

УДК 624.124:532.595

## ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ АМФИБИЙНЫХ СУДОВ НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ

В. М. Козин, А. В. Погорелова

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре

Рассматривается стационарное движение амфибийного судна на воздушной подушке по водоему, покрытому сплошным льдом. Лед моделируется вязкоупругой ледяной пластиной. Проанализировано влияние удлинения судна, глубины водоема и характеристик льда на величину волнового сопротивления судна и его скорость, при которой волновое сопротивление максимально.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, ледяной покров, волновое сопротивление, пластина, амфибийное судно.

1. Гидродинамическая задача о движущемся по сплошному льду амфибийном судне на воздушной подушке (СВПА) моделируется с помощью системы поверхностных давлений [1], перемещающейся над плавающей вязкоупругой ледяной пластиной [2].

Рассмотрим бесконечную область, покрытую сплошным льдом, по которой со скоростью  $u$  перемещается заданная система поверхностных давлений  $q$ . Совмещенная с судном система координат располагается следующим образом: плоскость  $xOy$  совпадает с невозмущенной поверхностью раздела лед — вода, ось  $x$  направлена в сторону движения судна, ось  $z$  — вертикально вверх. Предполагается, что вода — идеальная несжимаемая жидкость плотности  $\rho_2$ , движение жидкости потенциальное. Ледяной покров моделируется вязкоупругой, изначально ненапряженной однородной изотропной пластиной. Предполагается, что период волновых процессов в ледяном покрове намного меньше времени релаксации льда. Согласно [2] для льда принимается закон деформирования линейной упругозапаздывающей среды Кельвина — Фойгта [3].

Исходя из сделанных предположений линеаризованные граничные условия для функции потенциала скорости жидкости  $\Phi(x, y, z)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ , запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{Gh^3}{3} \left(1 - u\tau_\varphi \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^4 w + \rho_1 h u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_2 g w - \rho_2 u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -q \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $G = 0,5E/(1 + \nu)$  — модуль упругости льда при сдвиге;  $E$  — модуль упругости льда при растяжении и сжатии;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $h(x, y)$  — толщина льда;  $\rho_1(x, y)$  — его плотность;  $\tau_\varphi$  — время релаксации деформаций льда или время “запаздывания” [2, 3];  $w(x, y)$  — перемещение поверхности жидкости или вертикальное перемещение льда;  $H = H_1 - b$ ;  $H_1$  — глубина водоема;  $b = \rho_1 h / \rho_2$  — глубина погружения льда при статическом равновесии. Для больших глубин, когда  $H_1$  намного больше  $h$ , можно

считать  $H \approx H_1$ . В дальнейшем предполагается, что  $\rho_1, h$  — постоянные. В качестве расчетных величин модуля сдвига  $G$  и плотности льда  $\rho_1$  следует принимать их приведенные значения, определяемые как интегральные величины по толщине пластины [2].

Согласно [1, 4] величина волнового сопротивления, действующего на СВПА, вычисляется по формуле

$$R = \iint_{\Omega} q \frac{\partial w}{\partial x} dx dy, \quad (1.2)$$

где  $\Omega$  — область распределения нагрузки  $q(x, y)$ .

Линеаризованное кинематическое условие на поверхности раздела лед — вода имеет вид [1]

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = -u \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.3)$$

2. Предположим, что функции  $\Phi(x, y, z), w(x, y), q(x, y)$  удовлетворяют условиям, необходимым для представления их в виде интегралов Фурье по двум переменным  $x$  и  $y$ . Следуя работам [4–6], запишем

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \iint_{\Omega} (F_1 \exp(-kz) + E_1 \exp(kz)) \times \\ &\quad \times \exp(ik((x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta)) dx_1 dy_1, \\ q(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \iint_{\Omega} q(x_1, y_1) \exp(ik((x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta)) dx_1 dy_1, \\ w(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \iint_{\Omega} w(x_1, y_1) \exp(ik((x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta)) dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $F_1, E_1$  — неизвестные функции переменных  $x_1, y_1, k, \theta$ .

Подставляя выражения (2.1) в граничные условия (1.1) с использованием кинематического условия (1.3) и зависимости (1.2), делая замену переменных  $k = \lambda$  и  $k \cos \theta = \alpha$ , после несложных преобразований можно получить формулу для волнового сопротивления  $R$  системы поверхностных давлений  $q(x, y)$  при стационарном режиме движения над ледяной пластиной:

$$R = \frac{1}{\pi^2 \rho_2 u^2} \int_0^{\infty} \lambda^2 \operatorname{th}(\lambda H) d\lambda \int_0^{\lambda} \frac{(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2) \alpha \eta_1 d\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi_1^2 + \eta_1^2)}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \iint_{\Omega} q(x, y) \cos(\alpha x) \cos(y\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) dx dy, \\ C_2 &= \iint_{\Omega} q(x, y) \cos(\alpha x) \sin(y\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) dx dy, \\ C_3 &= \iint_{\Omega} q(x, y) \sin(\alpha x) \cos(y\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) dx dy, \end{aligned}$$

$$C_4 = \iint_{\Omega} q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(y\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) dx dy,$$

$$\xi_1 = \alpha^2 \left( 1 + \frac{\rho_1 h \lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{\rho_2} \right) - \frac{G h^3 \lambda^5 \operatorname{th}(\lambda H)}{3 \rho_2 u} - \frac{g \lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{u^2}, \quad \eta_1 = \frac{\alpha \tau_{\varphi} G h^3 \lambda^5 \operatorname{th}(\lambda H)}{3 \rho_2 u}.$$

По аналогии с работами [6, 7] рассмотрим систему перемещающихся давлений  $q(x, y)$ , описываемую функцией гиперболического тангенса:

$$q(x, y) = (q_0/4) [\operatorname{th}(\alpha_1(x + L/2)) - \operatorname{th}(\alpha_1(x - L/2))] \times \\ \times [\operatorname{th}(\alpha_2(y + L/(2\omega))) - \operatorname{th}(\alpha_2(y - L/(2\omega)))], \quad (2.3)$$

где  $q_0$  — номинальное давление;  $L$  — длина судна;  $\omega = L/B$  — удлинение судна;  $B$  — ширина судна;  $\alpha_1, \alpha_2$  — параметры, характеризующие степень отклонения распределения давления в продольном и поперечном направлениях от прямоугольной формы. Чем больше  $\alpha_1, \alpha_2$ , тем ближе форма распределения давления к прямоугольной. При  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \infty$  давление  $q(x, y)$  стремится к равномерному давлению  $q_0$ , распределенному по прямоугольнику. В настоящей работе, так же как в [6, 7], при численных расчетах использованы значения  $\alpha_1 L = \alpha_2 L = 10$ .

Для стационарного движения системы давлений (2.3) по ледяной вязкоупругой пластине безразмерный коэффициент волнового сопротивления  $A$  вычисляется по формуле

$$R/D = A q_0 / (\rho_2 g L), \quad (2.4)$$

где

$$A = \frac{\pi^2 \omega k_L}{(\alpha_1 L)^2 (\alpha_2 L)^2} \int_0^{\infty} \lambda^2 \operatorname{th}(\lambda \gamma) d\lambda \times \\ \times \int_0^{\lambda} \frac{\sin^2(\alpha/2) \sin^2(\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}/(2\omega)) \alpha \eta d\alpha}{\operatorname{sh}^2(\pi \alpha / (2\alpha_1 L)) \operatorname{sh}^2(\pi \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} / (2\alpha_2 L)) \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} (\xi^2 + \eta^2)},$$

$$D = q_0 L B, \quad k_L = g L / u^2, \quad \omega = L / B, \quad \gamma = H / L,$$

$$\xi = \alpha^2 (1 + \varepsilon \chi \lambda \operatorname{th}(\lambda \gamma)) - \varkappa \chi^3 k_L \lambda^5 \operatorname{th}(\lambda \gamma) - k_L \lambda \operatorname{th}(\lambda \gamma),$$

$$\eta = \alpha \tau_0 \sqrt{k_L} \chi^3 \varkappa \lambda^5 \operatorname{th}(\lambda \gamma), \quad \varepsilon = \rho_1 / \rho_2, \quad \chi = h / L, \quad \tau_0 = \tau_{\varphi} \sqrt{g / L}, \quad \varkappa = G / (3 L \rho_2 g).$$

В отличие от выражения (2.2) здесь переменные интегрирования безразмерны.

**3.** Численные расчеты по формуле (2.4) сравнивались с известными теоретическими результатами по волновому сопротивлению при движении судна по чистой воде [7], в битом льду [5, 6] и по идеально упругой пластине [8]. Кроме того, проводилось сопоставление теоретических и экспериментальных данных о деформации ледяного покрова при движении тела по ледяной пластине [9–13]. Результаты этого сравнения представлены на рис. 1–6.

На рис. 1 штриховой кривой 1 показаны результаты работ [6, 7] для стационарного движения СВПА по чистой воде при  $\omega = 2$ ,  $\gamma = 0,3$ . Штрихпунктирная кривая 2 получена для движения нагрузки, распределенной по закону (2.3), по идеально упругой пластине при  $\omega = 2$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\chi = 0,01$ ,  $E / (12(1 - \nu^2) L \rho_2 g) = 2386$ , где  $E = 5 \cdot 10^9$  Па;  $\nu = 1/3$ ;  $L = 20$  м;  $\rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Интегральная формула, по которой рассчитана кривая 2, не приводится, так как аналогичный результат получен ранее в [8], а сама кривая приводится здесь для сравнения. Сплошные кривые 3–6 соответствуют расчетам по формуле (2.4)

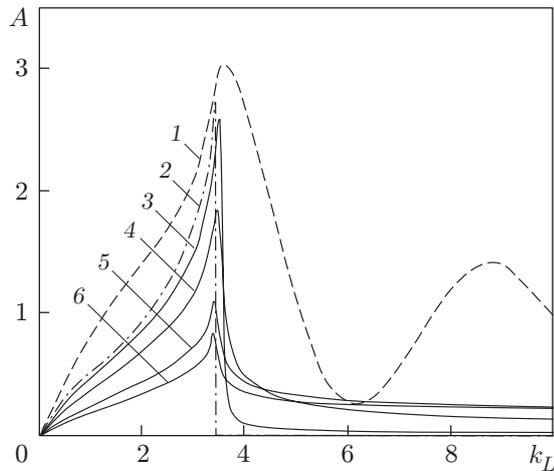


Рис. 1

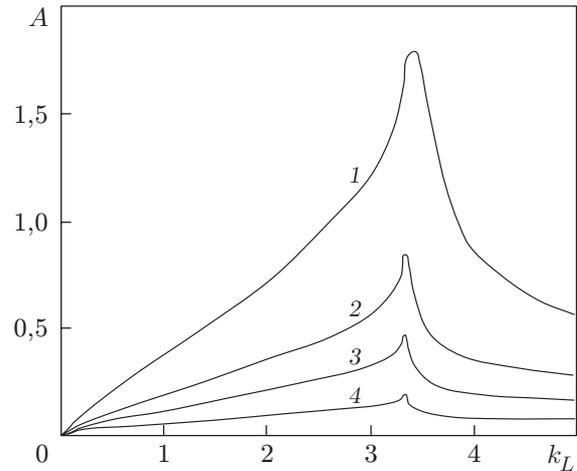


Рис. 2

для безразмерного времени релаксации  $\tau_0 = 0,07; 0,7; 3,5; 7,0$  при  $\omega = 2$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\chi = 0,01$ ,  $\varkappa = 3401,4$ . Анализируя поведение кривой 2, можно сделать вывод, что модель идеально упругого льда в области докритических скоростей дает нулевое волновое сопротивление, что не согласуется с известными экспериментальными данными [12]. Кривая 3, полученная по модели вязкоупругого льда при малом времени релаксации льда  $\tau_0 = 0,07$ , близка к кривой 2, однако в области малых скоростей эта модель дает ненулевые значения волнового сопротивления. С увеличением  $\tau_0$  максимальное значение коэффициента  $A$  уменьшается, что подтверждается результатами работ [10, 11]. В [10, 11] для случая движения по вязкоупругому льду плоского фронта давления показано, что увеличение вязкости приводит к уменьшению максимальной амплитуды вертикального перемещения льда. В работе [12] установлено, что наилучшее приближение к экспериментальным данным модель Кельвина — Фойгта дает при времени релаксации деформации  $\tau_\varphi = 5 \div 10$  с (при  $L = 20$  м  $\tau_0 = 3,5 \div 7,0$ ). В то же время на основе обработки экспериментальных данных авторами [13] сделано предположение, что время релаксации принимает значения от 0,2 до 0,8 с.

На рис. 2 показаны зависимости коэффициента волнового сопротивления  $A$  от параметра  $k_L$  при различных значениях толщины льда. Кривые 1–4 соответствуют параметру  $\chi = 0,005; 0,010; 0,015; 0,025$  при следующих значениях остальных параметров:  $\omega = 2$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\varkappa = 3401,4$ ,  $\tau_0 = 7$ . Видно, что с ростом толщины льда волновое сопротивление уменьшается. Для  $\chi = 0,025$  (что соответствует толщине льда  $h = 0,5$  м при длине судна  $L = 20$  м) характерного для СВПА “горба” на кривой зависимости волнового сопротивления от параметра  $k_L$  почти не видно.

На рис. 3 представлены зависимости коэффициента волнового сопротивления  $A$  от параметра  $k_L$  для различных значений удлинения СВПА при  $\chi = 0,01$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\varkappa = 3401,4$ ,  $\tau_0 = 7$ . Кривые 1–3 соответствуют значениям  $\omega = 1, 2, 3$ . С увеличением параметра удлинения судна, как и в случаях чистой воды и битого льда [5–7], коэффициент волнового сопротивления уменьшается, что подтверждается теоретическими исследованиями [9] деформации идеально упругой ледовой поверхности при движении по ней прямоугольной нагрузки.

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента волнового сопротивления  $A$  от параметра  $k_L$  при различных значениях параметра  $\varkappa$ , зависящего от отношения модуля упругости льда при сдвиге  $G$  к длине судна  $L$ . Кривые 1–3 соответствуют параметру  $\varkappa = 3401,4; 6802,8; 13605,6$  при  $\omega = 2$ ,  $\chi = 0,01$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\tau_0 = 7$ . Из рис. 4 следует, что увеличе-

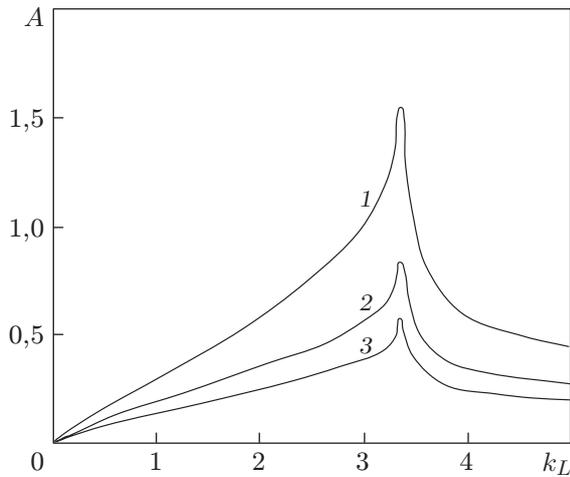


Рис. 3

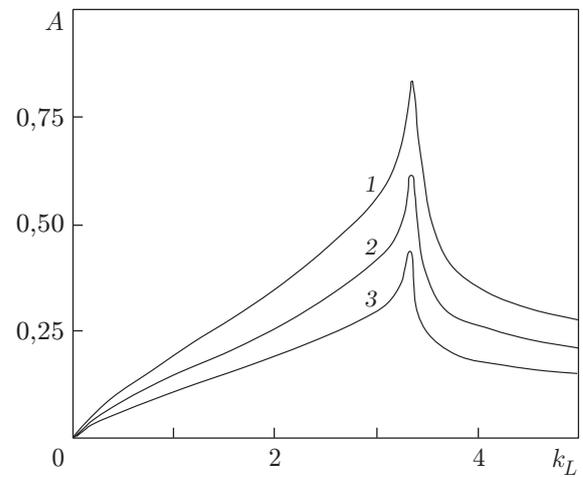


Рис. 4

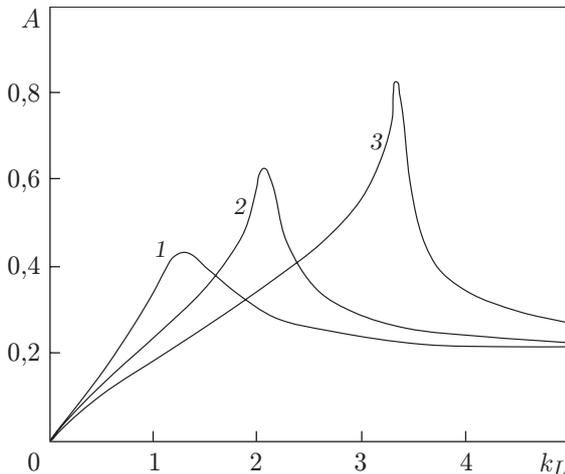


Рис. 5

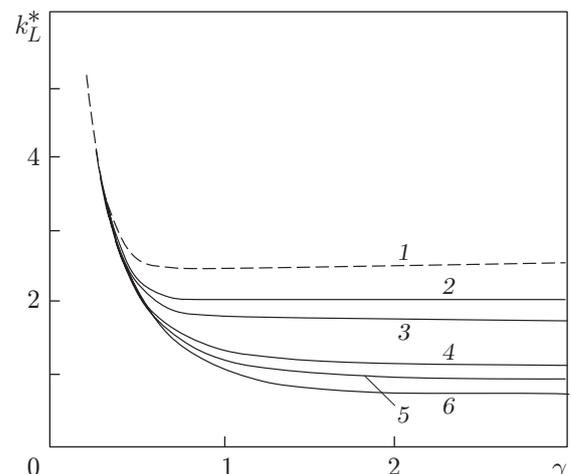


Рис. 6

ние модуля упругости льда при неизменных длине судна  $L$  и безразмерных параметрах  $\omega$ ,  $\chi$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau_0$  приводит к уменьшению волнового сопротивления льда.

На рис. 5 представлены зависимости коэффициента волнового сопротивления СВПА от параметра  $k_L$  при различной относительной глубине водоема. Кривые 1–3 соответствуют параметру  $\gamma = 1,0; 0,5; 0,3$  при  $\omega = 2$ ,  $\chi = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\tau_0 = 7$ ,  $\varkappa = 3401,4$ . Увеличение относительной глубины водоема приводит к уменьшению абсолютного максимума волнового сопротивления и смещению точки максимума в область больших скоростей.

На рис. 6 приведены зависимости параметра  $k_L^*$ , соответствующего максимальному значению волнового сопротивления, от относительной глубины  $\gamma$ . Штриховая кривая 1 соответствует расчетам по формуле (2.8) из работы [6] для стационарного движения СВПА по чистой воде при  $\omega = 2$ . Сплошные кривые 2–6 построены по формуле (2.4) настоящей работы при  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\omega = 2$ . Этими же кривыми описывается зависимость  $k_L^*(\gamma)$  при  $\omega = 1 \div 3$ . Кривые 2, 3 соответствуют  $\tau_0 = 3,5$  и  $\tau_0 = 7$  при  $\chi = 0,005$ ,  $\varkappa = 3401,4$ , кривые 4, 5 —  $\varkappa = 3401,4$  и  $\varkappa = 13\,605,6$  при  $\chi = 0,01$ ,  $\tau_0 = 7$ , кривая 6 —  $\tau_0 = 7$ ,  $\chi = 0,025$ ,  $\varkappa = 3401,4$ . Кроме того, кривая 5 соответствует параметрам  $\varkappa = 3401,4$ ,  $\chi = 0,015$ ,  $\tau_0 = 7$ . Из анализа поведения кривых следует, что при малых относительных глубинах водоема ( $\gamma \leq 0,4$ ) влияние параметров  $\omega$ ,  $\chi$ ,  $\tau_0$ ,  $\varkappa$  на точку  $k_L^*$  максимального волнового сопротив-

ления незначительно. При больших глубинах ( $\gamma > 0,4$ ) рост параметров  $\chi$ ,  $\tau_0$ ,  $\varepsilon$  приводит к смещению точки  $k_L^*$  в область больших скоростей, при этом с увеличением глубины водоема влияние параметров  $\chi$ ,  $\tau_0$ ,  $\varepsilon$  увеличивается. Вывод о том, что параметры  $\chi = h/L$  и  $\varepsilon = G/(3L\rho_2g)$  влияют на величину критической скорости (соответствующей максимальному волновому сопротивлению), подтверждается результатами монографии [11]. В [10, 11] показано, что изменение вязкости приводит к незначительному смещению точки максимальной амплитуды  $w(x, y)$  в область малых скоростей. Последний вывод не совпадает с результатами настоящих исследований, что, по-видимому, объясняется различием моделей вязкоупругого тела, принятых для льда. Напомним, что в [10, 11] рассматривается модель Максвелла, а в данной работе — модель Кельвина — Фойгта [3]. Кроме того, следует отметить, что если от безразмерной величины  $k_L^*$  перейти к скорости судна  $u$ , то величина  $u^*$ , соответствующая максимальному волновому сопротивлению, для малой глубины водоема ( $\gamma \leq 0,4$ ) подчиняется закону  $u^* = \sqrt{gH}$ . Для больших глубин ( $\gamma > 0,4$ ) значение  $u^*$  будет находиться в интервале  $(u_{\min}, \hat{u})$ , где  $\hat{u} = \sqrt{gH}$ ;  $u_{\min} = 2(Dg^3/(27\rho_2))^{1/8}$  [2];  $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ . Для малых времен релаксации  $\tau_\varphi$  величина  $u^*$  будет близка к  $u_{\min}$ . Данный результат также согласуется с выводами работы [11, гл. 7]. Удлинение судна в диапазоне  $\omega = 1 \div 3$  не влияет на значение  $k_L^*$ .

Выполненные теоретические исследования позволяют определить зависимость волнового сопротивления СВПА при их эксплуатации в условиях сплошного ледяного покрова от основных характеристик судна и параметров ледовой обстановки. Предложенное решение более полно (по сравнению с [8]) описывает физические процессы, обуславливающие возникновение волнового сопротивления СВПА на стационарных режимах движения по ледяному покрову.

Полученные результаты могут быть использованы при оценке ледокольных качеств СВПА, применяемых для разрушения льда резонансным способом [12].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бенуа Ю. Ю., Дьяченко В. К., Колызаев Б. А. и др. Основы теории судов на воздушной подушке. Л.: Судостроение, 1970.
2. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
3. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические модели неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
4. Большаков В. П. Волновое сопротивление системы поверхностных давлений // Тр. XIII науч.-техн. конф. Науч.-техн. о-ва судостроит. пром-сти по теории корабля, Ленинград, 10–15 сент. 1963 г. Л.: Изд-во ЦНИИ им. А. Н. Крылова, 1963. Вып. 49. С. 68–88.
5. Козин В. М., Милованова А. В. Волновое сопротивление амфибийных судов на воздушной подушке в битом льду // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 24–28.
6. Козин В. М., Погорелова А. В. Влияние битого льда на волновое сопротивление СВПА при нестационарном режиме движения // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 48–53.
7. Doctors L. J., Sharma S. D. The wave resistance of an air cushion vehicle in steady and acceleration motion // J. Ship Res. 1972. V. 16, N 4. P. 248–260.
8. Ковалев А. Н. Определение волнового сопротивления движению судов на воздушной подушке над ледяным покровом: Дис. ... канд. техн. наук. Н. Новгород, 1998.
9. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N. W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of rectangular load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.
10. Hosking R. J., Sneyd A. D., Waugh D. W. Viscoelastic response of floating ice plate to a moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 409–430.

11. **Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J.** Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
12. **Козин В. М.** Обоснование исходных данных для выбора основных параметров судов на воздушной подушке, предназначенных для разрушения ледяного покрова резонансным способом: Дис. ... канд. техн. наук. Горький, 1983.
13. **Takizava T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 171–180.

*Поступила в редакцию 22/XI 2001 г.,  
в окончательном варианте — 9/VII 2002 г.*

---