

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА К РАСЧЕТУ ВНУТРЕННИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

УДК 519.6:532.5

В. А. Башкин, И. В. Егоров, Д. В. Иванов

Центральный аэрогидродинамический институт,  
140160 Жуковский Московской области

Методика численного интегрирования двумерных уравнений Навье — Стокса и Эйлера [1] распространена на решение задач внутренней аэродинамики. Разработана процедура построения расчетной сетки со сгущением узлов в областях пограничного слоя в зависимости от числа Рейнольдса. Проведены расчеты сверхзвукового течения совершенного газа в плоском канале переменного сечения, и показано влияние числа Рейнольдса на структуру поля течения и теплообмен.

Развитие авиационно-космической техники привлекло большое внимание к сверхзвуковым течениям применительно к задачам внешней аэродинамики и разработке эффективных методов их численного анализа. Для описания поля течения несжимаемой и сжимаемой жидкости в рамках механики сплошной среды обычно используются уравнения Эйлера или Навье — Стокса; в силу нелинейности этих уравнений в частных производных их решение может быть получено только методами вычислительной аэродинамики. В частности, в [1] предложен эффективный метод численного интегрирования двумерных уравнений Навье — Стокса при наличии отрыва и присоединения потока, в основе которого лежит применение неявных монотонных разностных схем второго порядка аппроксимации и модифицированного метода Ньютона для решения сеточных уравнений. Этот метод использовался при исследовании ряда задач, связанных с обтеканием затупленных тел сверх- и гиперзвуковым потоком совершенного газа [2, 3] и неравновесного воздуха [4, 5], а также при изучении сверхзвуковых течений невязкого газа.

В связи с разработкой гиперзвуковых воздушно-реактивных двигателей возрос интерес к исследованиям внутренних сверхзвуковых течений. Задачи внутренней аэродинамики обладают своими специфическими особенностями, и из-за этого требуется доработка и адаптация численного алгоритма решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса для моделирования внутренних сверхзвуковых течений. В [6] алгоритм, разработанный в [1], был распространен на случай внутренних течений совершенного газа при умеренных числах Рейнольдса. При этом важная роль отводилась построению расчетной сетки интегральным методом с использованием интеграла Кристоффеля — Шварца. В [6] выполнена также большая методическая работа о влиянии некоторых определяющих параметров разностной схемы на решение уравнений Эйлера и Навье — Стокса.

В настоящей работе проведено дальнейшее развитие данного метода для расчета сверхзвуковых внутренних течений при больших числах Рейнольдса  $Re$ . При этом особое внимание уделено проблеме построения расчетной сетки со сгущением узлов в областях пограничного слоя; важность этой проблемы возрастает по мере увеличения  $Re$ . Эффективность работы программного комплекса проверялась на примере расчета сверхзвукового течения совершенного газа в канале переменного сечения в широком диапазоне изменения  $Re$ .

1. В произвольной криволинейной системе координат  $\xi, \eta$  ( $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  — декартовы координаты) нестационарные двумерные уравнения Эйлера и Навье — Стокса

записываются в безразмерных переменных в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = \hat{0}. \quad (1.1)$$

Здесь векторы  $\mathbf{Q}, \mathbf{E}, \mathbf{G}$  связаны с соответствующими векторами  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{G}_1$  в декартовой системе координат формулами  $\mathbf{Q} = J\mathbf{Q}_1, \mathbf{E} = J(\mathbf{E}_1\partial\xi/\partial x + \mathbf{G}_1\partial\xi/\partial y), \mathbf{G} = J(\mathbf{E}_1\partial\eta/\partial x + \mathbf{G}_1\partial\eta/\partial y)$ , где  $J = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$  — якобиан преобразования.

Декартовы компоненты векторов  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{G}_1$  для двумерных уравнений Эйлера имеют вид

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix},$$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{G}_1$  для двумерных уравнений Навье — Стокса запишем в форме

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{\mu}{\text{Re}_{\infty}} \left( \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{V} - \tau_{11} \right) \\ \rho uv - \mu \tau_{12} / \text{Re}_{\infty} \\ \rho uH + \frac{\mu}{\text{Re}_{\infty}} \left( \frac{2}{3} u \text{div} \mathbf{V} - u\tau_{11} - v\tau_{12} - \frac{1}{\text{Pr}(\gamma - 1)M_{\infty}^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p + \frac{\mu}{\text{Re}_{\infty}} \left( \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{V} - \tau_{22} \right) \\ \rho vH + \frac{\mu}{\text{Re}_{\infty}} \left( \frac{2}{3} v \text{div} \mathbf{V} - u\tau_{12} - v\tau_{22} - \frac{1}{\text{Pr}(\gamma - 1)M_{\infty}^2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{pmatrix}$$

$$(\tau_{11} = 2\partial u/\partial x, \quad \tau_{12} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x, \quad \tau_{22} = 2\partial v/\partial y, \quad \text{div} \mathbf{V} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y),$$

а вектор  $\mathbf{Q}_1$  имеет тот же вид, что для уравнений Эйлера. Здесь  $e$  — полная энергия на единицу объема;  $H$  — полная энтальпия;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости;  $u, v$  — декартовы компоненты вектора скорости;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $M_{\infty}$  — число Маха набегающего потока;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости;  $\text{Pr}$  — число Прандтля.

Система уравнений для совершенного газа замыкается уравнением состояния  $p = \rho T / \gamma M_{\infty}^2$ .

При обезразмеривании уравнений Эйлера и Навье — Стокса декартовы координаты отнесены к характерному линейному размеру  $L$ , компоненты вектора скорости — к скорости набегающего потока, давление — к удвоенному скоростному напору набегающего потока, остальные газодинамические переменные — к их значениям в набегающем потоке.

2. В физической плоскости расчетная область представляет собой канал, ограниченный сверху и снизу твердыми поверхностями (рис. 1). При решении задачи полностью неявным методом для замыкания системы дифференциальных уравнений (1.1) применялись следующие граничные условия.

На входной границе для уравнений Эйлера и Навье — Стокса использовались инва-

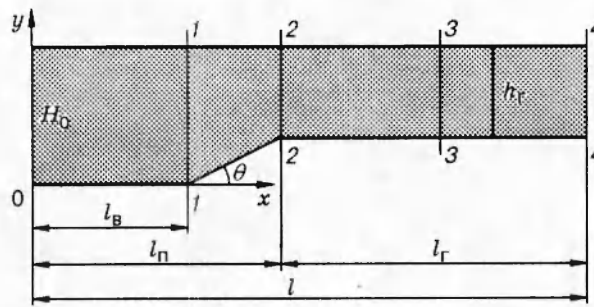


Рис. 1

рианты Римана

$$A_1 = \frac{2c}{\gamma - 1} - u \frac{\partial \xi}{\partial x} - v \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad A_2 = \frac{r}{\rho^2}, \quad A_3 = v \frac{\partial \xi}{\partial x} - u \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad A_4 = \frac{2c}{\gamma - 1} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

( $c$  — скорость звука), соответствующие условию излучения расходящейся волны. При решении задачи в каждой точке анализировались знаки собственных чисел

$$\lambda_1 = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - c \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\lambda_3 = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \lambda_4 = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2},$$

определяющих направление распространения возмущений относительно  $\xi = \text{const}$ . При  $\lambda_i \geq 0$  соответствующий инвариант вычислялся по значениям газодинамических переменных набегающего потока. При  $\lambda_i < 0$  применялась линейная экстраполяция  $A_i$  по значениям газодинамических переменных, отвечающих внутренним точкам расчетной области.

На выходной границе (как показали численные эксперименты) использование «мягких» условий экстраполяции вектора искомых газодинамических переменных  $\mathbf{F} = (u, v, p, T)^T$  с аппроксимацией вида  $3\mathbf{F}_i - 4\mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_{i-2} = 0$  вместо экстраполяции инвариантов Римана повысило устойчивость итерационного процесса решения разностной задачи и позволило рассчитать режимы со сверхзвуковым течением в выходном сечении, а также некоторые режимы с дозвуковым течением в выходном сечении.

Для уравнений Эйлера на верхней и нижней поверхности применялись: условие экстраполяции касательной составляющей вектора скорости  $V_\tau$  в виде  $V_\tau^{i+1} - 2V_\tau^i + V_\tau^{i-1} = 0$  (на верхней границе  $V_\tau = u$ , а на нижней  $V_\tau = u \cos \sigma + v \sin \sigma$ ,  $\sigma$  — местный угол наклона нижней поверхности),  $V_N = 0$  ( $V_N$  — нормальная составляющая вектора скорости, на верхней границе  $V_N = v$ , а на нижней  $V_N = u \sin \sigma - v \cos \sigma$ ), экстраполяция давления с постоянной производной вдоль нормали к поверхности ( $\partial p / \partial N = 0$ ),  $H = H_\infty$ , а для уравнений Навье — Стокса на верхней и нижней поверхности использовались: условия прилипания и непротекания  $u = v = 0$ , экстраполяция давления вдоль нормали к стенке с постоянной производной ( $\partial p / \partial N = 0$ ),  $T = T_w$ .

3. При построении расчетной сетки для двумерной задачи применялся интегральный метод [7], основанный на конформном преобразовании Кристоффеля — Шварца. Задача построения расчетной сетки сводится к решению дискретного аналога интегрального уравнения, полностью определяемого геометрией канала, и к последующему вычислению координат узлов сетки простым интегрированием [8]. Последнее означает возможность построения различных сеток в канале по сути дела алгебраическим методом, обладающим достаточной скоростностью.

В переменных  $\xi, \eta$  расчетная область имеет форму прямоугольника и покрывается равномерной сеткой с заданными шагами  $h_\xi = (\xi_{\max} - \xi_{\min})/N_\xi$ ,  $h_\eta = (\eta_{\max} - \eta_{\min})/N_\eta$ , где  $N_\xi$  и  $N_\eta$  — число узлов расчетной сетки в продольном и поперечном направлении. Метрические коэффициенты в узлах сетки вычисляются по формулам численного дифференцирования.

По мере увеличения  $Re$  уменьшается толщина пограничного слоя вблизи твердой поверхности, и для хорошего разрешения поля течения в этой области необходимо наличие достаточно большого числа узлов расчетной сетки в поперечном по отношению к твердой поверхности направлении.

Рассмотрим сначала алгоритм сгущения узлов сетки по одному направлению, который затем легко обобщается на двумерный случай. Пусть на отрезке  $[a_1, a_N]$  выделено несколько зон  $[a_i, a_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , а сетка содержит  $M$  узлов. Требуется распределить узлы по зонам так, чтобы в каждой из них оказалась заданная доля  $p_i$  от общего числа узлов ( $\sum p_i = 1$ ).

Непрерывный аналог этой дискретной задачи формулируется так: найти строго возрастающую функцию  $f(\xi)$ , которая без ограничения общности считается заданной на отрезке  $[0, 1]$  и принимает в точках 0 и 1 значения  $a_1$  и  $a_N$  соответственно, а в точках  $\xi_{i+1/2} = (\xi_i + \xi_{i+1})/2$  — значения  $(a_i + a_{i+1})/2$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , где  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k$ . Причем функция  $f(\xi)$  должна быть достаточно гладкой.

Решение подобной задачи не является единственным. Одно из возможных решений строится следующим образом. Рассмотрим функцию  $h(\xi) = df/d\xi$ , которая в непрерывной формулировке задачи будет аналогом шага расчетной сетки. Введем понятие характерного шага  $i$ -й зоны:  $h_i = (a_{i+1} - a_i)/(\xi_{i+1} - \xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . Если проинтегрировать кусочно-непрерывную функцию  $h_*(\xi)$  ( $h_*(\xi) = h_i$  для  $\xi \in [\xi_i^+, \xi_{i+1}^-]$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ ), то получится функция  $f_*(\xi)$ , удовлетворяющая условиям задачи, но не являющаяся достаточно гладкой: в точках  $\xi_i$  ее производная терпит разрыв первого рода.

Для устранения этого недостатка необходимо заменить разрывы первого рода функции  $h_i(\xi)$  в точках  $\xi_i$  на непрерывное изменение  $h(\xi)$  от  $h_{i-1}$  до  $h_i$  на отрезке, содержащем точку  $\xi_i$  ( $i = 2, \dots, N-1$ ). Обозначим через  $g_i(\xi)$  функцию, реализующую такое плавное изменение, а через  $[y_1, y_2]$  — область ее определения для каждого  $i$ ; при этом  $(y_1 + y_2)/2 = \xi_i$ . Необходимо, чтобы функция  $g_i(\xi) - (h_{i-1} + h_i)/2$  была нечетной относительно точки  $\xi_i$ . В качестве  $g$  можно использовать функцию

$$g_i(\xi) = h_{i-1} + \frac{1}{2} (h_i - h_{i-1}) \left[ \sin \left( \frac{\pi(\xi - \xi_i)}{y_2 - y_1} \right) + 1 \right].$$

Выбор области определения функции  $g_i$  в некоторой степени произволен; в настоящих расчетах она устанавливалась из условия  $y_2 - y_1 = \min(p_i, p_{i-1})$  для каждого  $\xi_i$ .

Искомая функция  $h(\xi)$  совпадает с  $h_*(\xi)$  вне области определения функции  $g_i$  и дополняется до непрерывной функцией  $g_i$  на отрезке  $[y_1, y_2]$ . Функция распределения узлов  $f(\xi)$  получается после интегрирования  $h(\xi)$  в пределах от 0 до  $\xi$ . Построенная таким образом функция  $f(\xi)$  дважды непрерывно дифференцируема.

Обобщим алгоритм сгущения узлов расчетной сетки на двумерный случай. Пусть с помощью конформного отображения построена сетка, являющаяся равномерной в плоскости  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, N_\xi$ ,  $j = 1, \dots, N_\eta$ . В плоскости  $(x, y)$  ей соответствует сетка  $(X_{ij}, Y_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, N_X$ ,  $j = 1, \dots, N_Y$ . Предположим, что необходимо изменить распределение сеточных узлов в поперечном направлении (по  $\eta$ ). Пусть  $i = i_0$ . Используем для  $X_{i_0j}$ ,  $Y_{i_0j}$  ( $j = 1, \dots, N_Y$ ) описанный выше алгоритм сгущения узлов одномерной сетки по  $j$  и затем повторим эту операцию для всех  $i_0 = 1, \dots, N_X$ . Полученная таким образом неравномерная сетка может быть применена в расчетах. В плоскости  $(\xi, \eta)$  сетка определяется номером узла и равномерна.

В данной работе вблизи верхней и нижней границ расчетной области выбирались две зоны толщиной  $2/\sqrt{Re}$ , в каждой из которых после сгущения содержалось 20 % от общего числа узлов в поперечном направлении.

4. При построении разностной схемы использовался интегроинтерполяционный метод. Разностные аналоги законов сохранения имеют вид

$$\frac{Q_{j,k}^{n+1} - Q_{j,k}^n}{\tau} + \frac{E_{j+1/2,k}^{n+1} - E_{j-1/2,k}^{n+1}}{h_\xi} + \frac{G_{j,k+1/2}^{n+1} - G_{j,k-1/2}^{n+1}}{h_\eta} = 0,$$

где  $n$  — номер временного слоя;  $j, k$  — номера узла по координатам  $\xi, \eta$  соответственно;  $\tau$  — величина шага по времени. Полностью неявная схема является консервативной, т. е. обеспечивается выполнение законов сохранения даже при наличии разрывных решений.

Для аппроксимации конвективных потоков в полуцелых узлах применялась монотонизированная схема типа Годунова [9] с приближенным решением задачи Римана о распаде произвольного разрыва [10]:

$$E_{j+1/2} = 0,5(E_L + E_R - R\Phi(\lambda)R^{-1}(Q_R - Q_L)).$$

Здесь

$$Q = J \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{vmatrix}; \quad \Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \Psi(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi(\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi(\lambda_4) \end{vmatrix};$$

$R$  — матрица, столбцами которой являются правые собственные векторы оператора  $\partial E / \partial Q$ . Левые  $Q_L$  и правые  $Q_R$  значения зависимых переменных  $Q$  вычислялись со вторым порядком точности (MUSCL — Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws — монотонная схема с ориентированными разностями для законов сохранения) по формулам  $Q_L = Q_i + 0,5g_i$ ,  $Q_R = Q_{j+1} - 0,5g_{j+1}$ ,  $g_j = f(\Delta_{j+1/2}Q, \Delta_{j-1/2}Q)$ . В данных расчетах использовались функция-ограничитель  $f(x, y)$  и функция  $\Psi(\lambda)$ :

$$f(x, y) = \min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} x, & xy > 0 \text{ и } |x| \leq |y|, \\ y, & xy > 0 \text{ и } |x| > |y|, \\ 0, & xy \leq 0, \end{cases} \quad \Psi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & \text{при } |\lambda| \geq \varepsilon, \\ (\lambda^2 + \varepsilon^2)/(2\varepsilon) & \text{при } |\lambda| \leq \varepsilon \end{cases}$$

( $\varepsilon$  — малый параметр, значение которого принималось равным 0,1 при интегрировании уравнений Эйлера и  $10^{-3}$  — уравнений Навье — Стокса).

Для вычисления собственных значений и собственных векторов применялся метод Рунге [10] для приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва:

$$c_{LR} = \frac{c_L\sqrt{\rho_L} + c_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad u_{LR} = \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad v_{LR} = \frac{v_L\sqrt{\rho_L} + v_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

(нижние индексы  $L$  и  $R$  соответствуют значениям газодинамических переменных слева и справа от полуцелого узла, в котором проводится аппроксимация потока).

Для аппроксимации диффузионной составляющей вектора потока в уравнениях Навье — Стокса использовалась разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности.

Шаблон, на котором аппроксимируются двумерные уравнения Эйлера и Навье — Стокса состоит в общем случае соответственно из 9 и 13 точек.

В полуцелых узлах, примыкающих к границам расчетной области, опробованы два способа аппроксимации конвективного потока: а) введение фиктивного узла за пределами расчетной области (значения газодинамических переменных в нем вычисляются путем

экстраполяции из расчетной области с постоянной производной) с последующим вычислением потоков по TVD-схеме второго порядка точности (Total Variation Diminishing — схема с невозрастающей полной вариацией); б) применение немонотонной схемы центральных разностей по двум точкам, имеющей также второй порядок точности.

Сравнение этих способов показало, что для уравнений Эйлера они дают примерно одинаковые результаты (максимальные различия порядка 8%), а для уравнений Навье — Стокса способ б) обеспечивает лучшую сходимость итерационного процесса. По-видимому, немонотонность схемы центральных разностей не играет большой роли при наличии физической вязкости. Поскольку в данной работе проводится сопоставление результатов, полученных для уравнений Эйлера и Навье — Стокса, то способ б) применялся в обоих случаях.

Полученная неявная нелинейная разностная схема является безусловно устойчивой на линейной задаче, что позволяет находить стационарное решение разностных уравнений за один бесконечно большой шаг по времени.

5. Нелинейную систему разностных уравнений, полученную в результате аппроксимации дифференциальной системы (1.1), можно записать в виде  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$  ( $\mathbf{X}$  — вектор искомых переменных,  $\mathbf{F}$  — нелинейный сеточный оператор). Для двумерных уравнений Эйлера и Навье — Стокса  $\dim(\mathbf{F}) = \dim(\mathbf{X}) = 4 \times N_X \times N_Y$ .

В настоящей работе для решения этой системы использован алгоритм  $\mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{X}_N - \tau_{N+1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}_N)$ ,  $\mathbf{D} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}_N$  (модифицированный метод Ньютона, имеющий квадратичную скорость сходимости при  $\tau_N = 1$ ). В процессе численного решения параметр  $\tau_N$  определялся по формуле [11]

$$\tau_{N+1} = \frac{(\Delta \mathbf{X}_N - \Delta \mathbf{X}_{N-1}, \mathbf{X}_N - \mathbf{X}_{N-1})}{(\Delta \mathbf{X}_N - \Delta \mathbf{X}_{N-1})^2}$$

( $\Delta \mathbf{X}_N$  — вектор поправок). По мере сходимости итерационного процесса  $\tau_N \rightarrow 1$ .

Формирование матрицы Якоби осуществлялось при помощи конечных приращений вектора невязки по вектору искомых сеточных переменных. При аппроксимации уравнений Эйлера по описанной выше схеме оператор  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}$  имеет разреженную блочную 9-диагональную структуру, а при аппроксимации уравнений Навье — Стокса — 13-диагональную структуру, элементарный блок которых — плотная матрица размера  $4 \times 4$ .

Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности, осуществлялось при помощи прямого метода LU-разложения (матрица  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}_N = \mathbf{L} \times \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{L}$  — нижняя,  $\mathbf{U}$  — верхняя треугольные матрицы).

Для снижения суммарного числа арифметических операций предварительно анализировалась структура разреженности матриц  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{U}$  и проводилась перенумерация неизвестных по обобщенному методу вложенных сечений [12]. Эта методика была многократно опробована в численных экспериментах и доказала свою надежность и высокую эффективность [1, 13].

6. Расчетная конфигурация представляет собой канал переменного сечения (рис. 1). В качестве характерного линейного размера принята высота канала  $H_0$  во входном сечении. Рассматривался канал с относительной длиной  $l = l^*/H_0 = 4$ , относительная длина входной области  $l_b = 1$ . Переход от входного участка к участку канала с меньшей высотой («горло» с  $h_r = 0,75$ ) осуществляется на участке длиной  $l_n - 1 = 0,6869$  с постоянным углом наклона стенки  $\theta = 20^\circ$ . Относительная длина «горла»  $l_r = 2,3131$  или в масштабах «горла»  $l_r/h_r = 3,08$ .

Расчеты проводились при постоянном числе Маха на входе в канал  $M_\infty = 4,0$  для идеального и вязкого совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ , числом Прандтля  $Pr = 0,7$  и динамической вязкостью, зависящей от температуры по степенному закону ( $\mu \sim T^{0,7}$ ). Обтекаемые поверхности принимались изотермическими с температурным



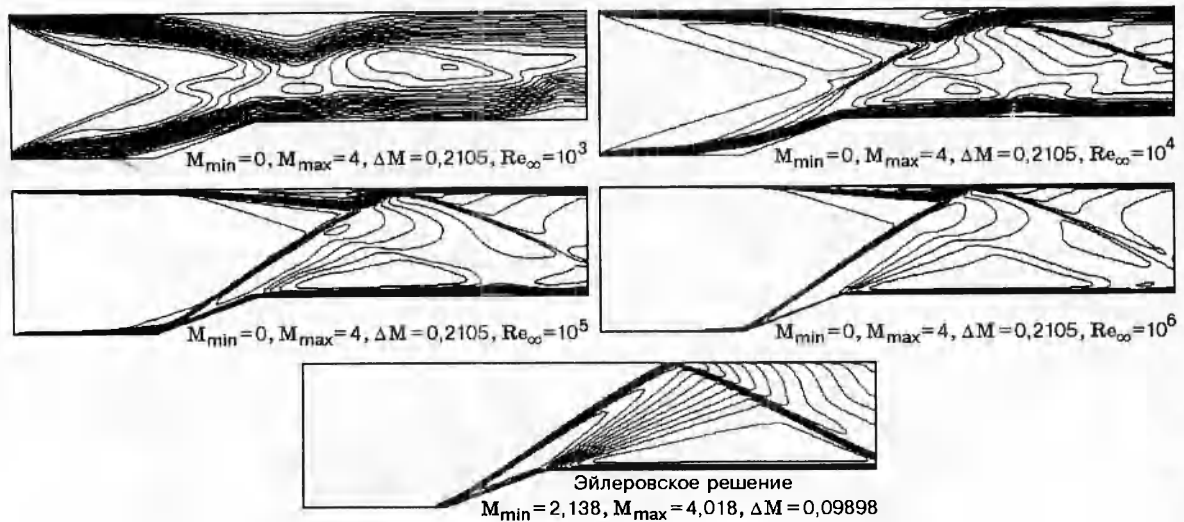


Рис. 2

фактором  $T_{w0} = T_w/T_0 = 0,5$ , где  $T_0 = 1 + 0,5(\gamma - 1)M_\infty^2$  — температура торможения набегающего потока.

Для оценки влияния сетки на результаты моделирования вариант с течением вязкого газа ( $Re_\infty = 1000$ ,  $M_\infty = 4$ ,  $T_{w0} = 0,5$ ) был рассчитан на сетках  $101 \times 61$  и  $101 \times 121$ . Сопоставление результатов показало, что они различаются в основном на экстремумах переменных в пределах  $1 \div 2\%$  [6]. Это позволило сделать вывод, что для рассматриваемой задачи сетка  $101 \times 61$  достаточно хорошо разрешает все особенности поля течения, и ее дальнейшее измельчение не вносит больших количественных изменений в получаемые результаты.

Несмотря на это, в настоящей работе с целью наилучшего разрешения экстремумов искомых функций все результаты получены на сетке  $101 \times 101$  с использованием монотонной схемы второго порядка точности. Среднее время работы центрального процессора для расчета одного варианта составило 0,8 ч для ЭВМ RS-6000 класса рабочая станция.

7. Общее представление о структуре поля течения в плоском канале и влиянии на нее числа Рейнольдса дают картины изолиний и томограммы различного рода. В качестве примера на рис. 2 приведены картины изолиний  $M = \text{const}$ , а на рис. 3 — томограммы поля температуры.

При наименьшем числе Рейнольдса ( $Re_\infty = 10^3$ ) силы внутреннего трения проявляются во всем поле течения. Возмущения от входных кромок, обусловленные толстым пограничным слоем, распространяются в виде скачков уплотнения вниз по потоку и ограничивают на входе сравнительно малую область невозмущенного потока — потоки на нижней и верхней поверхности начинают взаимодействовать при  $x \approx 1$ , т. е. смыкание возмущенных потоков происходит на расстоянии порядка характерного линейного размера.

В возмущенном поле течения толстые пограничные слои, которые почти не оставляют места невязкому ядру потока, едва позволяют наметить контуры взаимодействующих скачков уплотнения. При обтекании клиновидной поверхности образуется область отрывного течения; при этом скачки уплотнения взаимодействуют с верхней поверхностью, вызывая на ней обширную замкнутую отрывную область, и после отражения покидают расчетную область. На верхней поверхности при обтекании отрывной зоны образуется скачок уплотнения, который попадает на нижнюю поверхность, вызывает на ней отрыв потока и после отражения также покидает расчетную область.

С увеличением  $Re$  пограничные слои утоньшаются, возмущения от входных кромок

постепенно вырождаются в линии Маха, что приводит к возрастанию входной области. увеличивается «невязкое» ядро потока и все более четко формируется система взаимодействующих скачков уплотнения. Области отрывного течения сохраняются, перемещаясь вдоль канала и меняясь по своим размерам.

При наибольших значениях  $Re$  формируется структура поля течения, очень близкая к той, которая имеет место при движении идеального газа. При этом на нижней поверхности канала отрывные области почти незаметны, в то время как на верхней поверхности наблюдается обширная замкнутая область отрывного течения, вызванная взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем.

На картинах изолиний и томограммах не видны особенности тонкой структуры отрывных зон, которые устанавливаются при анализе других характеристик потока.

8. Полезная информация вытекает из анализа профилей газодинамических переменных в различных сечениях канала.

В сечении 1-1 профили газодинамических переменных сильно возмущены, и в окрестности нижней поверхности уже проявляется влияние клиновидной поверхности, что приводит к нарушению симметрии профилей относительно оси канала. При этом для всех рассмотренных значений  $Re$  обтекание угловой точки происходит с отрывом потока. С увеличением  $Re$  ядро невязкого потока возрастает и совпадает с невозмущенным потоком (как это имеет место в рамках уравнений Эйлера).

В сечении 2-2 (начальное сечение «горла») профили газодинамических переменных указывают на формирование «классического» профиля по мере увеличения  $Re$  — от сильно возмущенного профиля до ступенчатого, обусловленного прохождением скачка уплотнения через сечение 2-2. Профили также подтверждают, что угловая точка «горла» на всех режимах обтекает безотрывно.

В сечении 3-3 (среднее сечение «горла») профили сильно возмущены и в центральной части согласуются с эйлеровским профилем.

В сечении 4-4 (выходное сечение «горла», рис. 4, где линии 1-4 отвечают  $Re_\infty = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ , а 5 — невязкому течению) профили газодинамических переменных сильно возмущены, поскольку на рассматриваемых длинах «горла» отраженные скачки уплотнения выходят за пределы расчетной области. При этом даже при наибольшем значении  $Re$  профили газодинамических переменных отличаются от эйлеровского решения из-за различий в структуре потока: в эйлеровском решении выходное сечение пересекает один скачок уплотнения, в вязком — два.

Как отмечалось выше, на верхней стороне канала образуется обширная замкнутая область отрывного течения. Для установления структуры этой области на рис. 5 показано развитие профилей продольного компонента скорости в пристеночном слое в зависимости от  $Re_\infty$  для двух сечений ( $a - x = 1,539$ ,  $b - x = 2,308$ , кривые 1-4 соответствуют  $Re_\infty = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ). В сечении (рис. 5,а), которое находится в начале отрывной области, профиль скорости однотипен при всех  $Re$ , а в сечении (рис. 5,б), расположенном в центральной части области отрыва, с ростом  $Re$  происходит изменение типа профиля скорости. Это указывает на то, что при больших  $Re$  в отрывной области создаются условия для вторичного отрыва и присоединения потока.

9. Распределение коэффициента давления  $c_p$  на верхней и нижней поверхности канала (рис. 6, где  $a$  — нижняя поверхность,  $b$  — верхняя, кривые 1-4 отвечают  $Re_\infty = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ , а 5 — невязкому течению) еще раз показывает, что с увеличением числа Рейнольдса в главных чертах распределение  $c_p$  приближается к эйлеровскому решению. Однако при этом сохраняются некоторые локальные отличия, обусловленные влиянием сил внутреннего трения. В окрестности входных кромок канала коэффициент давления увеличивается при  $x \rightarrow 0$ ; в рамках уравнений Навье — Стокса при выполнении условия прилипания он должен неограниченно возрастать. В вязком потоке на нижней стенке пер-



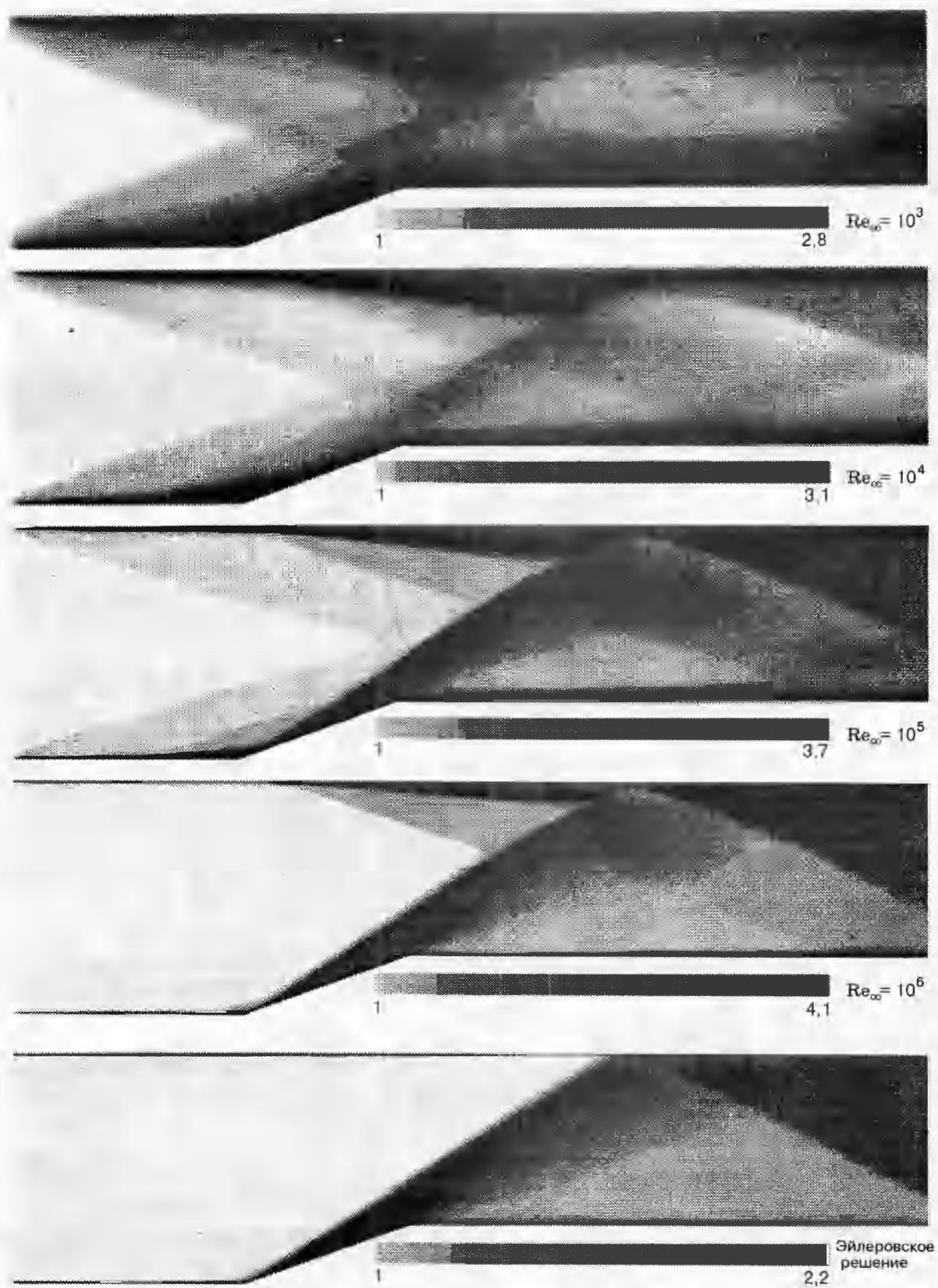


Рис. 3

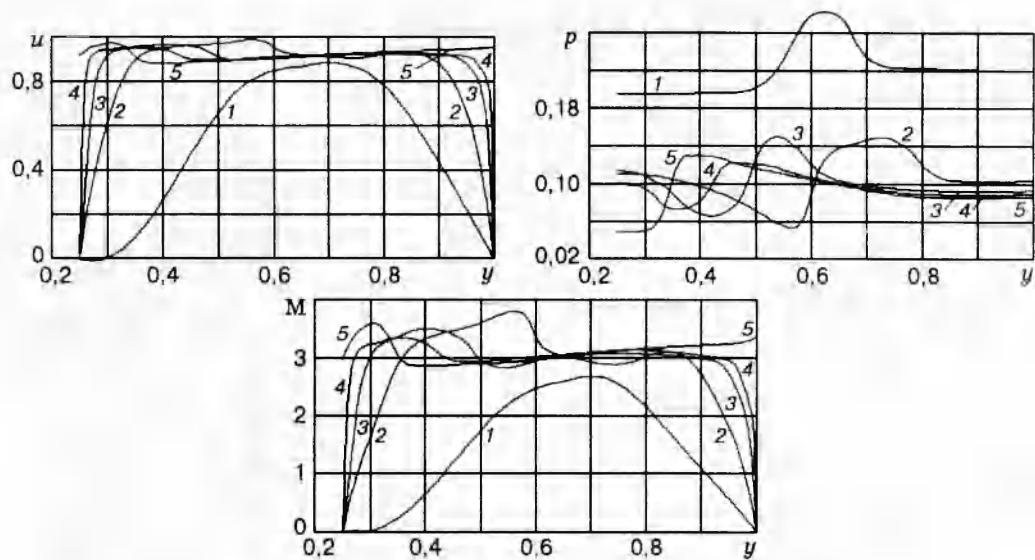


Рис. 4

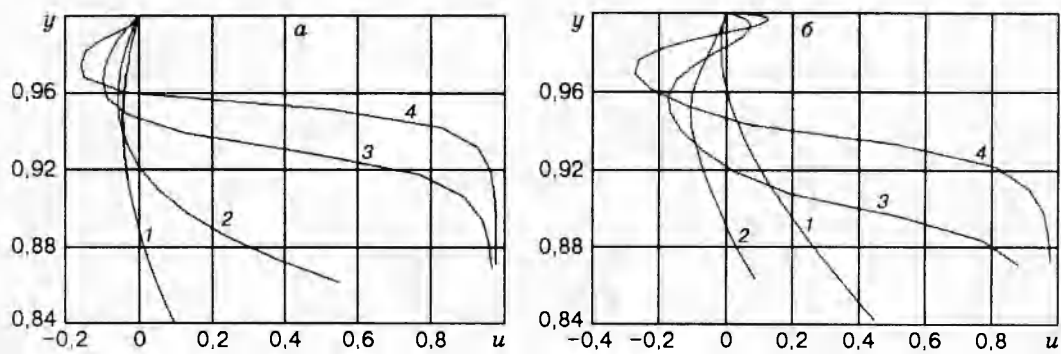


Рис. 5

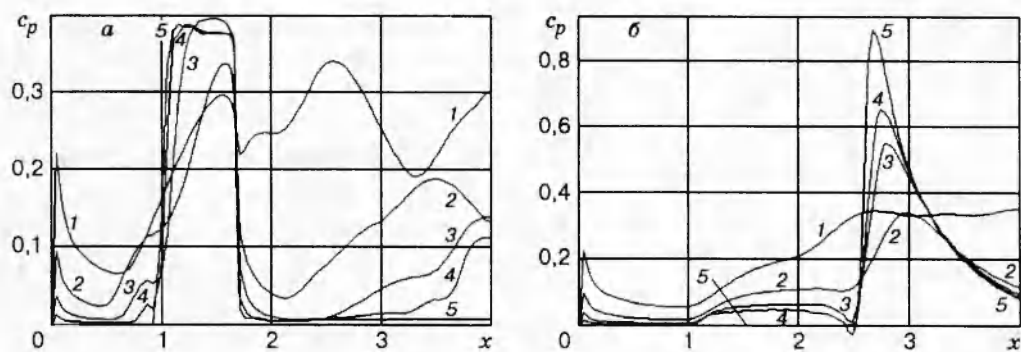


Рис. 6

$Re_\infty$	Нижняя поверхность			Верхняя поверхность		
	$x_S$	$x_R$	$\Delta_S$	$x_S$	$x_R$	$\Delta_S$
$10^3$	0,944 3,64	1,063 —	0,119 —	1,35	2,42	1,07
$3 \cdot 10^3$	0,80 2,61	1,283 2,80	0,483 0,19	1,302	2,69	1,388
$10^4$	0,66 2,72	1,387 3,275	0,727 0,555	1,237	2,87	1,633
$3 \cdot 10^4$	0,647 2,747	1,311 3,604	0,664 0,857	1,207 2,400	2,84 2,2	1,633 0,20
$10^5$	0,729 2,981	1,186 3,768	0,457 0,787	1,167 2,438	2,773 2,143	1,606 0,295
$3 \cdot 10^5$	0,781 3,170	1,131 3,756	0,35 0,586	1,118 2,437	2,756 2,0	1,638 0,437
$10^6$	0,837 3,368	1,077 3,802	0,24 0,434	1,123 2,484	2,746 1,917	1,623 0,567

вый локальный максимум давления имеет место на клиновидной поверхности; кроме того, в «горле» канала образуется второй локальный максимум давления, который при больших  $Re$  располагается вниз по потоку за точкой присоединения.

На верхней поверхности абсолютный максимум давления образуется в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем; далее вниз по потоку давление монотонно уменьшается под влиянием веера волн разрежения, обусловленного угловой точкой «горла». При этом наличие перед максимумом «плато» давления, т. е. области, в которой давление близко к постоянному, указывает на присутствие области с развитым отрывным течением.

Распределения коэффициента сопротивления трения  $C_f = \tau_w / (0,5 \rho_\infty V_\infty^2)$  по верхней и нижней поверхности канала (рис. 7, где  $C^0 = C_f \sqrt{Re_\infty}$ , кривые 1–4 отвечают  $Re_\infty = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ,  $a$  — нижняя поверхность,  $b$  — верхняя) позволяют установить особенности тонкой структуры областей отрывного течения.

Эти распределения четко показывают, что на нижней поверхности канала образуются две замкнутые области отрывного течения: одна при обтекании вершины клина, вторая — в «горле» канала вблизи выходного сечения.

Геометрические характеристики отрывных зон приводятся в таблице, в которой  $x_S$  и  $x_R$  — точки отрыва и присоединения потока соответственно,  $\Delta_S = x_R - x_S$  — длина отрывной области. С увеличением  $Re$  точки отрыва на нижней поверхности перемещаются сначала вверх, а затем вниз по потоку, при этом длины отрывных зон также изменяются немонотонным образом.

Если на нижней поверхности интерпретация структуры отрывных зон очевидна и не вызывает каких-либо затруднений, то иначе дело обстоит на верхней поверхности канала. Для правильного установления структуры отрывной зоны и интерпретации распределения напряжения трения необходима дополнительная информация о поле скоростей (см. рис. 5). С учетом этой информации следует, что на верхней поверхности образуется одна обширная замкнутая область отрывного течения при всех значениях  $Re$ . Однако с увеличением  $Re$  в этой зоне создаются условия, приводящие к вторичному отрыву и присоединению потока.

Следует отметить, что с ростом числа Рейнольдса ( $Re_\infty > 10^4$ ) длины отрывных зон на нижней поверхности уменьшаются, а на верхней поверхности наблюдается стабилизация длины отрывной зоны. Отсюда можно заключить, что с увеличением  $Re$  поле течения хотя и приближается к эйлеровскому решению, но никогда его не достигает — предельная форма вязкого решения при  $Re_\infty \rightarrow \infty$  содержит, по-видимому, на верхней поверхности

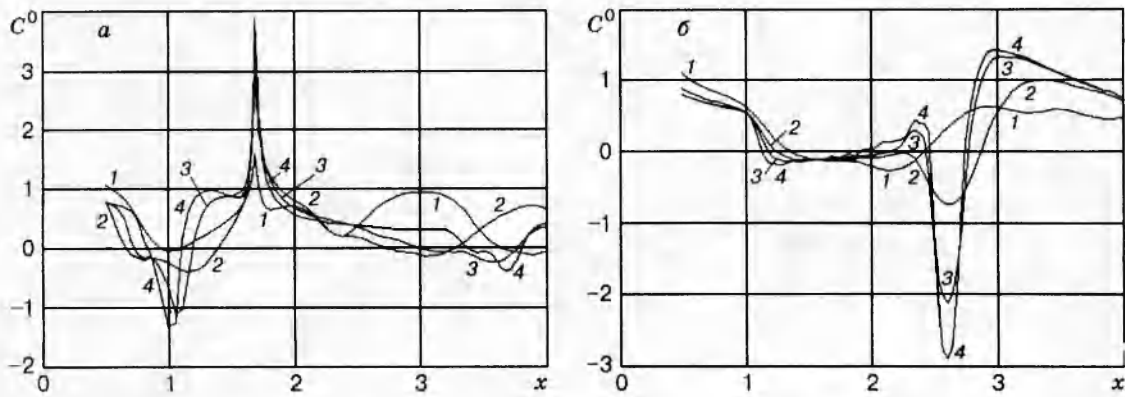


Рис. 7

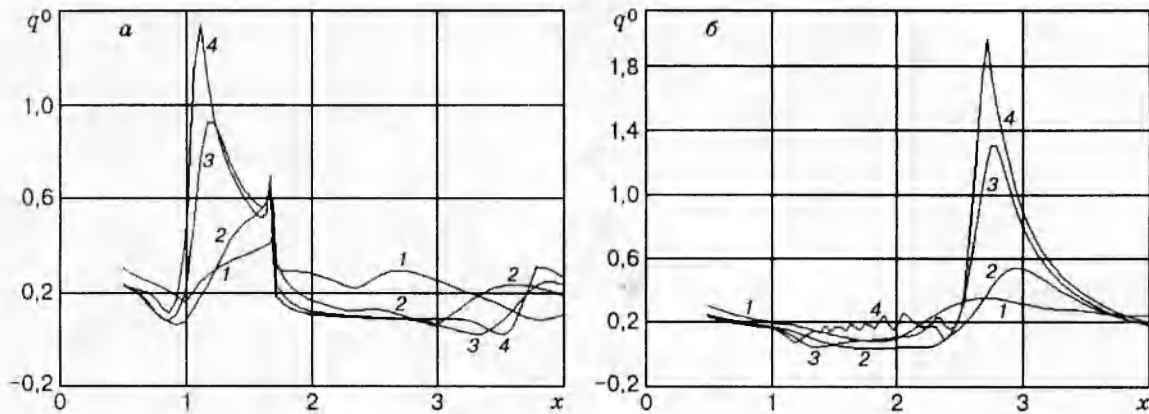


Рис. 8

канала замкнутую зону возвратного течения.

Распределения местного теплового потока  $q_w^*$  по нижней и верхней поверхности канала показаны на рис. 8, где  $q^0 = q_w \sqrt{Re_\infty}$ ,  $q_w = a_w^+ / (0,5 \rho_\infty \bar{v}_\infty^2)$ , кривые 1-4 отвечают  $Re_\infty = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ , а — нижняя поверхность, б — верхняя. Сложная структура поля течения обуславливает сложный немонотонный характер поведения теплового потока на обтекаемых поверхностях. На верхней поверхности главный максимум теплового потока формируется в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем, располагаясь вниз по потоку за точкой присоединения. На нижней поверхности наблюдается несколько локальных, сравнимых по значению максимумов теплового потока. Один из них, наиболее резкий, располагается в угловой точке «горла», второй — вблизи выходного сечения «горла» за точкой присоединения потока и по значению почти не зависит от  $Re$ . Третий максимум, который появляется и становится доминирующим при больших значениях  $Re$ , находится на клиновидной поверхности за точкой присоединения потока.

Распределения напряжения трения и теплового потока показывают, что при больших значениях  $Re$  на верхней поверхности канала в отрывной области наблюдаются осцилляции численного решения, амплитуда которых увеличивается с ростом  $Re$ ; это явление, вероятно, связано с физической неустойчивостью ламинарного отрывного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01129а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Егоров И. В., Зайцев О. Л.** Об одном подходе к численному решению двумерных уравнений Навье — Стокса методом сквозного счета // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 2. С. 286–299.
2. **Башкин В. А., Егоров И. В., Егорова М. В.** Круговой цилиндр в сверхзвуковом потоке совершенного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6. С. 107–115.
3. **Башкин В. А., Егоров И. В., Колина Н. П.** Аэродинамические характеристики осесимметричных носовых частей в сверхзвуковом потоке // Уч. зап. ЦАГИ. 1993. Т. 24, № 2. С. 44–53.
4. **Егоров И. В.** К вопросу о влиянии реальных свойств воздуха на интегральные аэродинамические характеристики // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 156–164.
5. **Bashkin V. A., Yegorov I. V.** The heat-transfer numerical simulation on the base of Navier — Stokes equations // Research in Hypersonic Flows and Hypersonic Technologies. TsAGI 1994, September 19–21. Section 2. P. 12–16.
6. **Егоров И. В., Иванов Д. В.** Применение полностью неявных монотонных разностных схем для моделирования плоских внутренних течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 10.
7. **Внуков А. Е.** Построение расчетных сеток около аэродинамических профилей на основе дискретного преобразования Кристоффеля — Шварца. М., 1991. (Препр. / ЦАГИ; № 35. С. 1–15).
8. **MacCormack R. W.** The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. N. Y., 1969. (Paper / AIAA; N 354).
9. **Годунов С. К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
10. **Roe P. L.** Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference scheme // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.
11. **Каримов Т. Х.** О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1038–1042.
12. **Lipton R. J., Rose D. J., Tarjan R. E.** Generalized nested dissection // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16, N 2. P. 346–358.
13. **Yegorov I. V., Zaitsev O. L.** Development of efficient algorithms for computational fluid dynamic problems // Proc. of the 5th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics. Japan, Sendai, 1993. V. 3. P. 393–400.

*Поступила в редакцию 21/VII 1995 г.,  
в окончательном варианте — 25/IX 1995 г.*