

УДК 532.516

## КВАЗИУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ В ГАЗЕ: СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ ВОЛН

О. В. Воинов

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, 625000 Тюмень  
E-mail: o.v.voinov@mtu-net.ru

Рассмотрено движение в газе тонких пленок вязкой несжимаемой жидкости под действием капиллярных сил. Поверхностное натяжение зависит от концентрации поверхностно-активной примеси, жидкость нелетучая. Движение описывается известной моделью квазиустановившегося вязкого течения в пленке. Решения для линейных волн сопоставлены с решением в рамках уравнений Навье — Стокса. Изучены ситуации, когда существует решение, близкое к невязкому двумерному, и в случае большой длины волны возможно появление звуковых волн в пленке, обусловленное упругостью поверхности по Гиббсу. Изучено поведение точных решений вблизи области применимости асимптотических уравнений, получены немонотонные зависимости характеристик волны от волнового числа.

**Ключевые слова:** вязкая несжимаемая жидкость, капиллярные силы, поверхностное натяжение, пленка в газе, волновая динамика.

**1. Модель квазиустановившегося течения в пленке.** Термодинамические основы теории динамики пленок жидкости с изменяющимся поверхностным натяжением созданы в трудах Дж. Гиббса по термодинамике границ раздела [1]. Дж. Гиббс выполнил важные исследования динамики пленок жидкости с поверхностно-активным веществом, продолженные К. Майселсом и др. [2]. Движения жидких пленок в газе теоретически и экспериментально изучал Дж. Тейлор [3]. Теория Тейлора динамики свободных жидких пленок и теория мелкой воды на горизонтальной поверхности [4] основаны на модели идеальной жидкости. В отличие от задач, рассматриваемых в этих теориях, при действии на поверхности пленки касательного напряжения большое значение имеет вязкость жидкости [5, 6]. За счет вязкости скорость жидкости может мало изменяться по толщине пленки. В свободной пленке возможны звуковые волны, обусловленные гиббсовской упругостью поверхности [5].

Рассмотрим пленку, симметричную относительно плоскости  $x_3 = 0$ , при следующих предположениях. Расстояние  $\lambda$ , на котором меняются параметры течения, велико по сравнению с толщиной  $h$  пленки ( $\lambda \gg h$ ). Характерное время  $\tau$  значительно больше времени переноса вихря поперек пленки:  $h^2 \ll \nu\tau$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость). Это условие будем считать выполненным для времени  $\tau$ , вычисленного по величине  $\lambda$  и характерной скорости жидкости:  $\tau = \lambda/v^*$ , что эквивалентно малости приведенного числа Рейнольдса гидродинамической теории смазки:  $v^*h^2/(\lambda\nu) \ll 1$ . При этих предположениях [6] в каждом поперечном сечении пленки течение будет близко к установившемуся течению с квадратичным профилем скорости с медленно меняющимися по координатам  $x_1, x_2$  коэффициентами:

$$v'_i = v_i(x_1, x_2, t) + \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right) u_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

Здесь  $v_i$  — скорость поверхности пленки;  $u_i$  — средняя скорость течения относительно поверхности. В уравнениях движения пленки ускорение жидкости в основном определяется скоростью  $\mathbf{v}$  [6]. Чтобы учесть влияние скорости  $\mathbf{u}$  на малое затухание волн в пленке [7], ускорение жидкости находим по среднему значению скорости  $\mathbf{v}'$  в пленке. Разность среднего ускорения жидкости в пленке, определенного согласно соотношению (1.1), и ускорения, вычисляемого по средней скорости  $\overline{\mathbf{v}'}$ , пропорциональна малой величине  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , значение которой несущественно в рамках принятой модели течения в пленке.

Уравнения квазиустановившихся течений в пленках [6] запишем в виде

$$h\rho \frac{d\overline{v}'_i}{dt} = 2\nabla_i\sigma + h\rho g_i + h\nabla_i\left(\frac{\sigma}{2}\nabla^2 h - p_e\right) + \nabla_j\{h\mu(2\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{v} + \nabla_i v_j + \nabla_j v_i)\}; \quad (1.2)$$

$$6\mu\mathbf{u} = -h\nabla\sigma; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot h\overline{\mathbf{v}'} = 0, \quad \overline{\mathbf{v}'} = \mathbf{u} + \mathbf{v}; \quad (1.4)$$

$$\sigma = \sigma(\Gamma, T), \quad \Gamma = \Gamma(c, T), \quad x_3 = \pm h/2; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma\mathbf{v}) = -D \frac{\partial c}{\partial x_3}\left(x_1, x_2, \frac{h}{2}, t\right); \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v'_j \nabla_j c - (x_3 \operatorname{div}\mathbf{v})\nabla_3 c = D\nabla^2 c, \quad x_3 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right). \quad (1.7)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера; по повторяющемуся индексу  $j = 1, 2$  проводится суммирование;  $g_i$  — массовая сила;  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $D$  — коэффициент диффузии;  $c, \Gamma$  — объемная и поверхностная концентрации примеси, профили которых симметричны относительно точки  $x_3 = 0$ ; концентрация  $\Gamma$  связана со значением  $c$  на поверхности уравнением адсорбции (1.5); поверхностное натяжение  $\sigma$  зависит от  $\Gamma$  в соответствии с первым уравнением в (1.5); температура  $T$  и давление в газе постоянны;  $p_e$  — дополнительное слагаемое в выражении для давления в сверхтонких пленках (отличается знаком от расклинивающего давления). В выражении для эффективного давления  $p_e$  учитывается, в частности, действие сил Ван-дер-Ваальса, описываемое аналогичными уравнениями для случаев пленки в газе и пленки на твердой стенке [5, 8–13]. Уравнения (1.6) и (1.7) описывают перенос примеси в жидкости. Возможное влияние реологии поверхности [6] не рассматривается.

Известна дивергентная форма уравнения импульса (1.2), которая целесообразна для записи интегралов уравнений [14]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\rho v'_i) + \nabla_j I_{ij} = h\rho g_i, \quad I_{ij} = \rho h v'_i v'_j - 2s_{ij} - h p_{ij} - E\delta_{ij},$$

$$s_{ij} = \sigma(1 + |\nabla z|^2/2)\delta_{ij} - \sigma(\nabla_i z)\nabla_j z, \quad z = h/2,$$

$$p_{ij} = \delta_{ij}((\sigma/2)\nabla^2 h - p_e) + \mu(2\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{v} + \nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Здесь  $v'_i$  — средняя скорость;  $E$  — первообразная от  $p_e = \partial E/\partial h$ .

В случае нерастворимой в жидкости примеси уравнения (1.5)–(1.7) сводятся к двум уравнениям

$$\sigma = \sigma(\Gamma, T), \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma\mathbf{v}) = 0. \quad (1.8)$$

Используя (1.8), запишем выражение для коэффициента упругости поверхности:

$$\varepsilon' = -\Gamma \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma}. \quad (1.9)$$

Решение задачи для нерастворимой примеси в некоторых случаях может быть использовано в качестве приближенного решения задачи для растворимой примеси.

Прежде всего, известно, при каких условиях эффекты растворимости примеси несущественны. Рассмотрим малые возмущения равновесия пленки. При достаточно малой толщине пленки [8, 14]:

$$h \ll H, \quad H = \frac{\partial \Gamma}{\partial c}$$

растворимая примесь ведет себя как нерастворимая и уравнение переноса (1.8) имеет малую погрешность:  $h/H \ll 1$  ( $c$  — значение концентрации на поверхности). Диффузия примеси влияет на звуковые волны в пленке [14], увеличивая их затухание. Уменьшение  $h/H$  приводит к уменьшению влияния диффузии.

Кроме того, имеется аналогия поведения пленок с растворимой и нерастворимой примесями [8, 14]. Пусть средняя скорость в пленке близка к скорости поверхности  $\mathbf{v}$ , т. е.  $u \approx 0$ , и выполнены неравенства  $h^2 \ll D\tau \ll \lambda^2$ . Тогда  $2\Gamma/h + c = f(\xi_i)$  ( $f$  — произвольная функция лагранжевых координат  $\xi_i$ ), при этом поверхностное натяжение  $\sigma = \sigma(h, \xi_i, T)$ . Аналогично (1.9) коэффициент упругости поверхности пленки равен

$$\varepsilon' = -\Gamma \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \left(1 + \frac{h}{2H}\right)^{-1}.$$

Данная аналогия поведения пленок с растворимой и нерастворимой примесями может быть справедлива в случае звуковых волн [5], когда характерные значения скоростей существенно различаются ( $u \ll v$ ), и отсутствует для медленных аperiodических движений при малой скорости поверхности  $\mathbf{v}$  (наиболее интересный случай для таких движений). Существование аналогии ограничено также условием  $kh \ll \text{Pr}^{-1/2}$  ( $\text{Pr} = \nu/D$  — диффузионное число Прандтля, значение которого для жидкостей велико [14]).

Ниже рассматривается случай нерастворимой примеси.

## 2. Задача о волнах в рамках линеаризованных уравнений Навье — Стокса.

Рассмотрим малые, периодические по оси  $x$  возмущения, при которых толщина пленки определяется соотношением

$$h = h_0 + h_1 \exp(\alpha' t - ikx). \quad (2.1)$$

Линейная задача о волнах в жидкости с примесью поверхностно-активного вещества рассмотрена в [15] для жидкости бесконечной глубины. От этой задачи существенно отличается задача о пленке, в которой возможно появление звуковых волн [5].

Решению задачи о симметричных волнах малой амплитуды в присутствии нерастворимой примеси [5] соответствует дисперсионное уравнение

$$(\Omega \operatorname{th} a + (2 + \alpha^2)) \operatorname{th}(la) - 4l \operatorname{th} a + \delta(l - \Omega(\operatorname{th}(la) - l \operatorname{th} a)\alpha^{-2}) = 0; \quad (2.2)$$

$$l = \sqrt{\alpha + 1}, \quad a = \frac{1}{2} kh, \quad \alpha = \frac{\alpha'}{\nu k^2}, \quad \Omega = \frac{\sigma - 2Qk^{-2}}{\rho \nu^2 k}, \quad \delta = \frac{\varepsilon'}{\rho \nu^2 k}. \quad (2.3)$$

Здесь  $Q = -\partial p_e / \partial h$ . Согласно соотношениям (2.2) и (2.3) зависимость показателя  $\alpha'$  от волнового числа  $k$  включает три параметра, два из которых объединены в параметр  $\Omega$ .

**3. Волны в пленке на основе асимптотических уравнений движения.** Из уравнений движения в случае нерастворимой примеси (1.1)–(1.4) и (1.8) при использовании соотношений (2.1) получается следующее уравнение:

$$\alpha^2 + \alpha \left(4 + \frac{1}{3} \delta a\right) + \Omega a + \frac{\delta}{a} + \frac{a^2}{3\alpha} \delta \Omega = 0. \quad (3.1)$$

Безразмерные параметры (2.3) представим в виде

$$\delta = \Delta/a, \quad \Omega = \Omega_\sigma a^{-1} + \Omega_e a^{-3},$$

где коэффициент упругости  $\Delta$ , параметры капиллярного давления  $\Omega_\sigma$  и эффективного давления  $\Omega_e$  не зависят от волнового числа  $k$ .

В случае значительного влияния инерции жидкости при движении пленки (например, в случае звуковых волн) модуль безразмерного показателя значителен:  $|\alpha| \gg 1$ . При этом уравнение (3.1) имеет то же ограничение, что и модель квазиустановившегося течения:  $h^2 \ll \nu\tau$ . С учетом соотношения  $|\alpha'| \approx 1/\tau$  отсюда следует

$$|\alpha|a^2 \ll 1. \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2) справедливо, когда на поверхности пленки имеется касательное напряжение, обусловленное коэффициентом упругости  $\varepsilon' \neq 0$  ( $\delta \neq 0$ ), и не распространяется на задачи в отсутствие упругости.

**4. Связь между дисперсионными уравнениями приближенной и точной теорий.** Рассмотрим дисперсионное уравнение (3.1) приближенной теории и асимптотику (при  $a \ll 1$ ) дисперсионного уравнения (2.2) линейной волновой задачи в рамках уравнений Навье — Стокса. Учтем главные члены тейлоровских разложений при  $a = 0$  для функций в (2.2). При этом опустим малые члены  $O(a^2)$ , но оставим малые члены  $O(\alpha a^2)$ . В результате предельная форма точного уравнения (2.2) для длинных волн совпадает с приближенным уравнением (3.1), следующим из асимптотических уравнений.

Для немалого  $kh$  приближенные значения показателя  $\alpha(k)$  будут отличаться от точных значений, продолжающих решение при малом  $kh$ . Для того чтобы определить область применимости приближенного решения, будем рассматривать его до значений  $kh \approx 1$  вместе с точным решением.

**5. Корни дисперсионного уравнения.** Рассмотрим решение при относительно малом влиянии вязкости жидкости:  $\lambda^2 \gg \nu\tau$  или  $|\alpha| \gg 1$ . Найдем приближенно два корня уравнения (3.1) при малом значении числа  $a$ , предполагая также, что  $|\alpha| \gg 1$ :

$$\alpha = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = (\Omega a + \delta/a)^{1/2}. \quad (5.1)$$

С учетом (3.2) это верно при

$$1 \ll \omega_0 \ll a^{-2}.$$

Здесь второе неравенство существенно, когда  $\delta \neq 0$ . Отметим, что решению (5.1) соответствует малая вторая скорость:  $u \ll v$ .

Высокочастотный корень уравнения (3.1) запишем в приближенном виде, считая малым вклад параметра капиллярного давления  $\Omega_\sigma$ :

$$\alpha = \pm ia^{-1}(\Delta + \Omega_e)^{1/2}.$$

Отсюда при  $\Delta + \Omega_e < 0$  следует экспоненциальная неустойчивость пленки [5]. Если  $\Delta + \Omega_e > 0$ , то размерная частота  $\omega'_0$  пропорциональна волновому числу  $k$  [5], что соответствует звуковой волне. При  $\Delta \gg \Omega_e$  частоту выразим через скорость звука  $c_s$ :

$$\omega'_0 = c_s k, \quad c_s = (2\varepsilon'/(\rho h))^{1/2}.$$

Безразмерный декремент затухания  $\beta$  зависит от упругости [7]:

$$\alpha = \pm i\omega_0 - \beta, \quad \beta = 2 + \frac{1}{6} \frac{\Delta^2}{\Delta + \Omega_e a^3}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим затухание волны за одно колебание в зависимости от упругости поверхности при достаточно малом значении  $a$ , так что выполнено неравенство  $\Omega a^3 \ll \Delta$ . Из (5.1) и (5.2) следует, что имеется минимум потерь энергии за одно колебание:  $\min(\beta/\omega_0)$  при  $\Delta = 12$ . При этом волна наиболее близка к волне в идеальной сжимаемой среде.

С помощью итерации уточним корень (5.1) уравнения (3.1):

$$\alpha = \pm i\omega_1 - \beta, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 + \frac{2}{3}\beta \frac{\Omega a \Delta}{\omega_0^2}. \quad (5.3)$$

Возможным аperiодическим движениям соответствует третий корень уравнения (3.1). При наличии корня с высокой частотой ( $\omega_0 \gg 1$ ) и  $a \ll 1$

$$\alpha_3 \approx \alpha_{30} = -\frac{a^2}{3} \frac{\Omega \delta}{\omega_0^2}. \quad (5.4)$$

Уточним значение корня (5.4) уравнения (3.1) с помощью итерации:

$$\alpha_3 = -(1/3)\Omega a \Delta (\omega_0^2 + \alpha_{30}^2 + \alpha_{30}(4 + \Delta/3))^{-1}. \quad (5.5)$$

Покажем, что третий корень мал по сравнению с безразмерной частотой  $\omega_0$ . При значении коэффициента упругости  $\delta \sim \Omega a^2$  справедлива оценка

$$\alpha_3 \sim a^2 \omega_0^2 \ll \omega_0.$$

При большом значении коэффициента  $\delta \gg \Omega a^2$  имеем оценку

$$\alpha_3 = -\Omega a^3/3 \ll a^2 \omega_0^2 \ll \omega_0.$$

Малое значение корня  $\alpha_3$  обуславливает стабилизацию неустойчивой пленки (при  $\Omega_e < 0$ ) за счет влияния примеси [5]. С ростом упругости неустойчивость переходит с высокочастотной ветви решения дисперсионного уравнения на ветвь аperiодического движения, при этом инкремент роста длинноволновых возмущений уменьшается во много раз.

**6. Соотношения между волновыми показателями  $\alpha(k)$  приближенной и точной теорий.** Рассмотрим зависимости характеристик волны от волнового числа при значении отношения параметра капиллярного давления к коэффициенту упругости  $\Omega_\sigma/\Delta = \sigma/\varepsilon' = 10$ . Особые свойства сверхтонких пленок не рассматриваются:  $\Omega_e = 0$ .

Введем обозначение  $\alpha a^2 = X + iY$ . На рис. 1 показана зависимость безразмерной частоты  $Y$  от безразмерного волнового числа  $a = kh/2$ . Рассмотрены те корни уравнения (2.2), которые при  $a \rightarrow 0$  переходят в корни уравнения (3.1). С увеличением коэффициента упругости  $\Delta$  область, в которой точная и асимптотическая теории согласуются, сужается. На

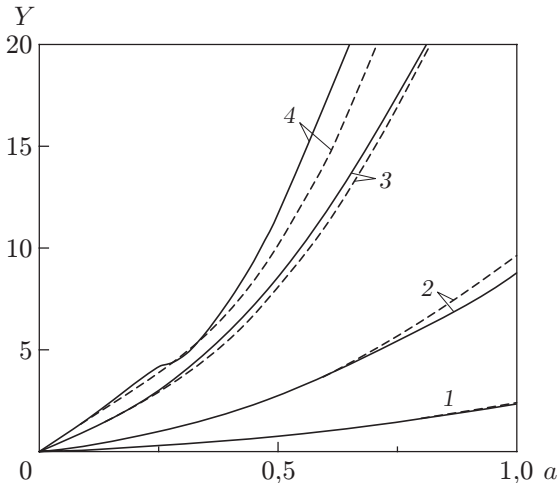


Рис. 1. Зависимость частоты от волнового числа:

сплошные линии — решения точного уравнения (2.2); штриховые — расчет по формулам (5.2), (5.3); 1 —  $\Omega_\sigma = 10$ ; 2 —  $\Omega_\sigma = 100$ ; 3 —  $\Omega_\sigma = 1000$ ; 4 —  $\Omega_\sigma = 2285$

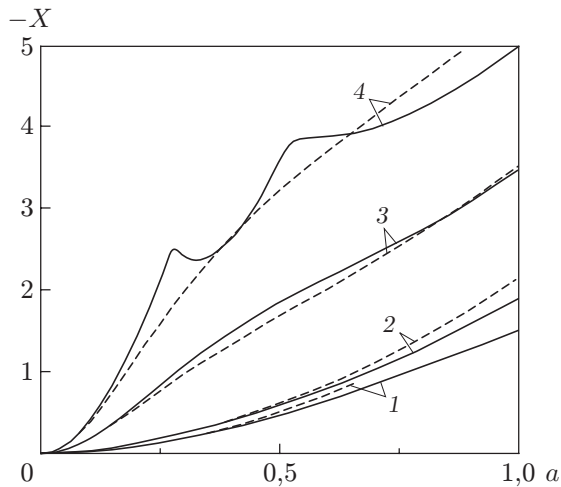


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость декремента затухания от волнового числа (обозначения те же, что на рис. 1)

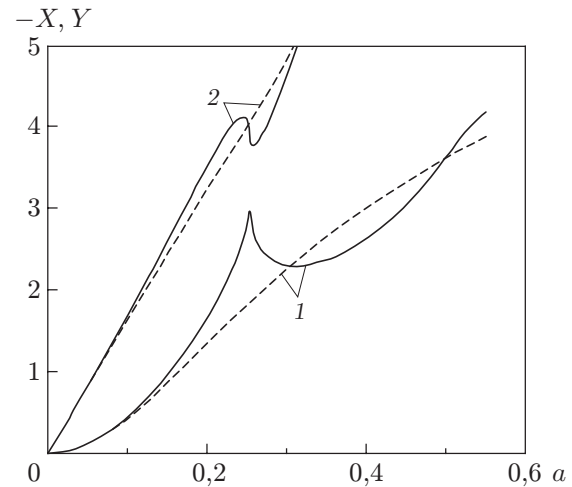


Рис. 3

Рис. 3. Немонотонные зависимости декремента затухания (1) и частоты (2) от волнового числа:

сплошные линии — решения точного уравнения (2.2); штриховые — расчет по формулам (5.2), (5.3)

сплошной кривой 4 имеется точка перегиба  $a = 0,2772$ . Это означает, что при дальнейшем увеличении параметра  $\Delta$  зависимость  $Y(a)$  при  $a < 1$  является немонотонной.

На рис. 2 показана зависимость безразмерного декремента затухания  $-X$  от волнового числа  $a$ . Точная кривая 4 немонотонна. Немонотонность появляется при  $\Delta = 209,69$ , когда имеется точка перегиба, соответствующая значению  $a = 0,3169$ . Немонотонность зависимостей частоты и декремента затухания от волнового числа не описывается асимптотической теорией.

Точка  $a = 0$  соответствует абсолютному минимуму затухания колебаний, вблизи которого исчезают потери энергии при колебаниях:  $\beta/\omega \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$ .

На рис. 3 представлены немонотонные зависимости декремента затухания и частоты от волнового числа. Согласно точному решению декремент затухания максимален при  $a = 0,2544$ . На первый взгляд на сплошной кривой 1 имеется угловая точка. Однако, как показали расчеты с малым шагом по волновому числу  $a$ , эта кривая гладкая. При малом  $a$  точные решения и асимптотики совпадают.

Все зависимости частоты от волнового числа на рис. 1, 3 при малом значении  $a$  близки к линейным. Линейная асимптотика соответствует звуковой волне в пленке [5] с малым декрементом затухания (порядка  $a^2$ ).

Уравнение (3.1) имеет вещественный третий корень  $\alpha_3$ , соответствующий аperiodическому движению. Зависимости коэффициента  $X = \alpha_3 a^2$  от волнового числа при различных значениях  $\Omega_\sigma$  приведены на рис. 4. Области применимости приближенных решений соответствуют значениям  $|X| < 1$ . Видно, что асимптотическое решение хорошо согласуется с точным. Из рис. 4 следует, что возможны чисто затухающие движения с существенным влиянием инерции жидкости.

Влияние коэффициента упругости  $\Delta$  на частоту волны и декремент затухания при  $\Omega_\sigma = 1000$  показано на рис. 5. Видно, что точное решение хорошо согласуется с линейной асимптотикой декремента затухания  $-X(\Delta)$  (кривые 1, 2). Асимптотика учитывает

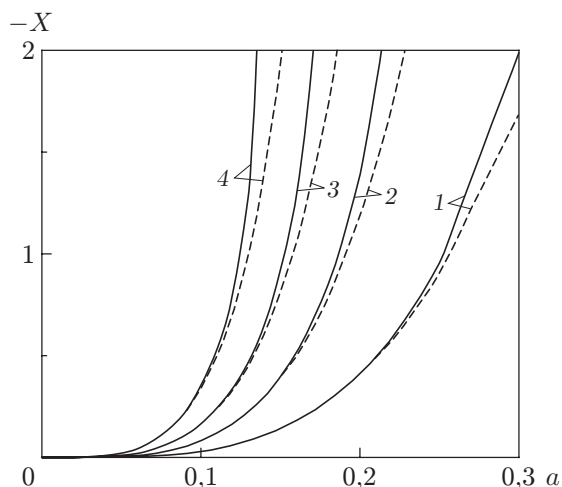


Рис. 4

Рис. 4. Декремент затухания аperiodического движения:

сплошные линии — решения точного уравнения (2.2); штриховые — расчет по формуле (5.5); 1 —  $\Omega_\sigma = 1000$ ; 2 —  $\Omega_\sigma = 2600$ ; 3 —  $\Omega_\sigma = 5000$ ; 4 —  $\Omega_\sigma = 10^4$

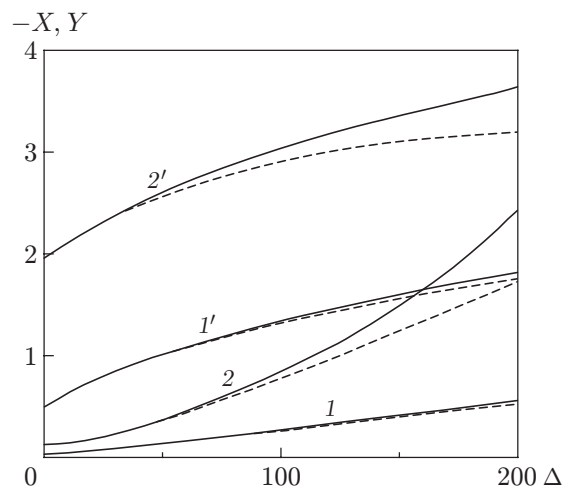


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости декремента затухания (1, 2) и частоты (1', 2') от коэффициента упругости при  $\Omega_\sigma = 1000$ :

сплошные линии — решения точного уравнения (2.2); штриховые — расчет по формулам (5.2), (5.3); 1, 1' —  $a = 0,125$ ; 2, 2' —  $a = 0,25$

влияние второй скорости  $u$  на затухание колебаний [7]. Увеличение упругости приводит к изменению декремента затухания  $|X|$  во много раз по сравнению со значением при  $\Delta = 0$ , определяемым вязкими напряжениями в продольном течении (кривые 1). Влияние упругости на затухание [7, 14] определяется малым значением отношения  $h^2/(\nu\tau)$ , где  $\tau = 1/\omega'_0$  ( $\omega'_0$  — размерная частота).

В пределе малого волнового числа ( $kh \rightarrow 0$ ) для решений, описывающих звуковые волны [5], в уравнении импульса (1.2) не существенны ни вязкость, ни вторая скорость  $u$ . При этом пленка подобна идеальной сжимаемой среде, если коэффициент упругости  $\Delta$  ограничен. В случае  $\Delta \approx a^{-2}$  затухание волны сравнимо с частотой и асимптотическая теория неприменима, так как условие (3.2) не выполнено. Отметим, что неравенство (3.2) исполь-

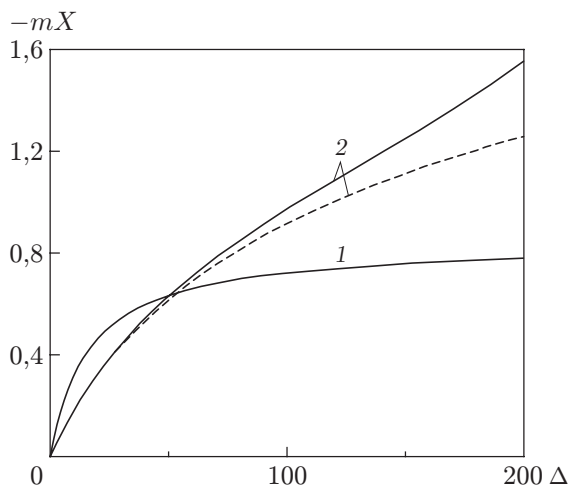


Рис. 6. Зависимость декремента затухания аperiodического движения от коэффициента упругости:

сплошные линии — решения точного уравнения (2.2); штриховые — расчет по формуле (5.5); 1 —  $m = 10$ ,  $a = 0,125$ ; 2 —  $m = 1$ ,  $a = 0,25$

зается при выводе приближенного решения дисперсионного уравнения с учетом упругости поверхности [5].

На рис. 6 для случая аperiодического движения пленки приведена зависимость безразмерного показателя  $X = \alpha_3 a^2$  от коэффициента упругости  $\Delta$  при  $\Omega_\sigma = 1000$ . При  $a = 0,125$  точные значения и решение (5.5) различаются менее чем на 1 % (кривые 1). В этом случае значения  $X$  существенно зависят от коэффициента упругости  $\Delta$  при его малых значениях и слабо меняются в диапазоне  $20 < \Delta < 200$ . Такая область слабого изменения  $X$  отсутствует при  $a = 0,25$ . Приближенные решения пригодны при малом  $a$  и  $|X| < 1$ .

**7. Выводы.** Проведенное сравнение двух способов описания линейных волн в пленке жидкости в присутствии нерастворимого поверхностно-активного вещества позволяет сделать следующие выводы.

Возможны немонотонные зависимости частоты волны и декремента затухания от волнового числа вне области применимости асимптотик.

Область применимости приближенных решений при малом значении волнового числа удовлетворительно оценивается равенством, при котором не выполнено сильное неравенство (3.2).

Угол наклона кривой зависимости частоты от волнового числа в начале координат соответствует скорости звука в пленке, асимптотическая модель [6] и точная теория линейных волн [5] согласуются.

Аperiодическое движение пленки возможно при большом влиянии не только вязкости, но и сил инерции.

В пределе большой длины волны при некотором значении коэффициента упругости поверхности потери энергии за период становятся минимальными, а отношение скорости звука в пленке к соответствующему значению в идеальной двумерной сжимаемой среде — наиболее близким к единице.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Gibbs J. W.** Collected works. N. Y.: Longmans Green, 1931. V. 1.
2. **Mysels K. J.** Soap films / K. J. Mysels, K. Shinoda, S. Frankel. L.; N. Y. etc.: Pergamon, 1959.
3. **Taylor G. I.** The dynamics of thin sheets of fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1959. V. 253, N 1274. P. 296–312.
4. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
5. **Воинов О. В.** Волновые движения в слое вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активных веществ // ПМТФ. 1971. № 3. С. 81–89.
6. **Воинов О. В.** Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утончения // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 2. С. 285–288.
7. **Воинов О. В.** О принципах двухскоростной капиллярной гидродинамики тонких пленок. М., 1990. Деп. в ВИНТИ 4.12.90, № 6090-В90.
8. **Воинов О. В.** К теории утончения свободных пленок вязкой жидкости // ПМТФ. 1974. № 3. С. 67–78.
9. **Воинов О. В.** Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
10. **Воинов О. В.** Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 69–85.
11. **Де Жен П. Ж.** Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151, № 4. С. 619–681.



12. **Voinov O. V.** Dynamics of wetting of a solid by a liquid: movement of thin liquid films // Encyclopedia of surface and colloid science. N. Y.; L.: Marcel Dekker, 2002. P. 1546–1558.
13. **Френкель Я. И.** Капиллярные свойства гелия II // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1940. Т. 10. С. 650–658.
14. **Воинов О. В.** Движения жидких пленок в газе под действием капиллярных сил. М., 2006. Деп. в ВИНТИ 17.08.2006, № 1081-В2006.
15. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.

*Поступила в редакцию 28/IX 2006 г.*