

УДК: 532.516.2

## **УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДОЙ**

**М.Н. ЗАХАРЕНКОВ**

*ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, г. Жуковский*

*Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского*

Рассматривается обтекание вязкой несжимаемой средой (вода, воздух) кругового цилиндра с учетом зависимости вязкости  $\nu$  от температуры  $T$ . При числе Рейнольдса (по диаметру)  $Re_D = 40$  в задаче обтекания неподвижного цилиндра исследуется влияние различных граничных условий для температуры на структуру течения, коэффициент сопротивления и его составляющие за счет давления и вязкости. Обсуждается связь между градиентом вязкости по нормали к поверхности обтекаемого тела и интегральным потоком завихренности от поверхности тела в пограничный слой. В отличие от случая постоянной вязкости этот поток завихренности может быть отличным от нуля, что вследствие интегрального закона сохранения завихренности должно приводить к изменению граничных условий дальнего поля для скорости. В этой же связи анализируется задача о входе теплового пятна в рассматриваемую расчетную область течения около кругового цилиндра. Рассмотрены примеры симметризации отрывного обтекания цилиндра, совершающего вращательные колебания в равномерном набегающем потоке (задача Танеды). Проводится сравнение с расчетами течений при малых числах Маха  $M \ll 1$  при обтекании средой неподвижного цилиндра. При расчете уравнения переноса тепла в предположении несжимаемости таких сред как воздух предлагается сохранять производную от давления, что характерно для газов. В этом случае достигается лучшее совпадение с расчетами сжимаемых течений (при  $M \ll 1$ ), например, в определении размеров симметричной зоны отрыва потока за круговым цилиндром. Численным моделированием при числе Рейнольдса равном 40 получено нестационарное течение в окрестности точки смыкания нулевой линии тока, ограничивающей замкнутую область отрывного течения (каверну) в следе за неподвижным цилиндром.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Результаты исследований вязких несжимаемых течений имеют многочисленные приложения на практике. К этой тематике сохраняется интерес из-за ряда нерешенных фундаментальных задач и особенностей малоскоростных потоков. С одной стороны, известны аналитические решения обобщенных уравнений Стокса [1] для обтекания кругового цилиндра и шара, а с другой стороны, технические приложения решений этих задач требуют более высокой точности решения и подробного знания структуры течения, в том числе тонкого слоя, формирующегося в пристенной зоне потока, в которой приближение Стокса неприменимо. Изучение задач обтекания тел неоднородной жидкостью, например, стратифицированной по плотности [2, 3], решение которых опирается, в том числе, на решение задачи обтекания тела однородной вязкой несжимаемой средой, еще более повышает требования к качеству решения. В частности, описание внутренних волн в стратифицированной жидкости затрагивает энергетические характеристики

пристеночных течений, в которых генерируются внутренние волны. В то же время более высокие требования предъявляются к описанию течения во всей области решения. При распространении внутренних волн через область течения, в которой может возникнуть его мелкомасштабная вихревая структура, характеризуемая погрешностью численного решения, определяемой как “ошибки округления” [4, 5], нелинейной устойчивостью решения [6] и невыполнением свойства полной консервативности разностной схемы [7, 8], возникает проблема прохождения волн через дисперсионную среду и появляется необходимость построения численного метода, свободного от погрешностей такого рода [9]. Наконец, даже малые изменения температуры, влияющие на величину вязкости среды, и отличие зависимостей вязкости от температуры для таких сред, как вода и воздух, существенно меняют ряд характеристик обтекания тел, структуру течения и часто приводят к локализации возмущений. Это затрагивает комплекс проблем, включая влияние указанных факторов на отрыв течения, тепловые потоки, акустические характеристики и течение в следе [10, 11, 12]. Поэтому следует обратить более пристальное внимание на слабые изменения характеристик среды при малых числах Рейнольдса и малой разности температур набегающего потока и поверхности обтекаемого тела, которые сильно влияют на общие характеристики обтекания тел, например, на сопротивление трения, на распределение давления, на структуру течения в следе.

Интерес к решениям задачи обтекания тел несжимаемой вязкой средой возникает, в частности, из потребности сравнить решения, полученные при малых числах Маха  $M \leq 0,1$  для сжимаемого газа, с экспериментом или численным расчетом несжимаемых течений. Для несжимаемых течений имеется три возможных варианта: провести расчет, считая коэффициент вязкости постоянным; провести расчеты с учетом зависимости вязкости от температуры (зависимость вязкости от давления значительно слабее); учесть в каком-то приближении свойство сжимаемости среды. Например, используя зависимость вязкости от давления из таблицы экспериментальных данных, а также считая, что уравнение состояния для идеального газа устанавливает связь между давлением, плотностью и температурой, можно попытаться построить приближение, учитывающее свойство сжимаемости при сохранении членов с производными от давления (характерными для сжимаемых сред) в уравнении переноса тепла, оставляя уравнение неразрывности и уравнения движения для несжимаемой среды. Тогда снова через зависимость вязкости от температуры проявится частичное влияние этого фактора (сжимаемости) и можно будет сделать первые оценки возможных новых свойств решения.

В табл. 1 представлены результаты численного моделирования и экспериментов (с 1953 по 1999 год) по обтеканию кругового цилиндра потоком при числе Рейнольдса по диаметру  $Re_D$  равном 40 [13–31]. Значения коэффициента сопротивления  $C_x$  меняются от 1,48 [16, 27] до 1,618 [13, 16]. Отношение  $L/D$ , где  $L$  — длина замкнутой рециркуляционной области за цилиндром, измеряемая от задней критической точки на цилиндре ( $x = 1$ ),  $D$  — диаметр цилиндра, меняется от 2,1 [14] до 2,54 [21]. Таблица показывает, что результаты одних авторов дают близкие значения  $C_x$ , но существенно разное отношение  $L/D$ , результаты других — наоборот. Такой заметный разброс в характеристиках течения сам по себе вызывает большой интерес и требует объяснения.

Исследование, проведенное на основе данных, полученных в эксперименте, позволило [17, 20] установить существенный факт: только при отношении ширины канала  $h$  к диаметру цилиндра  $D$  большем чем 20 и при  $Re_D = 40$  характеристики течения перестают зависеть от этого отношения. Например, отношение  $L/D$  при  $h/D = 20$  в полтора раза больше, чем при  $h/D = 10$ .

Таблица 1

		$C_x$	$C_{xp}$	$C_{xf}$	$L/D$
Kawaguti M.	[13] 1953	1,618	1,052	0,566	2,25
Taneda S.	[14] 1956	1,46	–	–	2,1
Apelt C.J.	[15] 1958	1,496	0,928	0,568	2,135
Tritton D.J.	[16] 1959	1,48–1,62	–	–	–
Grove A.S., Shair F.H., Peterson E.E., Acrivos A.	[17] 1964	–	0,935	–	1,5
Kawaguti M., Jain P.	[18] 1966	1,529	1,001	0,528	2,51
Keller H.B., Takami H.	[19] 1966	1,536	–	–	–
Acrivos A., Leal L.G., Snowden D.D., Pan P.	[20] 1968	–	–	–	2,4
Son J.S., Hanratty T.	[21] 1969	1,56	–	–	2,54
Jain P.C., Rao K.S.	[22] 1969	1,55	–	–	2,44
Hamielec A.E., Roal J.D.	[23] 1969	1,548	–	–	–
Dennis S.C.R., Chang G.Z.	[24] 1970	1,522	–	–	2,345
Collins W.M., Dennis S.C.R.	[25] 1973	1,56	1,02	0,54	2,15
Nieuwstadt F., Keller H.B.	[26] 1973	–	–	–	2,18
Ta Phoc Loc	[27] 1975	1,48	–	–	2,14
Zdrawkovich M.M.	[28] 1977	1,536	–	–	–
Coutanceau M., Bourd R.	[29] 1977	–	–	–	2,19
Fornberg B.	[30] 1980	1,498	–	–	–
Chaplin J.R.	[31] 1999	1,491	–	–	–
Волков А.В., Ляпунов С.В.	[41] 2002	1,5366	1,0126	0,5240	2,4
Захаренков М.Н. (энтропийное приближение) $N_\xi = 160, R_\infty = 20 R$ )		1,325	0,8755	0,4499	2,1–2,5
Захаренков М.Н. $R_\infty = 20 R, N_\xi = 160$		1,373	0,873	0,500	1,91
Захаренков М.Н. $R_\infty = 40 R, N_\xi = 640, \beta = 6$		1,435	0,919	0,516	2,17–2,2
Захаренков М.Н. $R_\infty = 40 R, N_\xi = 640, \beta = 8, t = 80$ (от $t = 60, \beta = 6$ )		1,601	1,078	0,523	2,03–2,17

Следует также отметить, что результаты зависят от того, насколько строго выполняется условие равномерности потока на входе в канал [14], заметное влияние на них оказывает также температура потока  $T_\infty$  [16]. Поэтому при численном моделировании столь заметные различия в результатах исследований, конечно же, не могут быть объяснены только влиянием классических схемных параметров (аппроксимацией, параметрами сеток и численными алгоритмами).

В разделе 1 настоящей работы представлены постановка задачи в переменных функция тока, завихренность, температура и давление для вязких несжимаемых двумерных течений и краткое описание численного алгоритма расчета полных уравнений Навье–Стокса. В разделе 2 проводится верификация расчетов. В разделе 3 представлены результаты расчетов обтекания неподвижного кругового цилиндра при зависимости вязкости от температуры. В разделе 4 рассматриваются макроэффекты, возникающие при учете зависимости вязкости от температуры, в задаче обтекания кругового цилиндра, совершающего вращательные колебания. В разделе 5 рассматривается энтропийное приближение обтекания тела несжимаемой вязкой средой в предположении, что ее вязкость зависит от температуры так, как это имеет место для воздуха. В разделе 6 обсуждаются результаты проведенного исследования и следуют выводы по представленному материалу численного эксперимента.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Задача формулируется в переменных функция тока  $\Psi$ , завихренность  $\Omega$ , температура  $T$ , давление  $p$ . Система уравнений в криволинейных ортогональных координатах  $\xi, \eta$ , полученных конформным отображением обтекаемого тела на круг (для кругового цилиндра  $\xi = \ln r, \eta = \varphi$ , где  $\varphi, r$  — полярные координаты), имеет следующий вид:

$$\Delta\Psi = H^2\Omega, \quad (1)$$

$$H^2 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\text{Re}} \nu \Delta\Omega + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + H^{-2} \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) + 4 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \right) \right) \right], \quad (2)$$

$$H^2 \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \nu \Delta T + \text{Ec} \frac{1}{\text{Re}} \Phi, \quad (3)$$

где  $H^2 = (x_\xi)^2 + (y_\xi)^2 = 1/(\xi_x^2 + \xi_y^2)$ , число Рейнольдса  $\text{Re} = Ul/v^*$ ,  $U$  — скорость невозмущенного потока,  $l$  — характерный линейный размер,  $v^*$  — коэффициент кинематической вязкости при температуре невозмущенного потока  $T_\infty$ ,  $\nu(T) = v/v^*$  — безразмерный коэффициент кинематической вязкости,  $T_S$  — температура стенки,  $T = (T - T_\infty)/(T_S - T_\infty)$  — безразмерная температура,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $\text{Ec}$  — число Эккерта,  $\Phi$  — диссипативная функция. Зависимость  $\nu(T)$  для воды и воздуха задается таблично [32] и аппроксимируется кубическим сплайном. В расчетах использовался характерный размер  $l = R$ . Для сравнения с результатами других авторов следует учесть, что часто используется  $l = D$  — диаметр цилиндра, и соответственно вводится обозначение  $\text{Re}_D$ . Функция тока  $\Psi$  и завихренность  $\Omega$  определены следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если ввести обозначения:

$$A_\Psi = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right) + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial H^2}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial H^2}{\partial \eta} \right) \frac{1}{H^2},$$

$$B_\Psi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial H^2}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial H^2}{\partial \xi} \right) \frac{1}{H^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$d_1 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \quad d_2 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right),$$

то уравнения переноса завихренности и переноса тепла можно записать в виде, подчеркивающим близость математических выражений диссипативной функции и членов в уравнении переноса завихренности, содержащих производные от коэффициента вязкости:

$$H^2 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\text{Re}} \nu \Delta\Omega + \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Re}} F,$$

$$H^2 \frac{dT}{dt} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} v \Delta T + Ec \frac{1}{Re} \Phi,$$

$$F = (4d_2^2 + d_1^2)(A_\Psi A_\nu + B_\Psi B_\nu),$$

$$\Phi = (4d_2^2 + d_1^2)(A_\Psi^2 + B_\Psi^2).$$

Операторы  $A_\nu$ ,  $B_\nu$  совпадают соответственно с операторами  $A_\Psi$ ,  $B_\Psi$ .

Решение этой системы уравнений с помощью численной схемы, разработанной ранее для случая  $v = \text{const}$ , обладает теми же характеристиками устойчивости и точности, если учесть требования, предъявляемые к аппроксимации уравнений с быстро меняющимися коэффициентами при старших производных [33].

Подчеркнем, что сохранение свойств устойчивости в большей степени подтверждается экспериментальным путем, потому что в ряде случаев возможна нелинейная счетная неустойчивость [6], которая в рассмотренных задачах не проявилась.

Метод решения полученной системы уравнений подробно описан, например, в работах [34, 35]. Уравнение Пуассона для функции тока решается с использованием разложения в тригонометрический полином (ряд Фурье) и быстрого преобразования Фурье [36]. Применяется схема с четвертым порядком аппроксимации [33]. Уравнения переноса завихренности и переноса тепла решаются методом переменных направлений [33]. Все вторые производные аппроксимируются центральными разностями. Первые производные от функции тока и коэффициента кинематической вязкости тоже аппроксимируются центральными разностями, а первые производные от завихренности и температуры — односторонними трехточечными следящими разностями. Схема имеет второй порядок аппроксимации. На поверхности цилиндра задаются граничные условия прилипания. Граничное условие для завихренности на поверхности цилиндра реализуется с помощью двухпараметрической формулы [37], содержащей оптимизирующий параметр Тарунина [38], и в случае граничных условий прилипания может быть записано в следующем виде:

$$\{H^2 E\} \Omega_S = h_\xi^{-2} \sum K_j \Psi_j + \frac{h_\xi (2h_\xi - \alpha)}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^3} \Big|_S$$

$$+ \frac{h_\xi^2 (6h_\xi - \beta)}{3!} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^4} + \dots$$
(4)

Выражения для  $E$ ,  $K_j$  приведены в [37]. В первых работах по исследованию влияния значений коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  на точность решения было показано, что коэффициент  $\alpha$  является свободным и влияет только на скорость итерационного процесса, используемого при определении завихренности на твердой стенке, а влияние  $\beta$  может быть значительным. Коэффициентом  $E$  регулируется скорость сходимости итерационного процесса по нахождению  $\Omega_S$  [37, 38]. Поэтому для расчета нестационарных течений около эллиптического цилиндра и других тел было рекомендовано использовать  $\beta = 6h_\xi$ , при котором достигается третий порядок аппроксимации по координате  $\xi$ .

На дальней границе расчетной области задаются условия равномерного потока, реализуемые при  $H^{-1} \partial \Psi / \partial \xi \Big|_{S_\infty} = \sin \eta$  и  $\partial \Omega / \partial \xi \Big|_{S_\infty} = 0$ . Начальные граничные

условия соответствуют традиционному подходу: старт движущегося тела в покоящейся жидкости, т. е. функция тока и завихренность равны нулю, изменение скорости происходит мгновенно.

Учет зависимости вязкости от температуры  $\nu(T)$  приводит к существенной особенности решения. Уравнения Навье–Стокса в форме Громеки–Ламба, которые используются для вычисления давления, в проекции на поверхность обтекаемого тела при граничных условиях прилипания имеют вид

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_S = -\frac{1}{\text{Re}} \nu(T) \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right|_S - \frac{1}{\text{Re}} \Omega_S \left. \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right|_S. \quad (5)$$

При различных граничных условиях для уравнения переноса тепла, когда  $\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_S \neq 0$ ,

имеем  $\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = \frac{\partial \nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \neq 0$  и из условия однозначности давления  $\oint_S \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_S d\eta = 0$  теперь

не следует  $\oint_S \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right|_S d\eta = 0$ . Поэтому функция  $\left. \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right|_S$  может потерять периодичность, а в интегральной оценке в общем случае имеем отличный от нуля поток завихренности от поверхности  $S$  в пограничный слой. Необходимо поэтому подчеркнуть, что при сохранении симметричной формы обтекания цилиндра, когда завихренность имеет разный знак при  $y > 0$  и  $y < 0$ , проблема вырождается,

т. е. всегда имеем  $\oint_S \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right|_S d\eta = 0$ .

Давление на поверхности цилиндра вычисляется из уравнения (5). Коэффициент давления определяется как

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2 R}.$$

Коэффициент сопротивления цилиндра  $C_x = X / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D$  состоит из двух частей:

$C_x = C_{xf} + C_{xp}$ . Здесь  $C_{xf}$  — коэффициент сопротивления, обусловленный вязким трением, и  $C_{xp}$  — коэффициент подъемной силы, обусловленный давлением:

$$C_{xf} = -\frac{\nu(T_S)}{2\text{Re}} \int_0^{2\pi} \Omega_S \sin \eta d\eta, \quad C_{xp} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_S \cos \eta d\eta.$$

Расчеты выполнялись по двум схемам: 1) для  $\Omega_S$  использовалась формула (4); 2) использовалась формула (4) и процедура предиктор-корректор [35], которая обеспечивает единственность давления.

Расчеты проводились на ЭВМ VAX-780 и приставке DEC2000@XP с применением графопостроителя Venson и комплекса графических программ “ГРАФОР” (Ин-т прикладной математики имени М.В. Келдыша).

## 2. ВЕРИФИКАЦИЯ РАСЧЕТОВ

Обтекание кругового цилиндра вязкой средой является классической тестовой задачей. Вместе с тем ее решение имеет важное практическое значение, в частности, для теплотехники [39], где распространены нагревательные элементы цилиндрического сечения и используются аэродинамические объекты типа различных зондов.

Стремление создать численную модель, применимую в задачах теплотехники, приводит к необходимости расчета тепловых полей, а как следствие — к учету зависимости вязкости среды от температуры. Такой алгоритм требует тестовой проверки, которая выполнена здесь сравнением результатов численного моделирования с классическими данными работы [40], а также с расчетами при числе Маха  $M = 0,1$  [41] и результатами, приведенными в табл. 1.

### 2.1. Выбор параметров численной модели

Число узлов сетки по циклической координате  $\eta$  равно 256, а по координате  $\xi$  — 160 и 640. По координате  $\xi$  производится дополнительное сжатие сетки к поверхности цилиндра по закону  $\xi = d \operatorname{tg}(\pi\theta/2)$ , где  $d = 0,5$  или  $0,25$ . Исследование сходимости численного решения (его зависимости от числа узлов по координатам  $\xi$  и  $\eta$ ) проведено при  $Re = 20$  ( $Re_D = 40$ ),  $R_\infty = 20 R$ . Были выполнены расчеты при  $N_\xi = 80, 160, 320$ ,  $N_\eta = 256$ ,  $d = 0,5$ ,  $T_\infty = 20$  °C,  $T_s = 21$  и  $30$  °C. Для  $N_\xi = 160$  и  $320$  расчетные значения коэффициента сопротивления  $C_x$ , распределения коэффициента давления  $C_p$  и завихренности на поверхности цилиндра  $\Omega_s$  близки. Поэтому при  $R_\infty = 20 R$  для серии расчетов выбрано  $N_\xi = 160$ . Однако исследование зависимости решения от значения  $R_\infty$  показывает, что эта зависимость велика, что совпадает с результатами эксперимента [17, 20]. Поэтому в настоящем исследовании, где первоначально принималось  $R_\infty = 20 R$  (что по миделю цилиндра близко соответствует  $h/D = 10$ ), проведена серия расчетов при  $R_\infty = 40 R$ , что соответствует рекомендациям, следующим из натурального эксперимента [20]. Учитывая, что сжатие сетки по координате  $\xi$  по избранному закону приводит к заметному разрежению сетки около дальней границы расчетной области, путем методического исследования была установлена необходимость выбора  $N_\xi = 640$ . Возможно использовать и меньшее число узлов расчетной сетки, но при более сложном законе сжатия сетки по  $\xi$ .

Проведены расчеты, где  $R_\infty = 40 R$ ,  $N_\xi = 640$  при  $T_\infty = 20$  °C,  $T_s = 21$  и  $30$  °C, которые дают значения коэффициента сопротивления и отношение длины отрывной зоны к диаметру цилиндра, необходимые для сравнения с расчетными и экспериментальными данными других авторов (см. табл. 1 и 4).

Надежность представляемых в настоящей работе результатов можно подтвердить их сравнением с данными исследований [26]. В настоящих расчетах при  $T_s = 21$  °C и  $\nu(T)$  для воды получено  $(u_{\text{след}})_{\min} = -9,43 \cdot 10^{-2}$  при  $x/R = 2,54$  ( $x/D = 1,27$ ),  $u_{\text{след}} = 0$  при  $x/R = 5,28 - 5,35$  ( $x/D = 2,66$ ; при этом  $L/D = 2,16$ , определенное по  $u_{\text{след}} = 0$ ), а в работе [26] —  $(u_{\text{след}})_{\min} = -9,48 \cdot 10^{-2}$  при  $x/R = 2,57$ ,  $u_{\text{след}} = 0,0007$  при  $x = 5,34$ . Подчеркнем, что такие характеристики в других исследованиях представляются крайне редко.

Таким образом, видно, что  $R_\infty = 40 R$ , соответствующее условиям натурального эксперимента [20], дает вполне достаточное удаление границы  $s_\infty$  от цилиндра для  $t < 200$ . Сравнение с теоретическим исследованием [26], в котором параметры  $R_\infty$  и  $N_\xi$  отсутствуют, оправдывает выбор  $N_\xi = 640$ .

Тем не менее расчеты, проведенные на более грубых сетках (но при экономичном по затрачиваемому времени счету), сохраняют свое значение (так же, как, например, результаты [17] в сравнении с [20]), так как они демонстрируют повторяемость тенденций в результатах при других различных параметрах (таких как  $T_s$ , граничные условия для температуры), влияющих на рассчитываемые величины, и показывают те же качественные зависимости решения от этих параметров.

Таблица 2

 $Re = 50 (Re_D = 100), T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}, T_s = 21 \text{ }^\circ\text{C}$ 

	$C_{xp}$	$C_{xf}$	$C_x$	$(L+R)/R$	$L/D$
Fornberg B. [40] $v = \text{const}$	–	–	1,060	12	5,5
Захаренков М.Н. $v = \text{const } t = 55$	0,728	0,267	0,995	10,6	4,8
Захаренков М.Н. $Pr(T), \nu(T) Ec = 0,8 t = 33,5$	0,626	0,401	1,077	8	3,5
Захаренков М.Н. $Pr = 7, Ec = 0,8 \nu(T), t = 30$	0,769	0,282	1,050	–	–
Захаренков М.Н. “–” $t = 40$	0,7552	0,276	1,028	9,3	4,15

В табл. 2 представлены данные расчетов из работы [40] и настоящей при  $Re = 50 (Re_D = 100)$ . Отметим хорошее совпадение результатов для  $C_x$ , однако значения  $(L+R)/R$  ( $L$  — длина зоны симметричного отрыва потока за цилиндром,  $R$  — радиус цилиндра) заметно отличаются. Последнее различие вполне объяснимо тем, что в работе [40] использовалась расчетная сетка с удалением дальней границы порядка  $100 R$ , а в настоящих расчетах граница удалена на  $20 R$ .

## 2.2 “ $\beta$ –эффект” и время установления течения

В табл. 3 представлены результаты настоящего исследования при  $Re = 20 (Re_D = 40)$ . Отдельно выделен параметр  $\beta$  аппроксимационной формулы для завихренности (4). Расчеты проведены для  $R_\infty = 40 R, N_\xi = 640, N_\eta = 256, d = 0,5, T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}, T_s = 21$  и  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Случай  $T_s = 21 \text{ }^\circ\text{C}$  при  $T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , конечно, ближе по физическим характеристикам к численным решениям изотермических течений  $T = \text{const}$ , представленным в табл. 1. Однако и при  $T_s = 21 \text{ }^\circ\text{C}, \beta = 6h_\xi$  полученное значение сопротивления  $C_x = 1,435\text{--}1,464$  относится к нижней границе значений (см. табл. 1), представленной результатами экспериментальных исследований в трубных установках [14, 16]. Одно из объяснений заметных различий результатов численного моделирования дает зависимость  $C_x$  от значения коэффициента  $\beta$  в (4) и времени установления течения. Действительно, в различных исследованиях используются формулы для  $\Omega_s$  (не параметрические), которые соответствуют различным значениям параметров  $\alpha, \beta$  в (4), например, известная формула Тома [42] соответствует  $\alpha = 3h_\xi, \beta = 7h_\xi$  [37]. Значение параметра  $\alpha$ , как известно из теоретического анализа, подтвержденного вычислительной практикой, не влияет на величину  $\Omega_s$  при соответствующей замене  $\partial^3\Psi/\partial y^3|_s$  на  $\partial\Omega/\partial y|_s$  [37], что необходимо для выполнения динамических граничных условий на твердой поверхности [1, 43, 44].

Если по достижении установления течения при  $\beta = 6h_\xi$ , которому соответствуют значения  $C_x$ , указанные в табл. 3, положить  $\beta = 8h_\xi$ , то происходит как бы вторичный переход к промежуточной стадии установления течения со скачком  $C_x$  к значению  $C_x = 1,6$ . Изменения в течении хорошо визуализируются линиями постоянных значений относительной функции тока  $\bar{\Psi} = \Psi(\beta = 6h_\xi) - \Psi(\beta = 8h_\xi)$ . Однако достаточно быстро во времени при  $\beta = 8h_\xi$  получается то же значение  $C_x$ , что и при  $\beta = 6h_\xi$ . Этот результат убедительно свидетельствует о корректности задания кинематических и динамических граничных условий на цилиндре.

Таблица 3

Re = 20 (Re<sub>D</sub> = 40), T<sub>∞</sub> = 20 °C (вода)

Захаренков М.Н.	C <sub>x</sub>	C <sub>зр</sub>	C <sub>xf</sub>	L/D
R <sub>∞</sub> = 20, N <sub>ξ</sub> = 160, β = 6h	1,373	0,873	0,500	1,91
R <sub>∞</sub> = 40, N <sub>ξ</sub> = 640, β = 6h <sub>ξ</sub>				2,0–2,1
t = 60	1,464	0,953	0,511	–
t = 85	1,435	0,919	0,516	–
R <sub>∞</sub> = 40, N <sub>ξ</sub> = 640, β = 8h <sub>ξ</sub>				2,03–2,17
(от t = 60 β = 8h <sub>ξ</sub> )				
t = 60	1,613	1,085	0,528	–
t = 80	1,601	1,078	0,523	–
t = 97	1,435	0,918	0,517	–
R <sub>∞</sub> = 40, N <sub>ξ</sub> = 640, β = 7h <sub>ξ</sub>				2,0–2,1
(от t = 80 β = 8h <sub>ξ</sub> )				
t = 82,81	1,599	1,076	0,523	–
t = 104,58	1,597	1,074	0,523	–
(CP) <sub>LE</sub> = 1,25–1,23 совпадает с A. Acrivos at all [20]–(CP) <sub>LE</sub> = 1,25				
(Ω <sub>s</sub> ) <sub>max</sub> = 5,95 ≈ 6,0 близко к Та Phuok Loc [27] (Ω <sub>s</sub> ) <sub>max</sub> = 6,2				

Как видно, при  $\beta \neq 6h_\xi$  значение  $C_x = 1,6$  практически совпадает с результатами работы [13], а отношение  $L/D = 2,1$  — с результатами исследования [14]. Другие результаты табл. 1 по  $C_x$  лежат примерно на 0,05 ниже, чем  $C_x = 1,61$ , и на столько же выше, чем  $C_x = 1,45$  для  $\beta = 6h_\xi$ , что отражает влияние параметров  $\beta$  и  $\alpha$  в (4), т. к. в отличие от настоящего исследования обычно не производится замена  $\partial^3\Psi/\partial y^3|_s$  на  $\partial\Omega/\partial y|_s$ . При  $\beta \neq 6h_\xi$  на результатах сказывается член  $\partial^4\Psi/\partial y^4|_s \approx \partial^2\Omega/\partial y^2|_s$ , чему физически может соответствовать, например, шероховатость поверхности цилиндра. По-видимому, “ $\beta$ -эффект” требует отдельного исследования во многих задачах из-за заслуживающего внимания скачка  $C_x$  при  $\beta = 6h_\xi$  и  $\beta \neq 6h_\xi$ , величина которого зависит от времени установления течения в численных расчетах, а значит, от времени проведения натурного эксперимента, а также методов визуализации течения.

Наконец, если не проводить процедуру коррекции решения по выполнению условия однозначности давления  $p$  на поверхности цилиндра  $S$  [35], то при  $t < 100$  можно получить два характерных значения  $C_x$ . Одно из них  $C_{x0} = 1,565$  определяется из (5), другое  $C_{x1} = 1,435$  ( $t = 85$ ) — интегрированием уравнений Громеки–Ламба от  $S$  к  $S_\infty$ . При применении процедуры [35] получаем  $C_x = C_{x1}$ . Из сравнения с результатами табл. 1 можно определить, что значение  $C_{x0}$  значительно ближе к результатам большинства исследователей, чем  $C_{x1}$ . Однако  $C_{x1}$  учитывает точность решения во всей его области, и в том числе особенности асимптотики решения около  $S_\infty$ . Поэтому следует принять во внимание, что возможен и другой путь коррекции решения, наряду с предложенным в [35], а именно, коррекция граничных условий на  $S_\infty$  как, например, в работе [31], с определением вклада источника, мощность которого задается или подбирается так, чтобы  $C_{x0}$  и  $C_{x1}$  совпадали, либо выполнялось соотношение  $C_x = 0,5(C_{x0} + C_{x1})$  с последующей процедурой [35] уже с неизменяемой мощностью источника. Если брать среднее  $\bar{C}_x = 0,5(C_{x0} + C_{x1})$ , то  $\bar{C}_x = 1,5$  близко к среднему значению табл. 1. Поэтому можно признать, что сравнение с результатами других исследователей удовлетворительное.

### 2.3. Граничные условия дальнего поля

Следует подчеркнуть, что в настоящих расчетах использовался большой период времени для установления течения, а шаг по времени выбирался так, чтобы отслеживать все подробности нестационарного течения, то есть  $\tau = 0,00125-0,0025$ . При этом до достижения значений  $C_{x0} = 1,565$ ,  $C_{x1} = 1,435$  были пройдены все состояния течения, соответствующие значениям  $C_x$  из табл. 1. Наконец, время установления течения в настоящих расчетах  $t^* > 80$ , что связано с переносом возмущений, вызванных наличием тела-цилиндра в потоке после начала движения, и при  $R_\infty = 40 R$  эти возмущения достигают  $S_\infty$  вниз по потоку за время, близкое к  $t = 80$  (обезразмеренное по  $R/U_\infty$ ). После этого формируется характерный профиль скорости в следе, на оси которого при  $t = 51, 64, 86, 109, 135, 149$  имеем  $u_{\text{след}}|_{S_\infty} = 0,83, 0,75, 0,70, 0,685, 0,683, 0,682$  соответственно. Таким образом при  $t = 109$  такая важная характеристика течения как  $u_{\text{след}}|_{S_\infty}$  практически устанавливается, и дефект скорости в следе реализуется естественным образом.

Особого внимания заслуживает дополнение постановки задачи в части задания граничных условий на удаленной границе расчетной области, где условия равномерного потока дополняются заданием асимптотики от источника, помещенного внутри цилиндра [31]. Эффект этого дополнения может оказаться сравним с влиянием параметра  $\alpha$  в (4), если не производить замены  $\partial^3\Psi/\partial y^3|_s$  на  $\partial\Omega/\partial y|_s$ . Необходимо, однако, еще раз подчеркнуть, что такая замена теоретически строго необходима одновременно с дальнейшим наложением дифференциальной связи  $\partial\Omega/\partial y|_s = -\text{Re } \partial p/\partial x|_s$  [35], что гарантирует выполнение динамических граничных условий [45].

Дополнительно граничные условия дальнего поля будут обсуждаться в разделе 6.

### 3. ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В табл. 4 представлены результаты расчетов работы [41] при  $M = 0,1$  и результаты настоящего исследования, проведенного при разных значениях температуры стенки  $T_S$  и граничных условиях для уравнения переноса тепла. Температура набегающего потока  $T_\infty$  принималась всегда равной  $20^\circ\text{C}$ . В некоторых строках таблицы приведены два значения отношения  $L/D$ , полученные по  $L$ , определенному из условия  $u_{\text{след}} = 0$ , и из условия замыкания нулевой линии тока (поскольку эта оценка имеет интервальное свойство, то приводится среднее значение).

Результаты расчета при  $\nu(T)$  для воды,  $T_S = 21^\circ\text{C}$ ,  $R_\infty = 40 R$ ,  $N_\xi = 640$ , дают хорошее совпадение  $L/D = 2,07-2,17$  с результатами эксперимента [14], в котором были достигнуты условия равномерного потока вверх по течению от цилиндра, и приближаются снизу к расчетным значениям многих авторов, результаты которых приведены в табл. 1. Линии тока, линии равной завихренности, распределения коэффициента давления  $C_p$  (взятого с обратным знаком) и завихренности  $\Omega_S$  по поверхности цилиндра (значения завихренности отнесены к ее максимальным и минимальным значениям) приведены на рис. 1, *a, b* и 2, *a, b* соответственно. Линии тока соотносятся со значениями  $\Psi_i = (i-1)\cdot 0,025-0,25$ ,  $i = 1, 2, \dots, 21$ , а линии равной завихренности соответствуют значениям  $\Omega_j = (j-1)\cdot 0,25-1,25$ ,  $j = 1, 2, \dots, 11$ ;  $\Omega_k = (k-1)\cdot 20-50$ ,  $k = 1, 6$ . Наблюдается небольшая несимметрия нулевой линии тока, определяющей границу зоны отрыва потока за цилиндром.

Таблица 4

Re = 20 (Re<sub>D</sub> = 40), T<sub>∞</sub> = 20 °C

	C <sub>сп</sub>	C <sub>сф</sub>	C <sub>х</sub>	L/D	М	
Ляпунов С.В., Волков А.В., [41]	1,0126	0,5240	1,5366	2,4	0,1	
Захаренков М.Н.			Жидкость-вода, Pr = 7, Ec = 0,8			
T <sub>S</sub> , t	b.c.	C <sub>сп</sub>	C <sub>сф</sub>	C <sub>х</sub>	L/D	М
21 °C, N <sub>ξ</sub> = 160 R <sub>∞</sub> = 20 R t = 40	T <sub>S</sub> = const	0,873	0,488	1,361	1,91	0,0
21 °C N <sub>ξ</sub> = 160 R <sub>∞</sub> = 20 R t = 67 t = 82	∂T/∂n = 0 T <sub>баз</sub> = 21°	0,8627 0,8624	0,4799 0,4791	1,343 1,341	1,91 1,91	0,0
30°C N <sub>ξ</sub> = 160 R <sub>∞</sub> = 20 R t = 57,6	T <sub>S</sub> = const	0,8280	0,4775	1,306	1,91	0,0
30 °C N <sub>ξ</sub> = 160 R <sub>∞</sub> = 20 R t = 76,5 t = 84,5	T <sub>S</sub> = const ∂T/∂n = 0	0,8414 0,8212	0,4200 0,4446	1,2614 1,2658	2,09 1,91	0,0
21 °C, N <sub>ξ</sub> = 640 R <sub>∞</sub> = 40 R t = 150	T <sub>S</sub> = const	0,9392	0,5152	1,4544	2,17, 2,21	0,0
30°C, N <sub>ξ</sub> = 640 R <sub>∞</sub> = 40 R t = 50 t = 172,5	T <sub>S</sub> = const	0,937 0,905	0,420 0,420	1,357 1,325	2., 2,1	0,0
Захаренков М.Н.			Среда-воздух, Pr = 0,7, Ec = 2,4			
30°C N <sub>ξ</sub> = 160 R <sub>∞</sub> = 20 R t = 18,52 t = 31,02	T <sub>S</sub> =const	0,9387 0,9053	0,5139 0,4929	1,4526 1,3982	1,91-2,0	0,0
30°C N <sub>ξ</sub> = 160 R <sub>∞</sub> = 20 R t = 68	T <sub>S</sub> =const ∂T/∂n = 0	0,8724	0,5004	1,3728	1,91	
21°C N <sub>ξ</sub> = 640 R <sub>∞</sub> = 40 R t = 184	T <sub>S</sub> =const	0,9185	0,5162	1,4348	2,17	
30°C N <sub>ξ</sub> = 640 R <sub>∞</sub> = 40 R t = 58	T <sub>S</sub> =const	0,9563	0,5343	1,491		

Захаренков М.Н.		Энтропийное приближение				
30°C $N_\xi = 160,$ $R_\infty = 20 R$	$T_S = \text{const}$	0,8755	0,4779	1,3534	2,5	0,0
30°C $N_\xi = 640,$ $R_\infty = 40 R$	$T_S = \text{const}$					
$t = 35$		0,9946	0,5451	1,540	2,03, 2,33	
$t = 58$		0,9512	0,5343	1,486	2,07, 2,33	
$t = 100$		0,9436	0,4936	1,437	2,17, 2,2	
$t = 146$		0,9286	0,5025	1,431	2,17	
21°C $N_\xi = 640,$ $R_\infty = 40 R$	$T_S = \text{const}$					
$t = 117$		0,9082	0,4874	1,3956	2,33	
$t = 139$		0,9096	0,5001	1,4097	2,13	
$t = 160$		0,9152	0,5017	1,4168	2,13	
$t = 258$		0,9189	0,5028	1,4217	2,04, 2,33	

Это связано с тем, что в процессе установления течения в окрестности точки замыкания нулевой линии тока течение остается нестационарным, и поэтому ее смыкание является только одним из моментов процесса установления. Те же самые характеристики течения для случая  $T_S = 30^\circ\text{C}$  и  $R_\infty = 20 R$ ,  $N_\xi = 160$  приведены на рис. 1, *c, d* и 2, *c, d* для воды, а на рис. 1, *e, f* и 2, *e, f* — для воздуха. Можно отметить практически полную идентичность картин линий тока и линий равной

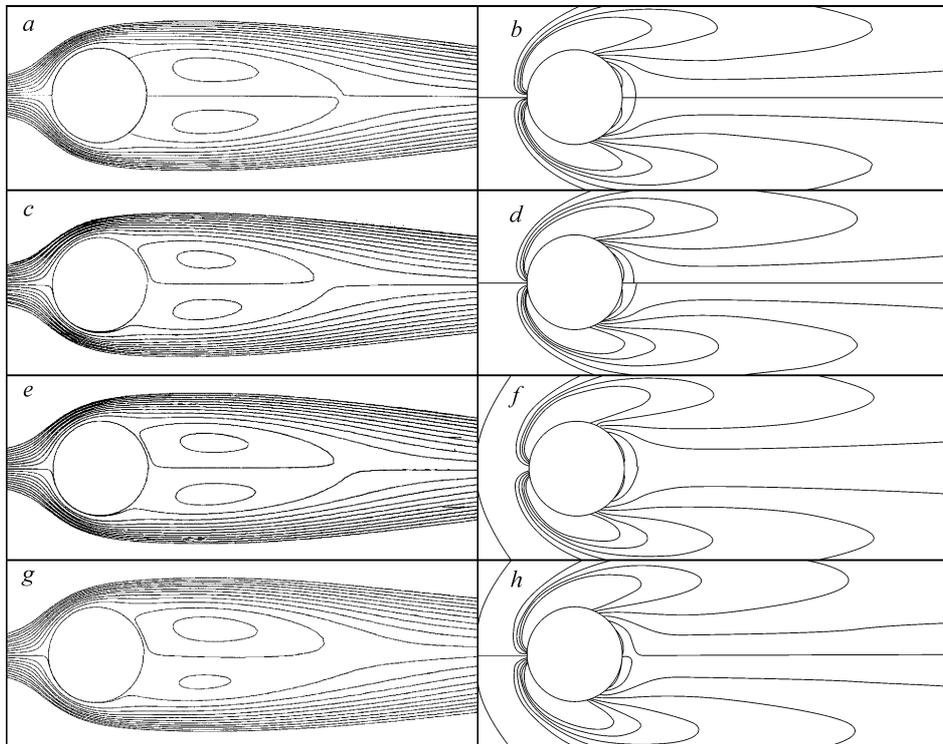


Рис. 1. *a, c, e, g* — линии тока  $\Psi_i = (i - 1) \cdot 0,025 - 0,25$ ,  $i = 1, 2, \dots, 21$ ; *b, d, f, h* — линии равной завихренности  $\Omega_j = (j - 1) \cdot 0,25 - 1,25$ ,  $j = 1, 2, \dots, 11$ ;  $\Omega_k = (k - 1) \cdot 20 - 50$ ,  $k = 1, 6$ .

завихренности для рассмотренных течений. Поэтому визуализация течения традиционными методами не позволяет заметить различий в следе за цилиндром при сильных изменениях физических параметров задачи, и, видимо, этот факт стал причиной широкого сравнения характеристик обтекания кругового цилиндра при использовании в натурном эксперименте разных сплошных сред: воды, воздуха, масла.

Выбор граничных условий для уравнения переноса тепла — отдельная задача, связанная, как правило, с целевой функцией прикладной направленности решения. Выделим отдельно граничные условия, называемые здесь условиями предельного теплового насыщения. Использование граничного условия  $\partial T/\partial n|_S = 0$  требует введения так называемой базовой температуры, например, задания температуры в передней точке торможения потока (это требуется по крайней мере для определения  $\nu(T)$ ). Можно предполагать, что после некоторого достаточно длительного периода развития течения одновременная реализация условий  $T_S = \text{const}$  и  $\partial T/\partial n|_S = 0$  будет характеризовать состояние предельного теплового насыщения цилиндра. Эта формулировка восходит к аналогичной проблеме постановки граничных условий для температуры в нестационарных течениях, предложенных в [33].

Отметим, что полученные значения  $C_{xp}$ ,  $C_{xf}$ ,  $C_x = C_{xp} + C_{xf}$  при  $Re = 20$  ( $Re_D = 20$ ) (см. табл. 4) заметно зависят от типа граничных условий и значения  $T_S$ . Именно для пояснения этого явления результаты для  $R_\infty = 20 R$  приводятся наряду с результатами для  $R_\infty = 40 R$ . Одновременно полезно сопоставить эти данные для сравнения влияния удаленности  $s_\infty$  от цилиндра в численном эксперименте и опытах [17, 20].

Весьма чувствительны к граничным условиям тепловые характеристики потока, в частности, среднее число Нуссельта, однако обсуждение этой проблемы выходит за рамки настоящей статьи.

Ряд выводов можно сделать, сравнивая  $C_{xp}$  и  $C_{xf}$ , когда в одном случае несжимаемая вязкая среда — вода, а в другом случае — воздух ( $R_\infty = 40 R$ ,  $N_\xi = 640$ ). Во-первых,  $C_{xp}$  при  $T_S = 21$  °C для воды больше чем для воздуха, а  $C_{xf}$  в обеих средах практически равны. При  $T_S = 30$  °C, наоборот, оба эти значения для воды меньше, чем для воздуха. В то же время  $C_{xp}$ ,  $C_{xf}$  и  $C_x$  для воды при  $T_S = 21$  °C ближе к тем же значениям для воздуха при  $T_S = 21$  и 30 °C, чем для воды при  $T_S = 30$  °C. Это связано, конечно, с тем, что относительное изменение вязкости воды в интервале  $T_S = 21$ –30 °C больше, чем относительное изменение вязкости воздуха в том же интервале температур. Таким образом, температура поверхности цилиндра является существенным параметром численного эксперимента и должна быть объектом контроля в натуральных экспериментах. Из этого следует, в частности, что использование искусственного нагревания поверхности обтекаемого тела при визуализации течения может вносить изменения в его наблюдаемую структуру. Во-вторых, для воды и воздуха значение  $C_x$  зависит от рассмотренных граничных условий ( $R_\infty = 20 R$ ,  $N_\xi = 160$ ). В-третьих, можно выделить такие ситуации (наблюдаемые в процессе установления обтекания цилиндра, которое исследуется как нестационарное течение), в которых на промежуточной стадии установления течения  $C_x$  и  $L/D$  для воды и для воздуха совпадают, однако  $C_{xp}$  и  $C_{xf}$  заметно отличаются. Это может иметь важное значение в решении задач теплотехники (где как раз и существуют как установившийся тип обтекания, так и переходные стадии течения), а также задач оптимизации формы тела с целью снижения сопротив-

ления. В-четвертых, при увеличении температуры  $T_s$  от 21 до 30 °С в воде происходит уменьшение  $C_x$  (от 1,450 до 1,33), а в воздухе — увеличение  $C_x$  (от 1,43 до 1,49). Это полностью соответствует тенденции изменения  $\nu$  воды и воздуха при увеличении температуры.

Так же важно покомпонентное, т. е. по  $C_{xp}$  и  $C_{xf}$ , сравнение результатов расчетов для несжимаемой среды: воды, воздуха и газа при  $M = 0,1$ . Согласно [41], при  $M = 0,1$  имеем  $C_x = 1,5366$ ,  $C_{xp} = 1,0126$ ,  $C_{xf} = 0,5240$ . В расчетах при  $N_\xi = 640$  и  $R_\infty = 40 R$  для  $T_s = 30$  °С,  $T_\infty = 20$  °С получено для воды  $C_x = 1,357$ ,  $C_{xp} = 0,937$ ,  $C_{xf} = 0,420$  (время установления  $t = 50$ ), а для воздуха —  $C_x = 1,491$ ,  $C_{xp} = 0,9563$ ,  $C_{xf} = 0,5343$  (время установления  $t = 58$ ). Однако расчеты при  $N_\xi = 640$  и  $R_\infty = 40 R$  для  $T_s = 21$  °С,  $T_\infty = 20$  °С дают для воды  $C_x = 1,453$ ,  $C_{xp} = 0,9355$ ,  $C_{xf} = 0,5176$  (время установления  $t = 70$ ), а для воздуха —  $C_x = 1,4148$ ,  $C_{xp} = 0,9147$ ,  $C_{xf} = 0,5001$  (время установления  $t = 200$ ). Результатам расчета для газа при  $M = 0,1$  больше соответствуют расчетные данные для несжимаемой среды с зависимостями  $\nu(T)$  для воздуха при  $T_s = 30$  °С и воды при  $T_s = 21$  °С (значение  $T_s$  для расчета при  $M = 0,1$  не предоставлено). Поэтому следует еще раз повторить, что при сравнении результатов расчетов и натуральных экспериментов для сжимаемых сред при малых значениях числа Маха с аналогичными характеристиками, полученными для несжимаемых сред, температура поверхности обтекаемого тела (и конечно  $T_\infty$ ) является принципиальным параметром подобия. На настоящем этапе исследования особое внимание привлекает тот факт, что отношения  $L/D = 1,91-2,1$  при  $R_\infty = 20 R$ ,  $N_\xi = 160$  и  $L/D = 2,17$  при  $R_\infty = 40 R$ ,  $N_\xi = 640$ ,  $T_s = 21$  °С заметно отличаются от значения 2,4, полученного при  $M = 0,1$  [41].

Наконец, можно оценить влияние последнего члена в (5) для таких сред как вода и воздух. Пусть стенка цилиндра нагрета до температуры больше чем  $T_\infty$  ( $N_\xi = 160$ ,  $R_\infty = 40 R$ ). Тогда в донной части будет  $\partial T \partial \xi|_S < 0$ . При понижении температуры вязкость воды увеличивается, следовательно,  $\partial \nu \partial T|_S > 0$ , а воздуха — наоборот, уменьшается и  $\partial \nu \partial T|_S < 0$ . Учитывая, что в верхней полуплоскости в области вторичного отрыва в донной части цилиндра  $\Omega_S < 0$  (как для воды, так и для воздуха), получаем, что для воды последний член в (5) приводит к уменьшению  $\partial p \partial \eta|_S$ , а для воздуха — к его увеличению. Вне области вторичного отрыва  $\Omega_S > 0$  и поэтому  $\partial p \partial \eta|_S$  для воды растет, а для воздуха падает. Контроль поведения  $C_p$  в донной части поверхности цилиндра удобно вести для абсциссы  $x = 0,8$ . Максимум давления ( $C_p$ ) достигается в передней критической точке, его минимум — близко к миделю цилиндра, и дальнейшее повышение давления в донной части поверхности цилиндра для воды происходит быстрее, чем для воздуха, рис. 2, с, е. Соответственно  $C_{xp}$  для воды уменьшается быстрее, чем  $C_{xp}$  — для воздуха. Учет члена  $\Omega \partial \nu \partial \xi|_S$  в интеграле для вычисления давления в (5) дает для воды при  $T_\infty = 20$  °С,  $T_s = 21$  °С,  $Re = 20$  (40) поправку в  $C_{xp} \cong 0,008$  в сторону уменьшения, что существенно для точности решения. При большей разнице температур  $T_\infty$  и  $T_s$  эта поправка еще больше.

Достаточно интересно развитие температурного следа за цилиндром при  $Re_D = 40$ ,  $T_s = 21$  °С и  $T_\infty = 20$  °С. В момент времени  $t = 211,05$  для воздуха на  $S_\infty$  — температура следа  $T_{\text{след}}|_{j=257} = 0,329$  (на оси следа),  $T_{\text{след}}|_{j=256} = 0,311$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=255} = 0,263$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=254} = 0,197$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=253} = 0,132$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=252} = 8 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=251} = 4,3 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=250} = 2,17 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=249} = 1,01 \cdot 10^{-2}$  (а также для  $t = 226,56$

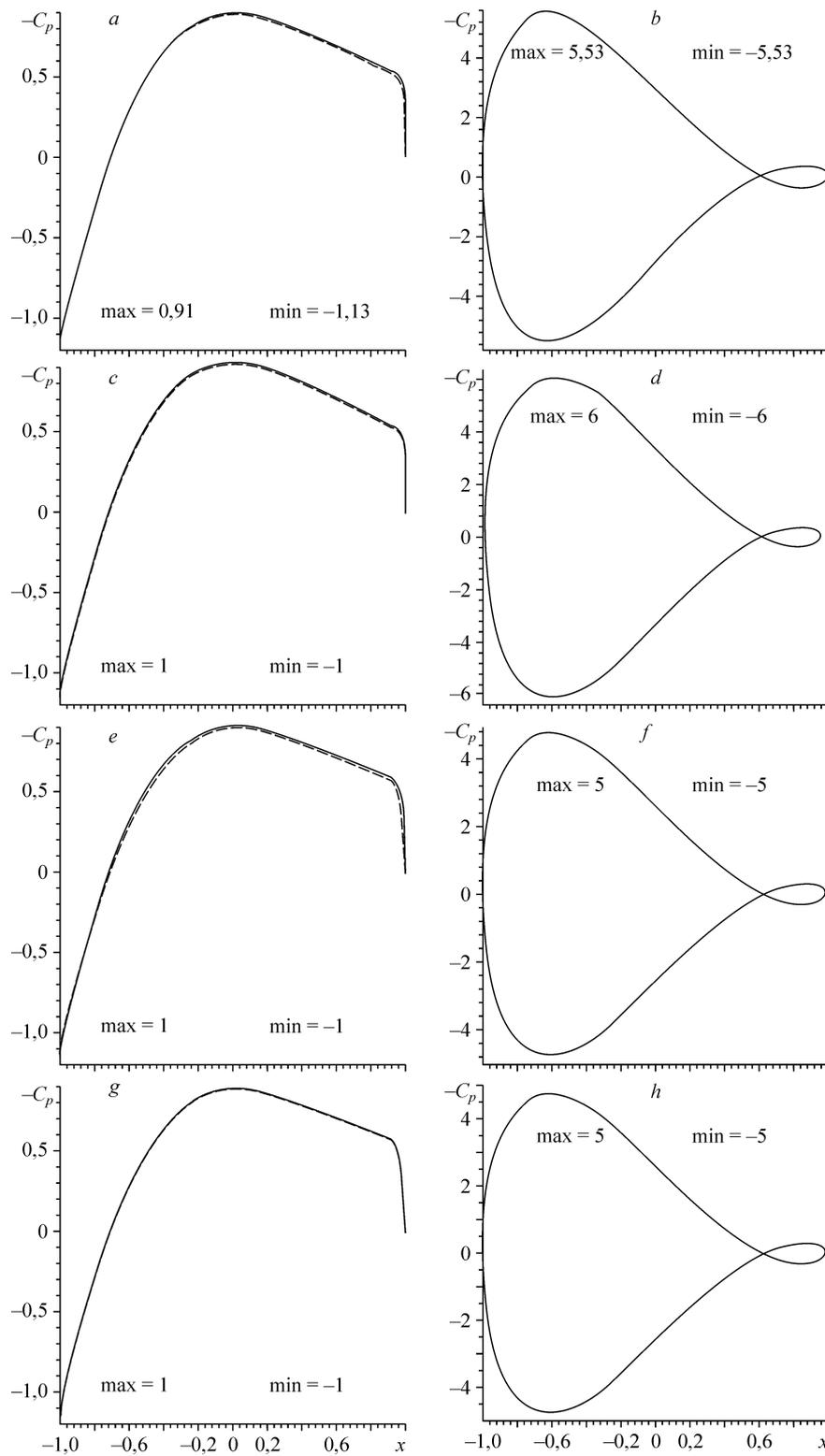


Рис. 2. *a, c, e, g* — распределение коэффициента давления  $C_p = (p-p_\infty)/(2\rho U^2)$ ; *b, d, f, h* — распределение завихренности  $\Omega \zeta$  по поверхности цилиндра.

имеем  $T_{\text{следа}}|_{j=257} = 0,329$ , то есть на оси следа температура практически установилась). С учетом зависимости вязкости воды от температуры при  $t = 219,31$  на  $S_{\infty}$  имеем  $T_{\text{след}}|_{j=257} = 0,317$  (на оси следа),  $T_{\text{след}}|_{j=256} = 0,193$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=255} = 8,1 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=254} = 2,90 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=253} = 9,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_{\text{след}}|_{j=252} = 3,03 \cdot 10^{-3}$ . Из сравнения  $T_{\text{след}}|_{S_{\infty}}$  для воздуха и воды следует, что  $T_{\text{след}}|_{S_{\infty}}$  на оси следа близки и равны 0,329 и 0,317 соответственно, а толщина теплового следа для воздуха примерно в два раза больше чем для воды. В то же время  $u_{\text{след}}|_{S_{\infty}}$  на оси симметрии в обоих случаях практически совпадают и равны  $0,68 U_{\infty}$ .

#### 4. МАКРОЭФФЕКТЫ ВЛИЯНИЯ $\nu(T)$

В предыдущем разделе исследовалось обтекание неподвижного цилиндра. Показано, что изменения топологии обтекания в зависимости от  $T_s$  и удаления  $s_{\infty}$  малозаметны, и для их выявления, например, в натурном эксперименте, требуется большое искусство. Для того, чтобы лучше прояснить влияния температурного фактора, рассматриваемого как зависимость вязкости от температуры, и удаленности дальней границы расчетной области  $S_{\infty}$ , рассмотрим обтекание цилиндра в задаче Танеды: круговой цилиндр совершает вращательные колебания в равномерном потоке по закону  $W = 0,5A \sin(\omega(t - t_0))$ , где  $\omega = 2\pi k$ , приведенная частота  $k = R/U_{\infty} T_k = 3$ ,  $T_k$  — период колебаний.

Проведем уточнение результатов, представленных в [12, 47]. Необходимость этого связана с тем, что выявленная ранее симметризация течения в следе при  $Re = 30$ ,  $T_{\infty} = 20$  °C,  $T_s \geq 40$  °C, амплитуде колебаний  $A = \pi/4$ , приведенной частоте  $K = 3$  характеризовалась выходом симметрично расположенных отрывных вихрей на дальнюю границу расчетной области  $S_{\infty}$ , которая была удалена на 10 радиусов цилиндра при  $N_{\xi} = 160$ . Линии равных значений завихренности приведены на рис. 3, *a, b* для  $T_s = 40$  °C.

Малая удаленность  $S_{\infty}$  может оказать дополнительное стабилизирующее действие и тем самым исказить принципиально суть полученного результата. Поэтому были проведены расчеты, где  $S_{\infty}$  удалена на 20 радиусов цилиндра, при этом, естественно, вдвое увеличено число узлов по координате  $\xi$ :  $N_{\xi} = 320$ ,  $N_{\eta} = 256$ . Остальные параметры задачи не менялись.

Результаты расчетов подтвердили в целом результаты работ [12, 47]. Действительно, при  $T_s \geq 40$  °C наблюдается стабилизация течения в ближнем следе. При этом существует зависимость уровня стабилизации и ее длительности от  $T_s$ . Для  $T_s = 40$  °C линии равных значений завихренности для разных моментов времени приведены на рис. 3, *c, d, g, i*. Линии равных значений температуры (изотермы) для тех же моментов времени приведены на рис. 3, *d, f, h, j*. Можно утверждать, что концентрация сильно нагретой жидкости в присоединенном кольцевом слое формирует устойчивое тепловое поле в донной части течения за цилиндром, которое играет здесь роль стабилизатора течения. Дополнением к этому выводу служит тот факт, что течение в среднем и дальнем следе снова становится несимметричным со слабо выраженной вихревой дорожкой Кармана. Слабая выраженность здесь понимается в том смысле, что частота вихрей в этой дорожке значительно ниже, чем в вихревой дорожке, образующейся непосредственно за цилиндром (вихревые дорожки Кармана и Голубева). Полученный тип обтекания найден устойчивым, т. е. нестационарность течения в средней части следа не приводит за просчитанный период времени  $t = 100$  к разрушению симметричной формы ближнего

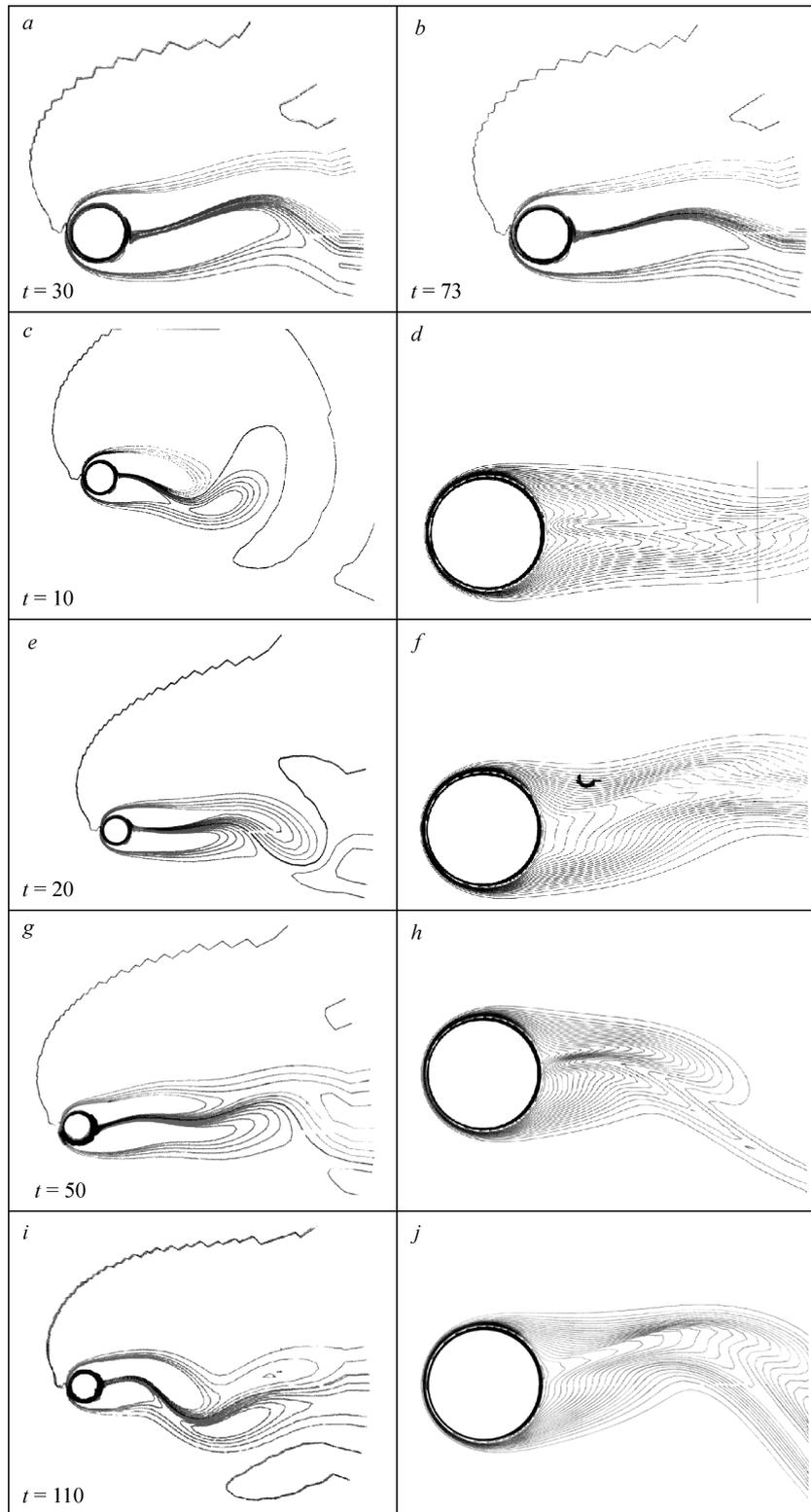


Рис. 3. *a, b* — линии равных значений завихренности для  $T_s = 40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $N\xi = 160$ ; *c, e, g, i* — линии равных значений завихренности для  $T_s = 40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $N\xi = 320$ ; *d, f, h, j* — линии равных значений температуры для  $T_s = 40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $N\xi = 320$ .

следа. Отметим, что ранее [48] при изучении обтекания профиля при  $v = \text{const}$  был получен обратный результат: вихреобразование, начинавшееся в средней части следа за профилем, приводило к развитию отрывного обтекания самого профиля.

Вторая проблема, которая была поставлена в задаче обтекания цилиндра, связана с важной теоретической: при  $v(T)$  в уравнении переноса завихренности появляются члены, которые могут приводить к генерации завихренности, если даже начальное поле течения безвихревое, но имеется  $\bar{\nabla}T \neq 0$ . Эта проблема сложна тем, что при ее решении возникает вопрос о выполнении интегрального закона сохранения завихренности [49, 50], являющегося следствием уравнения  $\Delta\Psi = \Omega$  и тесно связанным с граничным условием для  $\partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty}$ :

$$\iint_D \Omega dx dy = \oint_{S_\infty} \partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty} ds.$$

Естественным путем решения этой задачи является построение функции Грина и учет индуктивного влияния порождаемой завихренности на поле скоростей на  $S_\infty$ . Однако предварительное исследование показало, что прямое применение этой процедуры легко приводит к потере сходимости решения. Принципиальная важность этой проблемы состоит в том, что при заданных граничных условиях на  $S_\infty$  жесткого типа (задано  $\partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty}$ ) и действии интегрального закона сохранения завихренности в случае  $\oint_{S_\infty} \partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty} ds = 0$ , порождение завихренности одного

знака означает эквивалентное в интегральной оценке производство завихренности другого знака. Тем не менее следует предполагать и другой ход физического процесса: генерация завихренности одного знака идет без соответствующего воспроизводства завихренности другого знака и сопровождается индуктивным изменением поля скоростей на  $S_\infty$ , а следовательно и граничных условий для  $\partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty}$ , используемых при решении уравнения Пуассона.

Безусловно, оба эти механизма возможны и приводят к различному результирующему течению. Эта задача находится в стадии исследования. В частности, был исследован вход теплового пятна в расчетную область через границу  $S_\infty$  вверх по потоку. В условиях неизменности граничных условий для  $\partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty}$  (равномерный поток) этот процесс порождает формирование сопутствующего вихредиполя малой интенсивности. Однако нельзя отрицать возможность порождения сопутствующего вихря, что должно определяться не предписанными граничными условиями для  $\partial\Psi/\partial\xi|_{S_\infty}$ , а структурой теплового пятна и физикой процесса. Существенно, что в данной постановке задачи, в условиях действия интегрального закона сохранения завихренности и предписанных граничных условий на порождение вихря в потенциальной части течения, что сопровождается генерацией завихренности определенного знака, должна быть “затребована” часть завихренности из отрывного течения около цилиндра того же знака. Здесь количество завихренности этого знака должно уменьшиться, или на поверхности должна произойти генерация завихренности другого знака, компенсирующая завихренность теплового пятна. Порождение завихренности на поверхности цилиндра гораздо более мощный физический процесс, чем вихретепловая генерация в потенциальной части потока. Поэтому развитие вихря в области теплового пятна подавляется и, как следствие, формируется вихредиполь. Математическое моделирование процесса генерации вихря требует задания асимптотики от свободного вихря с заранее неизвестной циркуляцией и положением центра вихря. Таким образом, приведенный пример показывает направления уточнения постановки задачи в целом, выбор

которых без предварительного анализа затруднителен. Исследования в этом направлении будут продолжены, при этом перспективным представляется применение метода декомпозиции по областям [51].

##### 5. ЭНТРОПИЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДОЙ С ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ ВОЗДУХА

При учете сжимаемости постановка задачи обтекания тела вязкой средой, конечно, существенно отличается для газа и для жидкости. При учете зависимости вязкости, теплопроводности от температуры эти зависимости также подлежат обязательному включению в постановку задачи [32].

Для несжимаемой жидкости имеем:

$$De = cDT, \quad Di = cDT + \frac{1}{\rho}D\rho,$$

где  $e$  — внутренняя энергия,  $i$  — энтальпия,  $\rho$  — плотность.

Для идеального газа:

$$De = c_vDT,$$

$$Di = c_pDT,$$

$$p = \rho RT,$$

где  $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

В работах [32, 52, 53] отмечается: “Несжимаемая жидкость не может рассматриваться как предельный случай идеального газа”. В принципе, следуя этому замечанию, можно предположить, что случай несжимаемой вязкой среды с зависимостью  $\nu(T)$  для воздуха и  $M \ll 1$  ( $M = 0$ ) еще не полностью определен как предельный случай идеального газа. Должны присутствовать некоторые другие отличия от несжимаемой жидкости (воды) и остается единственная возможность искать их в уравнениях системы. Тем не менее в работе [52] этих различий для системы уравнений пограничного слоя для несжимаемой среды не найти. Сохраняется различие значений чисел Прандтля и Эккерта (для воздуха и воды), но оно касается физических величин, которые по сути не связаны с замечанием, процитированным выше. Поэтому ясно, что здесь проявляются некоторые внутренние противоречия теории, что, однако, не означает, что они существенны для конечных результатов. Таких оценок, возможно, не производилось. Суть такого противоречия состоит в последовательности выполнения предельного перехода при  $\rho \rightarrow \text{const}$  и, соответственно, в уравнении неразрывности по члену  $\partial\rho/\partial t$ . Особенность этого перехода заключается в том, что при сколь угодно малой сжимаемости, т. е.  $\partial\rho/\partial t \neq 0$ , всегда имеем в правой части уравнения переноса тепла член  $Dp/Dt$  (см. уравнение (12.11) в работе [32] на стр. 256). Перед этим членом при обезразмеривании появляется коэффициент — число  $Ec$ .

Однако если предельный переход производить далее, считая, что для  $\rho \approx \text{const}$  сохраняется  $p \approx \rho RT$ , то получаем  $\frac{Dp}{Dt} = \rho R \frac{DT}{Dt}$ , и после некоторых преобразований приходим к тому же уравнению (12.13) в [32], которое одинаково справедливо как для жидкости, так и для “несжимаемого” газа. Затруднение состоит в том, что связь  $p = AT$ , где  $A = \text{const}$ , не выполняется для несжимаемой среды. Здесь  $T$  может

существенно меняться, например, следуя собственным граничным условиям для  $T_S$  на стенке в уравнении переноса тепла, а давление  $p$  независимо определяется динамическими факторами, реологическим законом вязкой среды, связывающим давление со сдвиговыми напряжениями и т. д. Поэтому выполненный таким образом предельный переход нельзя признать строгим во всех смыслах. Конечно, было бы полезно, например, в численном эксперименте, оценить влияние на решение члена  $Dp/Dt$  при  $\rho = \text{const}$ .

Исходя из этого, проведен численный эксперимент, в котором член  $Dp/Dt$  сохранен в уравнении переноса тепла. Принято, что  $De = c_v DT$  для идеального газа и  $De = cDT$  для несжимаемой среды, кроме того, при  $\rho \rightarrow \text{const}$   $c_v$  стремится к  $c$ , не испытывая каких-либо особенностей. Но поскольку берется зависимость  $\nu(T)$  из таблицы, полученной натурным экспериментом, то соответственно этой зависимости задаются и взаимозависимости термодинамических потенциалов. Поэтому используется выражение “энтропийное приближение”. В рамках этого приближения уравнение переноса тепла имеет вид

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \Delta T + Ec \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + Ec \frac{1}{Re} \Phi \quad (4.1)$$

(см. уравнение (12.316) в [32]). Следует еще раз подчеркнуть, что число  $Ec$  определяется физическими величинами/константами, не связанными с плотностью среды  $\rho$ .

Стоит отметить также тот факт, что в обоснование проведения численного эксперимента с использованием уравнения переноса тепла для “несжимаемого” газа в виде (4.1) и для сравнения полученных данных с результатами расчетов сжимаемого газа при  $M = 0,1$  разумно сохранить член  $Dp/Dt$ , который при  $M = 0,1$  обязательно присутствует, и оценить, какие изменения в решении это повлечет. Такой подход — приближение Буссинеска — широко и успешно используется, например, в исследованиях обтекания тел стратифицированной (по плотности и солёности) жидкостью [2, 3], где жидкость считается несжимаемой, но одновременно присутствует стратификация по плотности (возмущения плотности), и именно она играет ключевую роль. Так и в рамках энтропийного приближения можно принять, что среда — несжимаемая, но присутствуют возмущения плотности, которые учитываются только в уравнении переноса тепла.

Расчеты проведены для задачи обтекания неподвижного кругового цилиндра при  $Re = 20$  ( $Re_D = 40$ ),  $T_S = 30$  °C,  $T_\infty = 20$  °C. Для  $N_\xi = 160$ ,  $R_\infty = 20 R$  — линии тока  $\Psi_i = (i - 1) \cdot 0,025 - 0,25$ ,  $i = 1, 2, \dots, 21$ ; линии равных значений завихренности  $\Omega_j = (j - 1) \cdot 0,25 - 1,25$ ,  $j = 1, 2, \dots, 10$ ;  $\Omega_k = (k - 1) \cdot 20 - 50$ ,  $k = 1$  приведены на рис. 1,  $g, h$  соответственно. На рис. 2,  $g, h$  показаны распределения коэффициента давления  $C_p = (p - p_\infty) / 0,5 \rho U_\infty^2$  и распределение завихренности по поверхности цилиндра. Значения  $C_{xp}$ ,  $C_{xf}$  и  $L/D$  приведены в табл. 4. Видно, что  $C_{xf}$  в энтропийном приближении отличаются от  $C_{xf}$  в классической постановке задачи на величину порядка 0,01–0,02 ( $C_{xf} = 0,516$  — классическая постановка,  $C_{xf} = 0,501$  — энтропийное приближение при  $T_S = 30$  °C,  $N_\xi = 640$ ,  $R_\infty = 40 R$ ). Эти различия можно признать несущественными, поскольку они наблюдаются, например, при использовании разных численных алгоритмов в рамках классической постановки задачи и, конечно, при разных граничных условиях для температуры на поверхности цилиндра. Наиболее заметное различие имеем для величины  $L/D$ , максимум

которой при  $N_\xi = 160$ ,  $R_\infty = 20 R$  теперь равен 2,5 ( $L/D = 1,91$  — классическая постановка). При  $N_\xi = 640$ ,  $R_\infty = 40 R$  максимум  $L/D$  равен 2,3, а минимум — 2,1. Очень существенно, однако, то, что близкое значение  $L/D = 2,4$  определяется в расчетах сжимаемого газа при  $M = 0,1$  (см. табл. 4). Таким образом, можно сделать вывод, что, например, в задаче обтекания кругового цилиндра, где член  $Dp/Dt$  действительно не имеет резко выраженных локальных экстремумов, часто характеризующих особенности, проведенный численный эксперимент не дает существенных отличий в интегральных характеристиках по сравнению с классической постановкой задачи. Тем не менее сближение значения  $L/D$  с приближением по  $M \ll 1$  ( $M = 0,1$ ) сжимаемого газа показывает, что к этой проблеме сохраняется научный, а в тех задачах, где отношение  $L/D$  важно, и практический интерес. Следует ожидать, что при изучении переходной стадии течения от симметричной формы к существенно нестационарной, роль применения энтропийного приближения будет возрастать.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Влияние температурного фактора дополнительного обсуждения не требует, поскольку результаты расчетов подтверждают предполагаемую тенденцию изменения характеристик течения для воды и воздуха. Влияние зависимости вязкости от температуры формулируется поэтому в разделе “выводы” как результат исследования.

Крайне важный вопрос — может ли уже при  $Re_D = 40$  идти речь о нестационарном течении в окрестности смыкания нулевой линии тока, которая определяет размер отрывной области за цилиндром и, в частности, значение  $L$ ? Следуя асимптотической теории отрывных течений [54], область смыкания отрывной зоны за цилиндром обладает той особенностью, что течение в ее окрестности может быть нестационарным. При этом: “Детали течения в области смыкания следа не оказывают влияния на все поле течения” [54]. Анализ показывает, “что при  $Re \rightarrow \infty$  возможно возникновение нестационарности течения не вследствие его гидродинамической неустойчивости, а по причине отсутствия стационарных решений при достижении некоторого достаточно большого числа Рейнольдса”. Это общий результат асимптотической теории, не связанный с конкретной моделью отрывного обтекания цилиндра. Если учесть что  $Re_D = 40$  является околочритическим числом Рейнольдса и при  $Re_D > 40$  возникает, как правило, нестационарное течение с вихревой дорожкой Кармана, то вполне возможно, что уже  $Re_D = 40$  является тем “достаточно большим числом Рейнольдса”, когда в области смыкания нулевой линии тока при  $x \rightarrow L$  нет стационарного решения.

В многочисленных расчетах автора получено, что при  $Re_D = 40$  и для воды и для воздуха численное решение в области смыкания нулевой линии тока нестационарно, смыкание происходит то в верхней полуплоскости, то в нижней, что гораздо труднее оценить по вихревому полю — линиям равной завихренности (см. рис. 1). При учете сжимаемости в рамках энтропийного приближения длина области отрыва колеблется в пределах  $L = 2,1-2,5$ , а без учета сжимаемости — в пределах  $L = 1,9-2,17$ . Если учесть это обстоятельство, то становится понятным разброс значений отношения  $L/D$  в результатах различных авторов, который лежит именно в этих пределах, то есть вариация значений  $L/D$  равна 0,1–0,4. Вариация значений сопротивления цилиндра, возможно, имеет другую причину (напомним результат теории асимптотических решений “Детали течения в области смыкания следа не оказывают влияния на все поле течения”), которая связана

с диффузией вязких напряжений — диффузией завихренности от поверхности цилиндра.

Необходимо сделать ряд замечаний по задаче определения длины рециркуляционной области  $L$  и, соответственно, отношения  $L/D$ . Результаты расчетов, например, в энтропийном приближении с использованием  $\nu(T)$  для воздуха при  $T_S = 30$  °С, позволяют определить положение точки  $x_0$  на оси следа, где  $u = 0$ :  $x_0 = 5,31$ . В то же время точка перемены знака  $\Psi$  на оси следа близка к  $x_1 = 5,66$  и лежит в некотором интервале  $x_1 \in (5,2, 5,8)$ . Точка  $x_1$  расположена заметно дальше вниз по течению, чем  $x_0$ , а ее принадлежность некоторому интервалу как раз соответствует локальной нестационарности течения в области смыкания рециркуляционной зоны. Например, на рис. 4 приведены линии тока  $\Psi_i = (i-1) \cdot 0,025 - 0,25$ ,  $i = 1, 2, \dots, 21$  в течении при  $T_S = 21$  °С,  $N_\xi = 640$ ,  $R_\infty = 40 R$  в разные моменты времени: для воды  $t = 175,77$  (a), 188,78 (b), 211,30 (c) и для воздуха  $t = 105,98$  (d), 144,49 (e), 157,50 (f). Подчеркнем, что в некоторые моменты развития локального нестационарного течения в области смыкания становится невозможно строго определить  $x_1$ , т. к. нулевые линии тока в верхней и нижней полуплоскостях несмыкаясь уходят далеко вниз по течению (см. рис. 4, c), из-за прохождения длинной волны поперечной скорости. В этом случае остается принять, что замыкание рециркуляционной зоны происходит в точке  $x_0 \cong 5,31$  ( $L/D = 2,16$ ), где  $u_{\text{след}} = 0$ , сохраняя при этом как ориентир для сравнения с другими результатами и интервальную оценку отношения  $L/D = 2,1-2,5$ , полученного для точки смыкания линии тока  $\Psi = 0$ .

Аналогичный вывод можно сделать из анализа экспериментальных результатов [29]: отношение  $L/D = 2,2$  (что соответствует  $x_1 = 5,4$ ), а точка перемены знака  $u_{\text{след}}$  (в момент времени  $t = 21$ ) имеет абсциссу  $x_0 = 5,0$  (напомним  $x = x'/R$  и отсчитывается от оси цилиндра, поэтому  $L/D = 2,0$ ). Как отмечается в работе [29], по

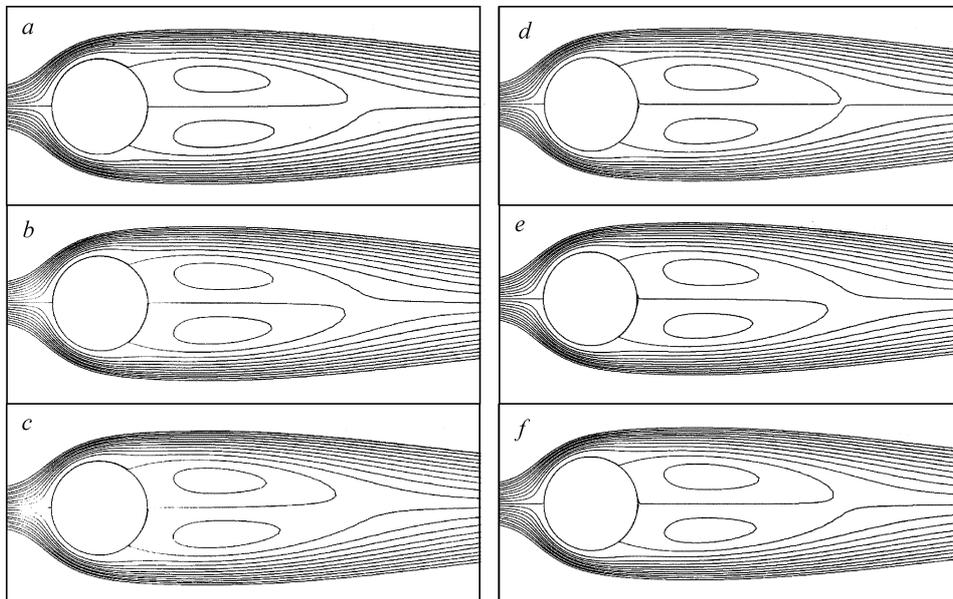


Рис. 4. Линии тока  $\Psi_i = (i-1) \cdot 0,025 - 0,25$ ,  $i = 1, 2, \dots, 21$  в течении при  $T_S = 21$  °С,  $N_\xi = 620$ ,  $R_\infty = 40 R$  в разные моменты времени: для воды  $t = 175,77$  (a), 188,78 (b), 211,30 (c) и для воздуха  $t = 105,98$  (d), 144,49 (e), 157,50 (f).

фотографиям течения трудно точно определить  $x_1$ , и столь заметное различие в значениях  $x_0$  и  $x_1$  лежит в пределах точности эксперимента. Очень важен следующий результат: длина замкнутой зоны следа, т. е.  $L/D$ , так же, как и значение  $C_x$  зависят от времени установления течения. Так, для воды при  $T_S = 21^\circ\text{C}$  имеем при  $t = 23$  отношение  $L/D = 2,0$ , а при  $t = 87,76$  значение  $L/D = 2,16$ , определенные по линиям тока. Первое значение  $L/D = 2,0$  совпадает с результатом натурального эксперимента [29], определенным по  $x_0$  для  $t = 21$  ( $t = t'U_\infty/R$ ), а второе  $L/D = 2,16$  близко к оценке  $L/D = 2,2$  [29], сделанной по визуализации течения.

Следует отметить, что, несмотря на имеющиеся возможности оценки зависимости решения от диффузионного потока завихренности с поверхности цилиндра и частичного или полного учета сжимаемости, остается принципиально важный элемент решения — влияние потенциальной части решения для скорости. При малых числах Рейнольдса она существует в решении обобщенных уравнений Стокса — решении Озеена [1], решении Имаи и Томотика [55] и связывается с мощностью источника с центром в начале координат (осью цилиндра). Именно в этом направлении делается поправка граничных условий дальнего поля в работе [31].

Увеличение отношения  $L/D$  в энтропийном приближении с зависимостью  $\nu(T)$  для воздуха по сравнению с обтеканием кругового цилиндра при  $\nu(T)$  для воды происходит одновременно с изменением распределения коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси абсцисс — линии симметрии следа. Если для воды  $C_p$  восстанавливается при  $x \cong 15$ , то для воздуха восстановление давления происходит на заметно большем расстоянии за цилиндром при  $x \cong 20$ . Это не менее важная характеристика течения, чем отношение  $L/D$ .

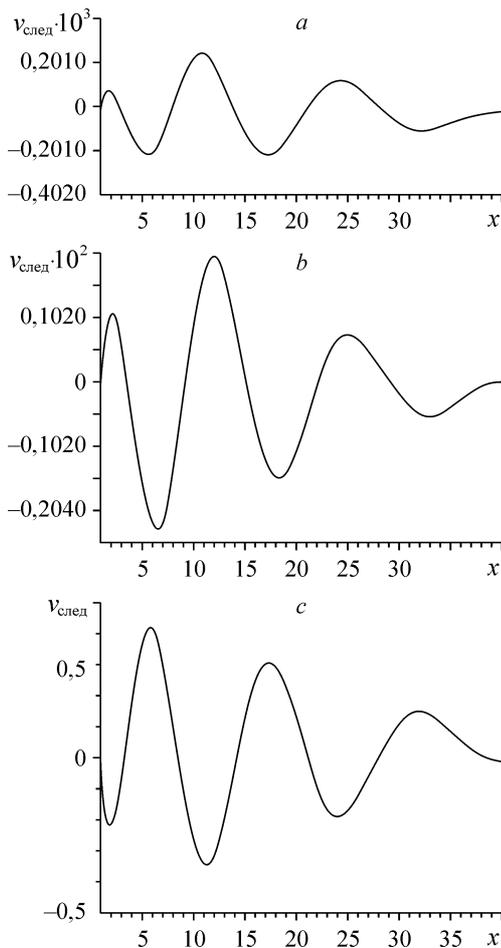
Различия в отношении  $L/D$  для воды и для воздуха при  $R_\infty = 20 R$  и  $R_\infty = 40 R$  не столь велики, как в трубном эксперименте [17, 20]. В численном моделировании имеем соответственно  $L/D = 1,91$  и  $2,16$  для воды и  $L/D = 2,1-2,4$  и  $2,3$  для воздуха в энтропийном приближении. В первую очередь это связано с тем, что в трубном эксперименте эффект “запирания” сильно сказывается на распределении давления и скорости вверх по потоку от цилиндра, а в численном моделировании этого не происходит, поскольку условия равномерного потока на входе в расчетную область задаются.

Сравнение полей завихренности и функции тока в близкие моменты времени показало, что даже когда значения  $L/D$  и  $C_x$  практически установились, имеются характерные пульсации, которые напоминают взаимодействие излучения от источника, расположенного внутри цилиндра и отражения этого излучения от  $S_\infty$ , где вклад от источника не учитывается. Однако эти пульсации по амплитуде очень малы и частично трансформируются в вихревые структуры, заметные на линиях равных значений относительной завихренности  $\Omega' = \Omega(t = t_1) - \Omega(t = t_2)$  в пристеночной области как замкнутые линии. Можно предположить, что именно этот механизм является причиной порождения волны скорости  $v_{\text{след}}$  ортогональной к оси симметрии следа, бегущей вдоль его оси. На рис. 5  $t = 87,5$  (a), 150,5 (b), 278,12 (c). Положение  $(v_{\text{след}})_{\text{max}}$  в общем случае не совпадает с точкой  $x_0$  на оси абсцисс, где  $u_{\text{след}} = 0$ . При совпадении  $(v_{\text{след}})_{\text{max}}$  с  $x_0$  наблюдается наиболее заметное расхождение линий тока  $\Psi = 0$  в верхней и нижней полуплоскостях. Это свойство течения легко предсказуемо, если воспользоваться сравнением с моделированием толщины вытеснения пограничного слоя по методу Лайтхилла [46], в котором на поверхности обтекаемого тела задается

соответствующее распределение нормальной к поверхности скорости, что на оси абсцисс в следе соответствует  $v_{\text{след}}$ . Поэтому в расчете наблюдается тем большее отклонение линии тока  $\Psi = 0$  от оси абсцисс, чем больше  $v_{\text{след}}$ .

Отметим, что именно для оси симметрии течения в следе, а именно — оси абсцисс, эффект отражения бегущей волны  $v_{\text{след}}$  может быть особенно заметен, поскольку используемые граничные условия для функции тока на  $S_{\infty}$  предполагают  $v_{\text{след}}|_{S_{\infty}} = 0$ . Если расчет обтекания цилиндра при  $Re = 20$  (40) вести до достаточно больших времен  $t > 200$ , то амплитуда волны  $v_{\text{след}}$  достигает порядка 0,1, что приводит к потере симметрии течения и развитию нестационарности (рис. 6). Оценка этого свойства численного решения и его возможная связь с гидродинамической неустойчивостью является сложной задачей отдельного исследования. Это связано, в первую очередь, с тем, что при дополнении граничных условий дальнего поля вкладом от источника, помещенного внутри цилиндра, и при нарастающих колебаниях мощности этого источника, мы имеем дело уже с осциллятором, и эта задача хорошо известна, например [56], и что существенно, в этом случае на  $S_{\infty}$  требуется постановка граничных условий отсутствия отражения [57]. В свете полученных результатов изучение перехода течения около цилиндра от симметричной формы к начальной стадии существенно нестационарного течения при  $Re \geq 20$  (40) требует уточнения постановки задачи в целом.

Широко применяемое для оценки свойств течения и качества численного



решения отношение  $L/D$  зависит от многих особенностей численного расчета условий натурального эксперимента, а также способа определения  $L$ . Известна оценка  $L/D = 0,06 Re_D - 0,3$  в диапазоне  $5 < Re_D < 41$ , приведенная в [58]. Например, для  $Re = 20$  ( $Re_D = 40$ ) получаем  $L/D = 2,1$ , что совпадает с данными эксперимента [14] и близко к результатам настоящих расчетов. Однако с учетом локальной нестационарности в области замыкания рециркуляционной зоны, интервальная оценка  $L/D$  часто более удобна.

Наконец, оценку влияния сжимаемости на отношение  $L/D$  и  $C_x$  можно сделать по результатам [41] и энтропийному приближению. Табл. 4 показывает, что натуральный эксперимент обтекания цилиндра, проведенный в жидкой среде и в воздухе при малых числах Маха, может

Рис. 5. Распределение скорости  $v_{\text{след}}$  (ортогональной к оси симметрии следа) вдоль оси следа  $t = 87,5$  (a), 150,5, (b), 278,12 (c).

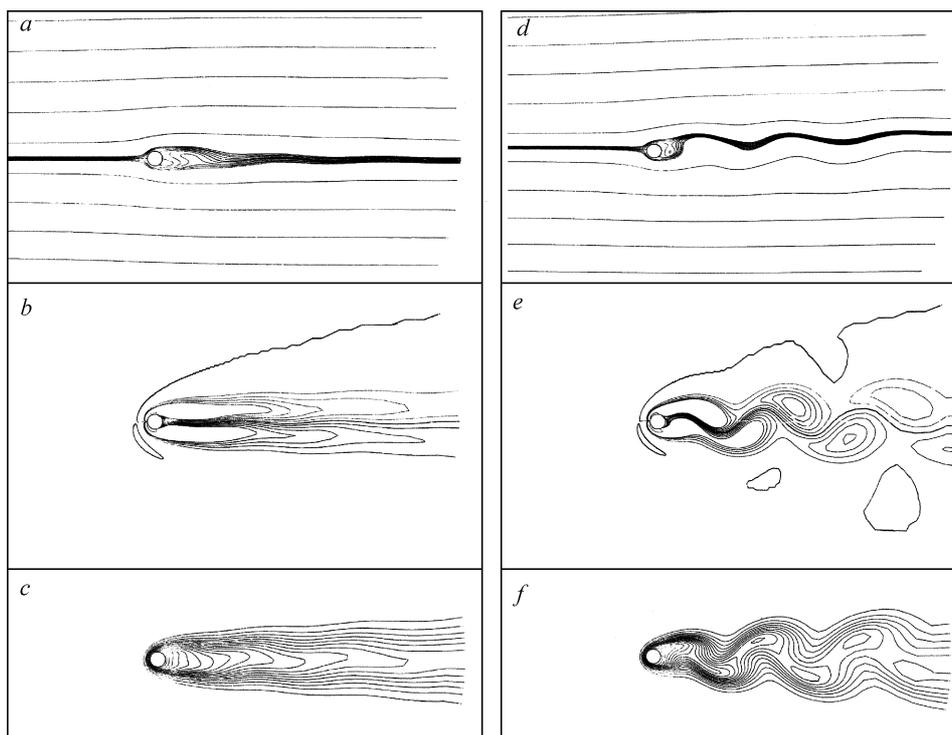


Рис. 6. Линии тока, линии равной завихренности, изотермы в разные моменты времени:  $t = 246$  (a, b, c),  $278$  (d, e, f).

давать существенно различные значения  $L/D$  и  $C_x$ . Это повышает роль численного моделирования в задачах обтекания тел при малых числах Рейнольдса. При моделировании обтекания цилиндра в условиях  $M \ll 1$  необходимо учитывать температуру и весь комплекс граничных условий на его поверхности.

#### ВЫВОДЫ

1. Проведены тестовые расчеты и сравнение с результатами других авторов для случая обтекания неподвижного цилиндра при числе  $Re = 20$  ( $Re_D = 40$ ). Учтывалась зависимость вязкости от температуры. Сравнение с натурным экспериментом [20] и теоретическим результатом [26] позволяет принять  $R_\infty = 40 R$  и  $N_\xi = 640$  как приемлемые параметры постановки задачи численного эксперимента.

2. В расчетах обтекания неподвижного цилиндра получена сильная зависимость сопротивления  $C_x$  от времени установления течения и значения коэффициента  $\beta$  в аппроксимационной формуле для завихренности. Эти различия покрывают весь интервал значений  $C_x$ , полученных в численных и натуральных экспериментах. Скорость на оси следа, определенная на  $S_\infty$ , устанавливается при  $t > 109$ .

3. При  $\beta = 6h_\xi$  и  $\beta = 8h_\xi$  в аппроксимационной формуле для завихренности при установлении течения  $C_x$  совпадают. Это достаточно убедительно свидетельствует о корректности задания кинематических и динамических граничных условий на цилиндре.

4. Сравнение  $C_{x0}$  и  $C_{x1}$  в схеме без использования процедуры предиктор-корректор [35] позволяет сделать вывод, что проблема граничных условий на  $S_\infty$  требует дополнительного исследования. Среднее  $C_x = 0,5(C_{x0} + C_{x1}) = 1,5$  близко к среднему значению  $C_x$  из табл. 1.

5. При обтекании неподвижного цилиндра водой с увеличением  $T$  вязкость среды уменьшается и соответственно должно уменьшаться сопротивление трения. Расчет подтверждает эту тенденцию. При  $T_S = 21\text{ }^\circ\text{C}$   $C_{xf} = 0,515$  ( $t = 150$ ), а при  $T_S = 30\text{ }^\circ\text{C}$   $C_{xf} = 0,420$  ( $t = 172,5$ ). Т. е. разница в значении  $C_{xf} \approx 0,09$ , что значительно.  $C_{xp}$  также уменьшается на 0,03. Суммарное изменение  $C_x$  достигает 0,12.

6. В случае обтекания цилиндра воздухом при увеличении  $T$  вязкость растет, но при изменении  $T_S$  от  $T_S = 21$  до  $30\text{ }^\circ\text{C}$  изменение вязкости невелико. Тем не менее расчет подтверждает тенденцию увеличения  $C_{xf}$  при увеличении температуры воздуха. При  $T_S = 21\text{ }^\circ\text{C}$   $C_{xf} = 0,4874$  ( $t = 117$ ), а при  $T_S = 30\text{ }^\circ\text{C}$   $C_{xf} = 0,4936$  ( $t = 100$ ). Однако при  $t > 146$   $C_{xf}$  для  $T_S = 21$  и  $30\text{ }^\circ\text{C}$  уже практически совпадают.  $C_{xp}$  для воздуха повышается примерно на 0,04, поэтому  $C_x$  увеличивается примерно на эту же величину.

7. Для снижения температурного фактора в натурном эксперименте желательно использовать в качестве рабочей среды воздух.

8. Расчет обтекания цилиндра, совершающего вращательные колебания в потоке вязкой жидкости/воды (задача Танеды), показал, что учет  $\nu(T)$  восстанавливает структуру дальнего следа: если при  $\nu = \text{const}$ ,  $Re_\infty = 20$   $R$  в дальнем следе образуется обращенная дорожка Кармана (дорожка Голубева), то при  $\nu(T)$  и  $T_S < 40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = 20\text{ }^\circ\text{C}$  — в зависимости от числа  $Re$  возникает дорожка чередующихся вихрей или дорожка Кармана.

9. В задаче Танеды при  $T_S > 40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = 20\text{ }^\circ\text{C}$  наблюдается стабилизация течения в ближнем следе: переход к почти симметричной форме отрывного течения. Средний и дальний участки следа остаются нестационарными.

10. В расчетах обтекания цилиндра с учетом зависимости вязкости среды от температуры для воздуха применено энтропийное приближение в уравнении переноса тепла. Расчет при  $Re = 20$  ( $Re_D = 40$ ),  $T_S = 30\text{ }^\circ\text{C}$  и  $T_\infty = 20\text{ }^\circ\text{C}$  показал те же значения  $C_{xp}$  и  $C_{xf}$ , что и в пункте 6 раздела “Выводы”, но максимум  $L/D = 2,5$ . Для сравнения, в расчетах [41] ( $M = 0,1$ )  $C_x = 1,46$ ,  $L/D = 2,4$ . Таким образом, для сравнения с результатами расчетов сжимаемых вязких течений при  $M \ll 1$  целесообразно использовать энтропийное приближение, учитывающее частично свойства газа.

11. Течение в области смыкания нулевой линии тока является нестационарным, но не влияет на значение  $C_x$ .

12. Область нестационарного течения в окрестности смыкания нулевой линии тока определяет интервал значений отношения  $L/D$ , найденного в натуральных и численных экспериментах.

13. Определение  $L/D$  по линиям тока  $\Psi = 0$  затруднено и имеет интервальную оценку, а определение  $L/D$  по положению точки, где  $(u_{\text{след}}) = 0$  в численном моделировании практически однозначно.

14. Изменение распределения коэффициента давления  $C_p$  вдоль оси абсцисс — линии симметрии следа различны, если брать  $\nu(T)$  для воды или воздуха. Для воды  $C_p$  восстанавливается при  $x \cong 15$  а для воздуха в энтропийном приближении восстановление давления происходит на заметно большем расстоянии за цилиндром при  $x \cong 20$ . Это не менее важная характеристика течения, чем отношение  $L/D$ .

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту, замечания которого привели к плодотворному структурированию статьи и усилению выводов по проведенному исследованию.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезкин Н.А. — Динамика вязкой жидкости. — М.: Гостехтеориздат, 1985. — 520 с.
2. Чашечкин Ю.Д., Ильиных Ю.С., Кистович Ю.В., Миткин В.В. Короткие внутренние волны в непрерывно стратифицированной жидкости / Уч. пособие и методические указания по выполнению лабораторных работ. — Препринт Института проблем механики РАН, № 633. — М.: ИПМ РАН, 1998. — 78 с.
3. Torres C., Hanazaki H., Ochoa J., Castillo J., M. Van Woert. Flow past a sphere moving vertically in a stratified diffusive fluid // *J. Fluid Mech.* — 2000. — Vol. 417. — P. 211–236.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
5. Gresho P.M., Lee R.I. Don't suppress the wiggles — they're telling you something // *Computers and Fluids.* — 1981. — Vol. 9. — P. 223–253.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
7. Arakawa A. Computational desing of longterm numerical integration of the equations of fluid motion I. Two-dimensional incompressible flow // *J. of Comput. Phys.* — 1966. — Vol. 1, No. 1. — P. 119–143.
8. Самарский Ф.Ф., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. — Едиториал УРСС, 2004. — 424 с.
9. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. — Новосибирск: Наука, Сиб. Отд. Акад. наук СССР. — 1985. — 364 с.
10. Chung N.J., Sohn J.I. Interactions of Coupled Acoustic and Vortical Instability // *AIAA J.* — 1986. — Vol. 24, No. 10. — P. 1582–1596.
11. Wang Meng, Sanjiva K., Lele K., Parviz M. Computation of quadropole noise using acoustic analogy // *AIAA J.* — 1996. — Vol. 34, No. 11. — P. 2247–2254.
12. Zakharenkov M.N. Thermal processes in viscous incompressible flow around an circular cylinder performing rotational oscillations // *The Fourth Intern. Conf. on New Energy Systems and Conversions (NESC'99), 27-30 June 1999, Osaka, Japan.*
13. Kawaguti M. Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40 // *J. Phys. Soc. Japan.* — 1953. — Vol. 8, No. 6. — P. 747–757.
14. Tameda S. Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers // *J. Phys. Soc. Japan.* — 1956. — Vol. 11. — 302 p.
15. Apelt C.J. The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder at Reynolds number 40 and 44 // *Aero. Res. Council., Lond., R&M.* — 1958. — No. 3175. — P. 1–28.
16. Tritton D.J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // *J. of Fluid Mech.* — 1959. — Vol. 6, No. 4. — P. 547–567.
17. Grove A.S., Shair F.H., Peterson E.E., Acrivos A. An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* — 1964. — Vol. 19, pt 1. — P. 60–80.
18. Kawaguti M., Jain P. Numerical study of a viscous fluid flow past a circular cylinder // *J. Phys. Soc. Japan.* — 1966. — Vol. 21. — P. 2055.
19. Keller H.B. and Takami H. Numerical studies of steady viscous flow about cylinders, Numerical solutions of nonlinear differential equations (Ed. by D. Greenspan). — Willey, New York, 1966.
20. Acrivos A., Leal L.G., Snowden D.D., Pan P. Further experiments on steady separated flows past bluff objects // *J. Fluid Mech.* — 1968. — Vol. 34, pt 1. — P. 25–48.
21. Son J.S., Hanratty T.J. Numerical solutions for the flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500 // *J. Fluid Mech.* — 1969. — Vol. 35. — P. 369–386.
22. Jain P.C., Rao K.S. Numerical solution of unsteady viscous incompressible fluid flow past a circular cylinder // *Phys. Fluids Suppl.* — 1969. — Vol. 12, pt II. — Paper No. 57. — P. 1.
23. Hamielec A.E., Roal J.D. Numerical study of viscous flow around circular cylinder // *Physics of Fluids.* — 1969. — Vol. 12, No. 1. — P. 11–17.
24. Dennis S.C.R., Chang G.Z. Numerical solution for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // *J. Fluid Mech.* — 1970. — Vol. 42. — 471 p.
25. Collins W.M., Dennis S.C.R. Flow past an impulsively started circular cylinder // *J. Fluid Mech.* — 1973. — Vol. 60. — 105 p.
26. Nieuwstadt F., Keller H.B. Viscous flow past circular cylinder // *Computers and Fluids.* — 1973. — Vol. 1. — P. 59–71.
27. Ta Phuok Loc. Etude numerique de l'ecoulement d'un fluid visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation. Effect Magnus // *J. Mec.* — 1975. — Vol. 14. — P.109–134.
28. Zdrawkovich M.M. Flow around circular cylinder. — Vol. Fundamentals. Oxford University Press, 1977.
29. Coutanceau M., Bourd R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Pt 2. Unsteady flow // *J. Fluid Mech.* — 1977, Vol. 79. — No. 2. — P. 257–272.
30. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* — 1980. — Vol. 98. — 819 p.
31. Chaplin J.R. History forces and the unsteady wake of a cylinder // *J. Fluid Mech.* — 1999. — Vol. 393, No. 25, August. — P. 99–121.

32. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 711 с.
33. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
34. Zakharenkov M.N. Unsteady detached separation from a circular cylinder performing rotational oscillations in a uniform viscous incompressible flow // Inter. J. for numeric. methods in fluids. — 1997. — Vol. 25. — P. 125–142.
35. Захаренков М.Н. Единственность давления при решении уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока и завихренность // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, No. 1. — P. 3–10.
36. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 392 с.
37. Захаренков М.Н. Аппроксимация граничного условия для завихренности на поверхности твердого тела при решении уравнений Навье–Стокса в переменных функциях тока и завихренность // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1980. — Т. 11, № 7. — С. 56–74.
38. Тарунин Е.Л. Анализ аппроксимационных формул для вихря скорости на твердой границе // Уч. зап. Пермского гос. пед. ин-та. Гидродинамика. — 1976. — Т. 152, вып. 9. — С. 167–178.
39. Kasagi N. Application of direct numerical simulation in fundamental research of turbulent transport phenomena // Proc. of the Ninth Inter. Symp. on transport phenomena (ISTP-9) in thermal-fluids Engin., Singapore, June 25-28, 1996. — Vol. 1. — P. 32–45.
40. Fornberg B. Steady viscous flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600 // J. of Comp. Physics. — 1985. — Vol. 61, No. 2. — P. 297–320.
41. Волков А.В., Ляпунов С.В. Частное сообщение, ГУП ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, г. Жуковский, Московская область, 2001.
42. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике. — М.-Л.: Энергия, 1969.
43. Захаренков М.Н. Реализация динамических граничных условий для уравнений Навье–Стокса в переменных функциях тока и завихренность. Реализация необходимых дифференциальных связей на твердой поверхности в разностных схемах 4-го порядка аппроксимации при решении уравнений Н-С в  $\Psi$ - $\Omega$  переменных // Тез. докл. XII Всерос. конф. “Теоретические основы конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики”. — Новороссийск. — 1998, Россия.
44. Захаренков М.Н. Реализация граничных условий частичного и полного проскальзывания при решении уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока и завихренность // Журнал вычисл. математики и математической физики. — 2001. — № 5. — С. 796–806.
45. Захаренков М.Н. К вопросу о выполнении динамических граничных условий в задаче обтекания тела потоком вязкой несжимаемой жидкости // Тез. докл. XII Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС’2003). Т. 1. — 30 июня–5 июля 2003, Владимир. — 2003. — С. 288–290.
46. Lighthill M.J. On displacement thickness // J.Fluid Mech. — 1959. — P. 383–392.
47. Zakharenkov M.N. The heat processes in attached vortical layer around a circular cylinder performing rotational oscillations in the uniform viscous incompressible flow // Тез. докл. Межд. конф. “Потоки и структуры в жидкости”. 10-12 июня 1999, С.-Петербург. — С. 146–148.
48. Zakharenkov M.N. Unsteady incompressible viscous flow past an airfoil // Arch. mech. — 1990. — Vol. 42, No. 4-5. — P. 609–615.
49. Wu J.C. Theory for Aerodynamic Force and Moment in Viscous Flows // AIAA J. — 1981. — Vol. 19, No. 4. — P. 432–441.
50. Зеленов И.В., Шкадов В.Я. Обтекание профиля крыла потоком вязкой жидкости // Изв.АН СССР. МЖГ. — 1986. — No. 4. — С. 29–37.
51. Anderson C.R. Domain decomposition techniques and the solution of Poisson's equation in infinite domains // Domain decomposition methods / eds. T.F. Chan, R. Glowinski, J. Periaux, O.B. Widlund. — SIAM, Philadelphia. — P. 129–139.
52. Schlichting H. Grenzschicht — Theorie. / 5-te Auflage. — Verlag G.Braun, Karlsruhe 1965.
53. Schlichting H. Boundary layer theory, Seventh edition / Ed. Dr. J. Kestin. — McGraw-Hill Book company, 1979.
54. Сычев В.В. Асимптотическая теория отрывных течений // Известия АН СССР. МЖГ. — 1982. — № 2. — С. 20–30.
55. Томотика С., Аой Т. Установившееся движение сферы и цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Re. Механика // Сб. сокращенных переводов и рефератов иностранной периодической литературы. Вып. 2 (XII). — Москва: Изд. иностранной лит-ры, 1952. — С. 46–63.
56. Стурова И.В. Задачи радиации и дифракции для кругового цилиндра в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. — 1999. — № 4. — С. 81–94.
57. Keller J.B., Jivoli D. Exact non-reflecting boundary conditions // J. of Computational Physics. — 1989. — Vol. 82. — P. 172–192.
58. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 758 с.

*Статья поступила в редакцию 12 мая 2003 г.*