

О. Н. Литвин, Ю. И. Першина

(Харьков, Украина)

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ
ТРЕХМЕРНОГО ОБЪЕКТА ПО ЕГО ТОМОГРАММАМ,
ЛЕЖАЩИМ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ГРУПП
ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПЛОСКОСТЕЙ**

Представлен новый метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным изображениям сечений этого тела, заданным в виде фотографий или томограмм, которые поступают из компьютерного томографа. Сечения трехмерного тела строятся в системе трех групп пересекающихся плоскостей, каждая из которых не обязательно параллельна координатным осям, с помощью оператора интерфлетации.

Введение. В последней четверти 20-го столетия при проведении научных исследований в разных областях науки и техники, в частности в медицине, а также при неразрушающем контроле трехмерных объектов нашли широкое применение компьютерные томографы, которые позволяют восстановить внутреннюю структуру тела, не разрезая его [1]. В отличие от классических методов теории приближения, в методах обработки информации, поступающей на вход спецпроцессора из компьютерного томографа, используется не совокупность значений исследуемой характеристики (функции от трех переменных, которая может быть, например, коэффициентом поглощения, плотностью тела и т. п.) в отдельных точках, а интегралы от нее (проекции) вдоль фиксированной схемы прямых, или несколько рентгеновских снимков в разных ракурсах (т. е. интегралы от функции трех переменных по нескольким разным направлениям), или следы этой функции на заданном наборе плоскостей (томограмм) и т. д. Задача заключается в восстановлении (возможно, приближенном) внутренней структуры тела по указанной нетрадиционной информации.

При восстановлении функции трех переменных с помощью интерполяции используется совокупность значений функции в отдельных точках, а с помощью интерфлетации [2] – известные ее следы на заданном наборе поверхностей. В предлагаемой работе эти следы созданы с помощью данных Радона.

Представим себе следующую ситуацию. Пациент прошел обследование на компьютерном томографе. Врач-оператор, работающий за пультом томографа, решил, что для постановки правильного диагноза достаточно получить изображения внутренней структуры тела (томограммы) в нескольких плоскостях (не обязательно параллельных). Но после тщательного анализа полу-

ченных томограмм (который, как правило, проводят другие специалисты) возникло желание получить изображения внутренней структуры тела также в других сечениях (в других плоскостях). Это можно выполнить с помощью операторов интерфлетации.

Операторы интерфлетации в системе плоскостей, параллельных координатным плоскостям, позволят решить эту задачу, если томограммы получены в системе взаимно перпендикулярных плоскостей. Общий метод восстановления получается с помощью операторов интерфлетации функций трех переменных в системе плоскостей, не обязательно взаимно перпендикулярных.

Существуют такие современные программные пакеты, как “3D Max”, “Adobe Illustrator”, “Digital Anatomy”, в которых можно получить сечения трехмерного тела. Однако данные пакеты имеют существенные ограничения на вид используемой информации. Представим возможности этих пакетов.

Пакет “Adobe Illustrator” [3] может по данным проекциям в плоскостях, перпендикулярных одной оси координат, найти любое сечение трехмерного объекта. Сечения, перпендикулярные осям координат, получаются с помощью кнопок «горизонталь» или «вертикаль», а наклонные сечения – с помощью введения угла наклона.

Пакет “Digital Anatomy Common Gateway Interface” [4] был создан в университете г. Вашингтона (США). Этот пакет представляет собой мультимедийную анатомическую помощь и показывает изображения разных секций головного мозга, а также трехмерные изображения структур мозга. Кроме того, можно посмотреть сечения головного мозга и его частей по проекциям, перпендикулярным только одной оси координат.

Пакет “3D Studio Max” [5] позволяет построить сечения трехмерного объекта по данным проекциям, перпендикулярным одной оси координат. Чтобы построить сечение, нужно просто указать уравнение плоскости, пересекающей трехмерное тело.

Заметим, что эти программные пакеты восстанавливают внутреннюю структуру трехмерного тела с помощью томограмм, которые лежат на плоскостях, параллельных одной плоскости, т. е. они не дают возможности найти сечения трехмерного поля по данным проекциям, полученным при пересечении тела системой любых пересекающихся плоскостей. Отметим, что метод восстановления структуры трехмерного тела (интерфлетация) по известным его томограммам, лежащим в системе трех групп пересекающихся плоскостей, дает более точный результат, чем методы, которые описаны в указанных выше пакетах, и поэтому актуален.

Описание метода. В данной работе впервые рассматривается задача восстановления структуры трехмерного объекта по его следам в системе трех групп параллельных плоскостей, которые не обязательно перпендикулярны осям координат. Кроме того, впервые получены явные формулы для оператора интерфлетации в системе плоскостей, каждая из которых не обязательно пересекается со всеми другими.

Допустим, что функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, описывает некоторую физическую характеристику внутренней структуры (например, плотность, коэффициент поглощения и т. д.). Источником информации о функции $f(x)$, т. е. о внутренней структуре трехмерного тела, будем считать набор плоскостей, а также набор томограмм на этих плоскостях. Для дальнейшего изложения необходимо сформулировать некоторые утверждения.

Пусть заданы три группы параллельных томограмм, расположенных на плоскостях П1–П3, которые задаются уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned}\omega_{1_i}(x) &= \sum_{p=1}^3 a_{ip}x_p - \gamma_{1_i}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \omega_{2_k}(x) &= \sum_{p=1}^3 b_{kp}x_p - \gamma_{2_k}, \quad k = \overline{1, n}, \\ \omega_{3_l}(x) &= \sum_{p=1}^3 c_{lp}x_p - \gamma_{3_l}, \quad l = \overline{1, s},\end{aligned}$$

где m, n, s – количество параллельных плоскостей в группах П1–П3 соответственно; числа $\gamma_{1_i}, \gamma_{2_k}, \gamma_{3_l}, a_{ip}, b_{kp}, c_{lp}$ считаем заданными. Введем следующие обозначения:

$$\tau_{ik} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix}; \quad \tau_{ik}^0 = \frac{\tau_{ik}}{|\tau_{ik}|};$$

$$M = \{(i, k, l) | \Pi_{1_i} \cap \Pi_{2_k} \cap \Pi_{3_l} = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset, \quad i \neq k \neq l\};$$

$$\Gamma_{ik} = A_i \cap B_k \neq \emptyset, \quad \Gamma_{il} = A_i \cap C_l \neq \emptyset, \quad \Gamma_{kl} = B_k \cap C_l \neq \emptyset$$

(A_i – томограммы, заданные на плоскостях П1 _{i} , $i = \overline{1, m}$; B_k – на плоскостях П2 _{k} , $k = \overline{1, n}$; C_l – на плоскостях П3 _{l} , $l = \overline{1, s}$);

$$\Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \end{vmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е. Томограммой (в математическом смысле) $\varphi_k(x)$ (следом функции $f(x)$) на плоскости $\omega_k(x) = 0$ при условии, что коэффициенты $a_{i,j}$, $i = \overline{1, m}$, или $b_{p,j}$, $p = \overline{1, n}$, или $c_{l,j}$, $l = \overline{1, s}$, не равняются нулю, будем называть одну из трех функций:

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) &= \begin{cases} f(x_{1k}(x_2, x_3), x_2, x_3) \\ f(x_1, x_{2k}(x_1, x_3), x_3) = \\ f(x_1, x_2, x_{3k}(x_1, x_2)) \end{cases} \\ &= \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3)/a_{k1}), & a_{k1} \neq 0; \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3)/a_{k2}), & a_{k2} \neq 0; \\ f(x_1, x_2, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2)/a_{k3}), & a_{k3} \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, понятие томограммы включает в себя плоскость и функцию, заданную в точках этой плоскости. Однако по виду $\varphi_k(x)$ нельзя восстановить внутреннюю структуру трехмерного тела.

Лемма 1. Если томограммы $A_i, i=1, m, B_k, k=1, n, C_l, l=1, s$, лежат на некомпланарных плоскостях, $\Delta_{ikl} \neq 0$, то справедливо равенство

$$V_{ikl} = \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \gamma 3_l + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \gamma 1_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} \gamma 2_k. \quad (1)$$

Доказательство. Действительно, координаты точки V_{ikl} являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\omega 1_i(V_{ikl}) = 0; \quad \omega 2_k(V_{ikl}) = 0; \quad \omega 3_l(V_{ikl}) = 0,$$

которую можно записать также в виде

$$(\nabla \omega 1_i)x = \gamma 1_i; \quad (\nabla \omega 2_k)x = \gamma 2_k; \quad (\nabla \omega 3_l)x = \gamma 3_l.$$

Ее решение можно представить в векторной форме:

$$x = V_{ikl} = \frac{(\nabla \omega 2_k \cdot \nabla \omega 3_l) \gamma 1_i + (\nabla \omega 3_l \cdot \nabla \omega 1_i) \gamma 2_k + (\nabla \omega 1_i \cdot \nabla \omega 2_k) \gamma 3_l}{\Delta_{ikl}},$$

$$\begin{aligned} x_{ikl1} \mathbf{i} + x_{ikl2} \mathbf{j} + x_{ikl3} \mathbf{k} &= \frac{\gamma 3_l}{\Delta_{ikl}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{\gamma 2_k}{\Delta_{ikl}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \end{vmatrix} + \frac{\gamma 1_i}{\Delta_{ikl}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

или

$$V_{ikl} = \begin{pmatrix} x_{ikl1} \\ x_{ikl2} \\ x_{ikl3} \end{pmatrix} = \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \gamma 3_l + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \gamma 1_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} \gamma 2_k.$$

Таким образом, равенство (1) доказано.

Лемма 1 доказана.

Пусть томограммы A_i, B_k, C_l пересекаются в точке V_{ikl} . Обозначим

$$u_{li}^k = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega 3_l(x) + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega 1_i(x),$$

$$w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} \omega 1_i(x).$$

Теорема 1. Для существования функции $L_{ikl}(x) \in C^r(R^3)$ с заданными томограммами $A_i, i=1, n, B_k, k=1, m, C_l, l=1, s$, при выполнении условий

$$L_{ikl}(x)|_{A_i} = \varphi_i(x)|_{A_i}; \quad L_{ikl}(x)|_{B_k} = \varphi_k(x)|_{B_k}; \quad L_{ikl}(x)|_{C_l} = \varphi_l(x)|_{C_l} \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы следы $\varphi_q(x), q=i, k, l$, удовлетворяли условию $\varphi_q(x) \in C^r(R^3), r \geq 0$, и условиям Никольского, которые на ребре Γ_{kl} сводятся к проверке равенств

$$\varphi_k(u_{li}^k(x))|_{\omega_{3l}(x)=0} = \varphi_l(u_{il}^l(x))|_{\omega_{2k}(x)=0}.$$

Аналогичный вид имеют эти условия на ребрах Γ_{ik} и Γ_{li} . В точке V_{ikl} условия Никольского сводятся к проверке равенств

$$\begin{aligned} & \varphi_l(u_{ik}^l(x))|_{\omega_{1l}(x)=0, \omega_{2k}(x)=0} = \\ & = \varphi_k(u_{li}^k(x))|_{\omega_{3l}(x)=0, \omega_{1i}(x)=0} = \varphi_i(u_{kl}^i(x))|_{\omega_{2k}(x)=0, \omega_{3l}(x)=0}. \end{aligned}$$

Доказательство.

Достаточность. Оператор $L_{ikl}(x)$ можно построить в виде

$$\begin{aligned} L_{ikl}(x) &= L_{ikl}(\{\varphi_q\}, x) = \\ &= [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k](\{\varphi_q(x)\}, x), \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$L_{ik}^l(\{\varphi_q(x)\}, x) = \varphi_l(u_{ik}^l(x)) = f(u_{ik}^l(x));$$

$$L_{ik}^l L_{kl}^i(\{\varphi_q\}, x) = f(w_k(x)); \quad L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{\varphi_q\}, x) = f(V_{ikl}), \quad q=i, k, l.$$

Аналогично определяются операторы $L_{kl}^i, L_{li}^k, L_{kl}^i L_{li}^k, L_{li}^k L_{ik}^l$.

Доказательство того, что формула (3) удовлетворяет условию (2), проводится непосредственной проверкой.

Необходимость. В работе Никольского [6] доказано, что для существования функции $f(x_1, x_2, x_3) \in C^r(R^3)$, имеющей следы

$$\frac{\partial^\nu f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_s^\nu} \Big|_{x_s=0} = \varphi_{s, \nu}(\bar{x})|_{x_s=0}, \quad s=1, 2, 3, \quad \nu = \overline{0, r},$$

необходимо и достаточно, чтобы граничные функции $\varphi_{s, p}(\bar{x})$ удовлетворяли в точке $(0, 0, 0)$ условиям вида

$$\frac{\partial^\beta \varphi_{s, \alpha}(\bar{x})}{\partial x_p^\beta} \Big|_{x_p=0} = \frac{\partial^\alpha \varphi_{s, \beta}(\bar{x})}{\partial x_s^\alpha} \Big|_{x_s=0}, \quad s, p=1, 2, 3, \quad \alpha, \beta \in \overline{0, r}, \quad \bar{x} = \begin{cases} (0, x_2, x_3); \\ (x_1, 0, x_3); \\ (x_1, x_2, 0). \end{cases}$$

Это позволяет строить операторы $L_{ikl}(x)$.

Распространение результатов на случай больше чем три плоскости производится в теореме 3 благодаря использованию разложения единицы.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Допустим, что внутренняя структура трехмерного тела описывается функцией $f(x) \in C^r(R^3)$, $r \geq 3$, которая имеет заданные томограммы, расположенные на заданных плоскостях, и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} f(x)|_{\Pi_{1_i}} &= \varphi_i(x)|_{A_i}; & f(x)|_{\Pi_{2_k}} &= \varphi_k(x)|_{B_k}; \\ f(x)|_{\Pi_{3_l}} &= \varphi_l(x)|_{C_l}, & i &= \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда для погрешности $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ приближенного восстановления внутренней структуры $f(x)$ оператором $L_{ikl}f(x)$, построенным с помощью данного набора плоскостей и томограмм, выполняется равенство

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_{1_i}} \int_0^{\omega_{2_k}} \int_0^{\omega_{3_l}} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \quad (5)$$

Доказательство. Учтем тождество

$$\begin{aligned} (I - L_{ikl})f(x) &= (I - L_{ik}^l - L_{li}^k - L_{kl}^i + L_{li}^k L_{kl}^i + L_{kl}^i L_{li}^k + L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k)f(x) = \\ &= (I - L_{kl}^i)(I - L_{li}^k)(I - L_{ik}^l)f(x), \end{aligned}$$

а также тождество типа

$$(I - L_{kl}^i)f(x) = \int_0^{\omega_i(x)} \frac{\partial f}{\partial t_i} \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} \omega_k(x) + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} \omega_l(x) \right) dt_i.$$

Подставив это интегральное выражение, а также аналогичные выражения для $(I - L_{li}^k)f(x)$, $(I - L_{ik}^l)f(x)$ в предыдущую формулу для остаточного члена, получим доказательство теоремы 2.

Теорема 3. Пусть множество трех групп параллельных томограмм, которые находятся на плоскостях, заданных уравнениями

$$\Pi_{1_i}: \omega_{1_i}(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \Pi_{2_k}: \omega_{2_k}(x) = 0, \quad k = \overline{1, m};$$

$$\Pi_{3_l}: \omega_{3_l}(x) = 0, \quad l = \overline{1, s},$$

удовлетворяет двум условиям:

1) в одной точке $V_{ikl} = A_i \cap B_k \cap C_l$ пересекаются не более трех томограмм;

2) каждая томограмма одной группы пересекается с каждой томограммой двух других групп (а внутри группы томограммы параллельны).

Тогда система функций

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega 1_j(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega 2_k(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega 3_j(x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega 1_j(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega 2_k(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega 3_j(V_{ikl})}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, s},$$

имеет свойства

$$h_{ikl}(V_{ikl}) = \delta_{i, i'} \delta_{k, k'} \delta_{l, l'}, \quad i, i' = \overline{1, m}, \quad k, k' = \overline{1, n}, \quad l, l' = \overline{1, s}.$$

Доказательство этих свойств легко проводится проверкой с учетом того, что $V_{i'k'l'} = A_{i'} \cap B_{k'} \cap C_{l'}$, т. е. $\omega 1_{i'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega 2_{k'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega 3_{l'}(V_{i'k'l'}) = 0$.

Лемма 2. Пусть томограммы A_i , $i = \overline{1, m}$, B_k , $k = \overline{1, n}$, C_l , $l = \overline{1, s}$, удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда система функций $h_{ikl}(x)$ является разложением единицы:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^s h_{ikl}(x) = 1. \quad (6)$$

Доказательство. Равенство для $h_{ikl}(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} h_{ikl}(x) &= \frac{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega 1_{A_\mu}(x) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \omega 2_{B_\nu}(x) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega 3_{C_\beta}(x)}{\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \omega 1_{A_\mu}(V_{ikl}) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \omega 2_{B_\nu}(V_{ikl}) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \omega 3_{C_\beta}(V_{ikl})} = \\ &= \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega 1_{A_\mu}(x)}{\omega 1_{A_\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \frac{\omega 2_{B_\nu}(x)}{\omega 2_{B_\nu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega 3_{C_\beta}(x)}{\omega 3_{C_\beta}(V_{ikl})}. \end{aligned}$$

Теперь просуммируем это выражение:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \neq k}}^s \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega 1_{A_\mu}(x)}{\omega 1_{A_\mu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^m \frac{\omega 2_{B_\nu}(x)}{\omega 2_{B_\nu}(V_{ikl})} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega 3_{C_\beta}(x)}{\omega 3_{C_\beta}(V_{ikl})} \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega 1_{A_\mu}(x)}{\omega 1_{A_\mu}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega 2_{B_v}(x)}{\omega 2_{B_v}(V_{ikl})} \right] \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega 3_{C_\beta}(x)}{\omega 3_{C_\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.$$

Здесь учитывается, что

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega 1_{A_\mu}(x)}{\omega 1_{A_\mu}(V_{\mu\nu\beta})}, \quad \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega 2_{B_v}(x)}{\omega 2_{B_v}(V_{\mu\nu\beta})}, \quad \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega 3_{C_\beta}(x)}{\omega 3_{C_\beta}(V_{\mu\nu\beta})}$$

являются базисными полиномами Лагранжа и, следовательно,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^n \left[\prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^n \frac{\omega 1_{A_\mu}(x)}{\omega 1_{A_\mu}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^m \left[\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^m \frac{\omega 2_{B_v}(x)}{\omega 2_{B_v}(V_{ikl})} \right] \equiv 1, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s \left[\prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq l}}^s \frac{\omega 3_{C_\beta}(x)}{\omega 3_{C_\beta}(V_{ikl})} \right] \equiv 1.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. Пусть томограммы $\varphi 1_i(x), \varphi 2_k(x), \varphi 3_l(x) \in C^r(R^3)$, $r \geq 3$, удовлетворяют условиям Никольского на ребрах и в точках пересечения плоскостей. Тогда функция

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \quad (7)$$

является полиномиальным интерфлетантом со свойствами:

$$\begin{aligned} L(x) &\in C^r(R^3); \\ L(x)|_{A_i} &= \varphi 1_i|_{A_i}; \quad L(x)|_{B_k} = \varphi 2_k|_{B_k}; \\ L(x)|_{C_l} &= \varphi 3_l|_{C_l}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\forall f(x) \in C^R(R^3)$, $r \geq 3$, удовлетворяющей условиям (4), выполняется равенство

$$\begin{aligned} L(x) &= Lf(x): \quad f(x) = Lf(x) + Rf(x), \\ R(x)f(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $R_{ikl}f(x)$ определяется формулой (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (3) при построении операторов $L_{ikl}(x)$ используются функции $\varphi 1_i(x), \varphi 2_k(x), \varphi 3_l(x) \in C^r(R^3)$, $r \geq 0$.

Поэтому $L(x) \in C^r(R^3)$. Приведем доказательство соотношений (8):

$$L(x)|_{A_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \Big|_{A_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) \Big|_{A_i} L_{ikl}(x) \Big|_{A_i} = \varphi_i(x) \Big|_{A_i}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \neq i}}^s h_{ikl}(x) = 1,$$

а также формулы $L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x) = f(x)$, можно переписать тождество

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) [L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x)].$$

В результате получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}f(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x) = (L(x) + R(x))f(x). \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Проиллюстрируем эту общую теорию примером частного случая, когда восстанавливается структура трехмерного объекта по данным томограммам в системе взаимно перпендикулярных плоскостей. Тело будем считать без ограничения общности полностью расположенным в единичном кубе $D = [0, 1]^3$.

Информацией о функции $f(x, y, z)$, т. е. о внутренней структуре тела, является набор рисунков $X_k.\text{bmp}$, $k = \overline{1, M_1}$, $Y_l.\text{bmp}$, $l = \overline{1, M_2}$, $Z_p.\text{bmp}$, $p = \overline{1, M_3}$, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных осям OX, OY, OZ соответственно. Каждой томограмме ставим в соответствие функцию:

$$X_k.\text{bmp} \mapsto A(k, y, z), \quad k = \overline{1, M_1}, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c;$$

$$Y_l.\text{bmp} \mapsto B(x, l, z), \quad l = \overline{1, M_2}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c;$$

$$Z_p.\text{bmp} \mapsto S(x, y, p), \quad p = \overline{1, M_3}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

При переходе к функциональной записи рисунков нужно сделать перемасштабирование: $x = x/a$, $y = y/b$, $z = z/c$.

Для дальнейшего изложения нужна

Теорема 5. Пусть операторы $\text{In}1f, \text{In}2f, \text{In}3f$ являются операторами сплайн-интерполяции функции $f(x, y, z)$ по переменным x, y, z соответственно:

$$\begin{aligned}\text{In}1f(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{M_1} \text{Sp}_{M_1, m, k}(x)A(k, y, z); \\ \text{In}2f(x, y, z) &= \sum_{l=1}^{M_2} \text{Sp}_{M_2, m, l}(y)B(x, l, z); \\ \text{In}3f(x, y, z) &= \sum_{p=1}^{M_3} \text{Sp}_{M_3, m, p}(z)C(x, y, p),\end{aligned}\tag{10}$$

где $\text{Sp}_{M_1, m, k}(x)$ – базисные сплайны степени m ($m=1, 2, 3$) со свойствами

$$\text{Sp}_{M_1, m, k} = \left(\frac{p}{M_1} \right) = \delta_{k, p}, \quad i, p = \overline{1, M_1}.$$

Аналогично определяются также сплайны $\text{Sp}_{M_2, m, l}$ и $\text{Sp}_{M_3, m, p}$.

Если функции $A(k, y, z)$, $k = \overline{1, M_1}$, $B(x, l, z)$, $l = \overline{1, M_2}$, $C(x, y, p)$, $p = \overline{1, M_3}$, удовлетворяют условиям:

$$A(k, y_l, z) = A(x_k, l, z); \quad B(x, l, z_p) = B(x, y_l, p); \quad C(x_k, y, p) = C(k, y, z_p),$$

то оператор сплайн-интерфлетации

$$Lf(x, y, z) = (\text{In}1 + \text{In}2 + \text{In}3 - \text{In}1\text{In}2 - \text{In}1\text{In}3 - \text{In}2\text{In}3 + \text{In}1\text{In}2\text{In}3)f(x, y, z)$$

имеет следующие свойства:

$$Lf(k, y, z) = A(k, y, z), \quad k = \overline{1, M_1}; \quad Lf(x, l, z) = B(x, l, z), \quad l = \overline{1, M_2};$$

$$Lf(x, y, p) = C(x, y, p), \quad p = \overline{1, M_3}.\tag{11}$$

Доказательство свойств (11) проводится непосредственной проверкой.

Анализ результатов вычислительного эксперимента. По изложенной методике разработан комплекс программ в системе компьютерной математики Matlab 6.5 [7]. Результаты ее тестирования показывают высокую точность.

Продемонстрируем результаты работы программы, которая позволяет найти сечения трехмерного тела в любой плоскости по рисункам в трех взаимно перпендикулярных плоскостях (Brain.m), а также по рисункам, перпендикулярным только одной оси OX (Brainox.m), или только оси OY (Brainoy.m), или только оси OZ (Brainoz.m).

Исходными данными программы будет совокупность рисунков (файлов в формате bmp), которые изображают сечения этого тела в системе трех групп параллельных плоскостей. Эта совокупность файлов является массивом рисунков, причем принадлежность файла к одной из групп параллель-

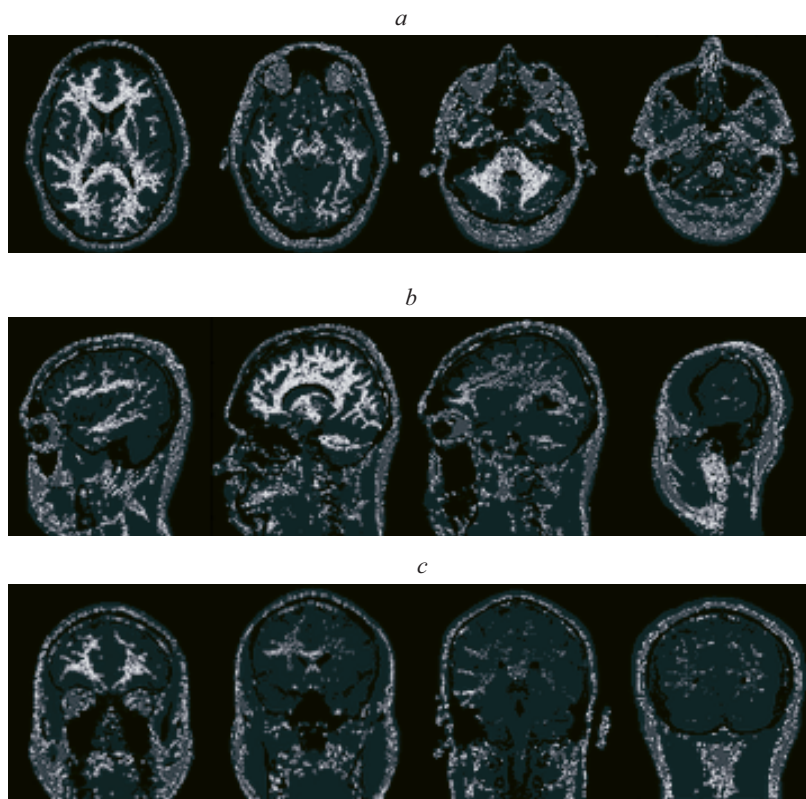


Рис. 1. Пример томограмм, перпендикулярных осям: OZ (a), OY (b), OX (c)

ных плоскостей определяется его названием (например, A1.bmp, A2.bmp, A3.bmp – рисунки, принадлежащие первой группе параллельных плоскостей; B1.bmp, B2.bmp, B3.bmp – второй группе; C1.bmp, C2.bmp, C3.bmp – третьей группе).

Операторы сплайн-интерфлетации реализованы в программе в виде отдельных функций:

$$L1(i, k, l, x), \quad L2(k, l, i, x), \quad L3(l, i, k, x),$$

$$LL1(k, l, i, x), \quad LL2(l, i, k, x), \quad LL3(i, k, l, x), \quad LLL(i, k, l, x).$$

Эти функции соответствуют операторам, определенным формулами (10). Каждая из функций вычисляет номера картинок, самых близких к точке с координатами (x_1, x_2, x_3) , и по этим номерам обращается к конкретным элементам трехмерного массива рисунков.

Для примера в качестве данных Радона были взяты рисунки, полученные из пакета программ “Digital Anatomist” (100 рисунков, перпендикулярных оси OX , 110 рисунков, перпендикулярных оси OY , 35 рисунков, перпендикулярных оси OZ). Все томограммы имеют постоянный шаг 1,3 мм. На рис. 1, $a - c$ приведены примеры этих томограмм.

Во всех четырех программах проводился поиск сечения головного мозга плоскостью, заданной уравнением $x + y + 10z + 1 = 0$. Были получены результаты, представленные на рис. 2.

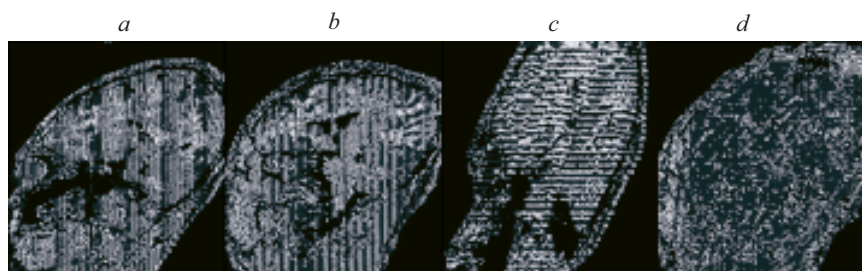


Рис. 2. Результаты построения томограмм по данным в трех взаимно перпендикулярных плоскостях: программой “Brainox” (a), “Brainoy” (b), “Brainoz” (c), “Brain” (d)

Из рисунков видно, что томограмма, построенная по данным во всех трех взаимно перпендикулярных плоскостях, дает более точный результат, чем томограммы в этом сечении, построенные по данным из семейства томограмм, перпендикулярных одной оси.

Заключение. Таким образом, в данной работе предложена методика восстановления внутренней структуры трехмерного тела по любой системе томограмм, расположенных в трех группах пересекающихся плоскостей, каждая из которых состоит из плоскостей, параллельных между собой. Данный метод планируется использовать для создания программного обеспечения реально действующих компьютерных томографов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
2. **Литвин О. М.** Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харьков: Основа, 2002.
3. **Бурлаков М.** Adobe Illustrator 9. Справочник. С.-Пб: Питер, 2001.
4. **Agoncillo A. V., Mejino J. L., Rosse C.** Influence of the digital anatomist foundational model on traditional representations of anatomical concepts // Proc. American Medical Informatics Association Fall Symposium. 1999. P. 2.
5. **Соловьев М.** Трехмерный мир 3D Studio Max 5.0. Солон-Пресс, 2003.
6. **Никольский С. М.** Граничные свойства функции на областях с угловыми точками // Мат. сб. 1958. **45(87)**, № 2. С. 181.
7. **Дьяконов В. П., Абраменко И. В.** Matlab. Система символьной математики. М.: Нолидж, 1999.

Українська інженерно-педагогічна академія,
E-mail: Academ@kharkov.ua

Поступила в редакцію
30 сентября 2005 г.