2}B^{-1}[\lambda(A + r^{-1}B) - 2(\lambda + \mu)] + 2\mu rA^{-1}B^{-1},$$
$$t^{22} = A^{-1}B^{-2}[\lambda(A + r^{-1}B) - 2(\lambda + \mu)] + 2\mu r^{-1}A^{-1}B^{-1},$$
$$t^{33} = \lambda rA^{-1}B^{-1}(A + r^{-1}B - 2).$$

Подставляя данные выражения в уравнения равновесия (3.1), находим, что второе и третье из них удовлетворяются тождественно, а первое после преобразований принимает вид

$$(\lambda + 2\mu)\left(A\frac{dA}{dr} + r^{-1}A^2 - r^{-2}B\frac{dB}{dr}\right) + 2r^{-1}(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial B}{dr} - A\right) = 0. \tag{3.9}$$

Решая систему (3.6), (3.9), запишем

$$A(r) = C_1r^{\varkappa-1} + C_2r^{-\varkappa-1} + \frac{1}{(1+\varkappa)(1-\nu)},$$
$$B(r) = C_1r^{\varkappa} - C_2r^{-\varkappa} + \frac{\varkappa}{(1+\varkappa)(1-\nu)}\,r, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные; ν — коэффициент Пуассона. Константа $\varkappa$ выражается через угол Франка соотношением (3.8).

Для определения постоянных воспользуемся граничными условиями. Считаем, что поверхности кольца ($r = a$ и $r = b$) свободны от нагрузки. Граничные условия в этом случае запишем как $(\lambda + 2\mu)A(r) + r^{-1}\times\times\lambda B(r) - 2(\lambda + \mu) = 0$, $r = a$, b. Для констант находим выражения

$$C_1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\frac{b^{\varkappa+1} - a^{\varkappa+1}}{b^{2\varkappa} - a^{2\varkappa}}, \tag{3.10}$$
$$C_2 = \frac{1}{1-\nu}\,\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\frac{b^{\varkappa-1} - a^{\varkappa-1}}{b^{2\varkappa} - a^{2\varkappa}}\,a^{\varkappa+1}b^{\varkappa+1}.$$

Рассмотрим случай сплошного диска ($a = 0$). Из (3.10) $C_1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\times\times b^{1-\varkappa}$, $C_2 = 0$. Выражения для деформаций примут вид

$$U_{11} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\rho^{\varkappa-1} + \frac{1}{(1+\varkappa)(1-\nu)},$$
$$U_{22} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\rho^{\varkappa-1} + \frac{\varkappa}{(1+\varkappa)(1-\nu)}, \quad \rho = \frac{r}{a}.$$

Из этих формул видно, что при $\varkappa > 1$ поле деформаций не имеет особенности на оси дисклинации (в окрестности $\rho = 0$). При $\varkappa < 1$ у этого поля существует особенность порядка $\rho^{\varkappa-1}$.

Анализ соотношения (3.8) показывает, что случай $\varkappa < 1$ соответствует введению в разрез кольца клина с углом раствора K, а $\varkappa > 1$ — деформации, возникающей после удаления из кольца части материала в форме сектора с последующим соединением краев.

Получим выражения для главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 в случае сплошного диска через компоненты t^{mn} по формулам $\sigma_1 = t^{11}G_{11}$, $\sigma_2 = t^{22}G_{22}$, $\sigma_3 = t^{33}$ в форме

$$\sigma_1 = \frac{2\mu(\rho^{\varkappa-1} - 1)}{(1-2\nu)\rho^{\varkappa-1} + 1}, \quad \sigma_2 = \frac{2\mu(\varkappa\rho^{\varkappa-1} - 1)}{(1-2\nu)\varkappa\rho^{\varkappa-1} + 1},$$

$$\sigma_3 = \frac{2\mu\nu(1-\nu)(1+\varkappa)(2\varkappa\rho^{\varkappa-1} - \varkappa - 1)}{\varkappa[(1-2\nu)\varkappa\rho^{\varkappa-1} + 1][(1-2\nu)\rho^{\varkappa-1} + 1]}.$$

Видно, что главные напряжения не имеют особенности на оси дисклинации.

Полученные результаты о поведении напряжений и деформаций вблизи оси дефекта при строгом учете геометрической нелинейности качественно отличаются от результатов линейной теории упругости [9, 11], согласно которой поля деформаций и напряжений имеют логарифмическую особенность на оси дисклинации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
3. **Грин А., Адкинс Дж.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошных сред.— М.: Мир, 1965.
4. **Черных К. Ф.** Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости // ПМ.— 1977.— Т. 13, № 1.
5. **Зубов Л. М.** Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 4.
6. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
7. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды.— М.: Физматгиз, 1962.
8. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек.— Ростов н/Д: Рост. ун-т, 1982.
9. **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций.— М.: Мир, 1977.
10. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
11. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.

Поступила 30/VII 1986 г.

УДК 539.3

ВНУТРЕННИЙ ИСТОЧНИК КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. А. БАБЕШКО, Е. В. ГЛУШКОВ, Н. В. ГЛУШКОВА, А. А. ЕВДОКИМОВ

(*Краснодар*)

Использование методов неразрушающего контроля конструкций и материалов связано с построением и расшифровкой волновых полей, создаваемых в среде включениями и неоднородностями различного типа. К подобным задачам сводится и моделирование сейсмических очагов [1]. Задача об излучении в безграничную среду цилиндром конечных размеров и радиуса r_0 впервые, по-видимому, исследовалась в [2]. В этой работе стенки цилиндра подвергались нестационарным (продольному и двум видам срезывающих) давлениям. С учетом такого рода нагрузок получены представления для амплитуд продольных и поляризованных поперечных волн. Кроме того, изучен вопрос распределения энергии между указанными типами волн. Показано, что при действии лишь продольного давления от источника выходит SV-волна, амплитуда которой в 1,6 раза больше P-волны и которая направлена под углом в 45°. В последнее время основной упор все больше делается не на изучение излучаемого поля (задачи для безграничной среды), а на учет отражений от поверхности и внутренних неоднородностей (см., например, [1, 3, 4]).

В настоящей работе рассматривается задача, возникающая при изучении волновых полей, возбуждаемых в упругом однородном полупространстве заглубленным бесконечно тонким источником конечных размеров, например свайным фундаментом виброустановок. Решение задачи представляет суперпозицию волнового поля, излучаемого непосредственно источником и отраженного от поверхности полупространства. Вертикальные и горизонтальные колебания свай моделируются гармонической объемной силой, распределенной под поверхностью упругого полупространства вдоль конечного отрезка. Получены аналитические представления для амплитуды продольных, поперечных и рэлеевских волн в дальней от источника зоне.