

УДК 532.526

## **О достаточных условиях устойчивости течения Куэтта–Пуазейля монодисперсной смеси\***

**Д.И. Попов, А.М. Сагалаков, Н.Г. Никитенко**

*Алтайский государственный университет, Барнаул*

E-mail: amsagalakov@mail.ru

Проанализирована устойчивость течения Куэтта–Пуазейля монодисперсной смеси. Установлены достаточные условия устойчивости. Результаты расчетов спектра малых возмущений указывают на возможность значительной стабилизации потока с примесью частиц. Обнаружено, что области генерации неустойчивости могут быть как односвязными, так и многосвязными. Вид кривых нейтральной устойчивости определяется формой основного профиля скорости и параметрами примеси.

**Ключевые слова:** течение Куэтта–Пуазейля, межфазовое взаимодействие, первый метод Ляпунова.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Устойчивость движения однофазной жидкости изучена достаточно подробно. Поэтому значительный интерес представляет усложнение гидродинамической модели среды и происходящих в ней процессов. Однако на этом пути могут возникнуть порой непреодолимые препятствия в смысле корректности постановки задач гидродинамической устойчивости или совместности модельных уравнений среды. При этом даже для элементарных модельных сред характеристики устойчивости гидродинамической среды могут существенным образом меняться по сравнению с однофазной жидкостью.

Из возможных гетерогенных смесей наиболее подробно изучены так называемые дисперсные смеси, которые состоят из двух фаз. Частными случаями таких сред являются суспензии (смеси жидкости с твердыми частицами) и газозвеси (смеси газа с твердыми частицами или жидкими каплями). Далее будем предполагать, что размеры дисперсных частиц, т. е. включений, удовлетворяют следующим допущениям:

1. Размеры включений или неоднородностей в смеси во много раз превосходят молекулярно-кинетические масштабы;

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” — “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области механики”, 2009-2013 гг. (№ 2010-1.1-112-129-003).

2. Размеры дисперсных частиц во много раз меньше расстояний, на которых осредненные или макроскопические параметры смеси или фаз меняются существенно.

В качестве модельной среды рассмотрим, например, бесстолкновительную монодисперсную сильноразреженную газовзвесь. Дисперсионную фазу можно описать уравнением Навье–Стокса для несжимаемой жидкости, дисперсную фазу будет характеризовать уравнение переноса импульса. При условии, что объемная концентрация взвеси мала, дисперсная фаза рассматривается как сжимаемый континуум частиц.

С точки зрения статистической физики дисперсная фаза может рассматриваться как псевдогаз, псевдомолекулами которого являются дисперсные частицы. Движение такого псевдогаза без хаотического движения частиц может рассматриваться как холодное движение с нулевым давлением и нулевой температурой. При этом можно пренебречь вкладом парциального давления континуума частиц в полное давление смеси.

Силы, действующие на частицу со стороны несущей фазы, можно описать в общем случае известной формулой Бассэ–Буссинеска–Озеена. Будем считать, что мелкомасштабное движение происходит в ползущем режиме. Тогда межфазное взаимодействие определяется только силой Стокса. Для этого величина  $t_1^{(\mu)} = \rho_1 a^2 / \mu_1 = a^2 / \nu_1^{(\nu)}$  ( $\rho_1$  — плотность несущей фазы,  $a$  — радиус частиц,  $\mu_1$  — вязкость несущей фазы) характерного времени установления квазистационарного стоковского поля скоростей в несущей фазе вокруг частицы должна быть достаточно малой. Характерное время скоростной межфазной релаксации в этом случае описывается формулой

$$t^{(\nu)} = t^{(\mu)} = 2a^2 \rho_2 / (9\mu_1),$$

где  $\rho_2$  — плотность вещества частицы. Видно, что характерное время вовлечения частицы в движение несущей фазы будет определяться вязкостью дисперсионной фазы, плотностью материала частиц и их размером. В дальнейшем величины  $\rho_1$  и  $\rho_2$  предполагаются постоянными. Концентрации частиц несущей среды  $n_1$  и частиц примеси  $n_2$  также предполагаются постоянными.

Существенным моментом является предположение об отсутствии непосредственного взаимодействия между частицами. При этом в уравнениях движения для частиц можно пренебречь тензором приведенных напряжений, который представляет сумму вкладов тензора пульсационных напряжений, напряжений на межфазных границах и средних напряжений на сечениях в фазах. Это можно сделать в том случае, когда  $\rho_1 \gg \rho_2$ ,  $n_1 \gg n_2$ , и полную вязкость можно определять вязкостью несущей фазы, т. е. вязкое напряжение трения обусловлено жидкой фазой.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СМЕСИ

Уравнения, описывающие динамику смеси в области  $\Omega$  с кусочно-регулярной границей  $\partial\Omega$ , могут быть представлены в следующем безразмерном виде [1–5]:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{V}_1 / \partial t + (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 &= -\nabla p + \Delta \mathbf{V}_1 / R + (f / SRe)(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1), \\ \partial \mathbf{V}_2 / \partial t + (\mathbf{V}_2 \nabla) \mathbf{V}_2 &= (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) / (SRe), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{V}_1 = 0, \quad \partial f / \partial t + \nabla(f \mathbf{V}_2) = 0, \quad \mathbf{V}_1|_{\partial\Omega} = \mathbf{V}_{1s}, \quad \mathbf{V}_{2n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{V}_{2s}, \quad \mathbf{V}_{1,2}|_{t=0} = \mathbf{V}_{1,2}^{(0)}.$$

Здесь введены стандартные параметры и использованы стандартные обозначения [1–5]. Величина  $\tau = SRe$  — безразмерное время скоростной релаксации, т. е. характерное время, за которое частица дисперсной фазы теряет избыточную скорость в несущей среде,  $Re = U_0 L \rho_1 / \mu$  — число Рейнольдса (нижний индекс “звездочка” означает критические числа Рейнольдса),  $S = 2/9 (a/L)^2 \rho_2 / \rho_1$  — параметр, определяющий степень дисперсности примеси,  $\mu = \mu_1 (1 + 5\varphi/2)$  — кажущаяся вязкость смеси,  $a$  — радиус частицы,  $L$  — характерный пространственный масштаб,  $U_0$  — среднерасходная скорость,  $f = mn_2 / \rho_1$  — безразмерная массовая плотность континуума частиц ( $m = 4/3\pi a^3 \cdot \rho_2$  — масса частицы). Подчеркнем, что величина  $S$  определяется только параметрами дисперсной среды и не зависит от скорости течения и числа Рейнольдса. На границе области  $\Omega$  для жидкости и частиц задаются условия прилипания и непроницаемости.

Модель монодисперсной смеси, межфазное взаимодействие в которой определяется силой Стокса, представляет собой пример синтетического описания двухскоростной модели гидродинамического движения. Однако уже в таком относительно простом случае достаточные условия устойчивости стационарных решений принимают сложную форму. Например, нейтральные и критические зависимости могут состоять из нескольких подобластей, окружающих области вязкой генерации, а порог устойчивости в некоторых случаях повышается практически на порядок величины.

Устойчивость течений Куэтта, Пуазейля и струйных течений двухфазной среды рассматривалась ранее в работах [1–5]. Устойчивость двухфазных течений между коаксиальными цилиндрами изучалась в работах [6, 7]. Целью настоящей работы является определение достаточных условий устойчивости плоскопараллельных двухфазных течений Куэтта–Пуазейля по отношению к малым возмущениям. Анализ устойчивости течения Куэтта–Пуазейля позволяет изучить совместное влияние профиля скорости, положения критических слоев и степени дисперсности среды на характеристики устойчивости двухфазных течений.

Математическая сторона решаемой задачи представляет значительный интерес и будет отдельно опубликована в журнале соответствующего профиля. Подход с позиций математической гидродинамики позволил авторам провести качественный анализ рассматриваемых задач, обосновать возможность применимости первого метода Ляпунова и обнаружить их некоторые общие свойства. Качественно объяснена сложная структура параметрических зависимостей для критического числа Рейнольдса. Приведены априорные соображения относительно существования нескольких областей генерации неустойчивости, разделенных “окнами” устойчивости. Этот факт объяснен нелинейностью задачи на собственные значения, которая обуславливает сложную параметрическую зависимость для спектра. Установлено, что спектр малых возмущений для смеси состоит из непрерывной и дискретной частей, что обусловлено сжимаемостью континуума частиц в рассматриваемых течениях несжимаемой жидкости.

Физическая интерпретация наличия непрерывного спектра достаточно очевидна. Такой спектр обусловлен появлением в смеси псевдозвука, скорость которого локально совпадает со скоростью сдвига. Несмотря на наличие непрерывного спектра, устойчивость двухфазных течений в рамках рассматриваемой модели определяется только показателями ляпуновских экспонент, представленными дискретной частью спектра. Поэтому далее анализируется только дискретная часть спектра.

## 2. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящей работе впервые проанализирована устойчивость течения Куэтта–Пуазейля монодисперсной смеси со стационарным безразмерным профилем

$$U(y) = (1 - A)(1 - y^2) + Ay = -p_0 y^2 + p_1 y + p_2,$$

где параметры  $p_0, p_1, p_2 > 0$ ,  $y$  — поперечная координата в бесконечном плоскопараллельном канале. Непрерывному изменению величины  $A$  от нуля до единицы соответствует трансформация симметричного профиля скорости течения Пуазейля в профиль скорости течения Куэтта. При этом наблюдается критическое значение параметра  $A$ , при котором течение Куэтта–Пуазейля становится устойчивым. Критическое число Рейнольдса стремится к бесконечности таким образом, что произведение волнового числа возмущения на число Рейнольдса остается конечной величиной (для однофазной системы ранее было определено критическое значение  $A = 0,26$ ).

Линеаризуем в двумерном случае уравнения движения монодисперсной смеси (1) в окрестности стационарного решения. Будем использовать стандартные обозначения и термины, применяемые в теории гидродинамической устойчивости.

В результате приходим к следующей спектральной задаче:

$$\begin{aligned} \lambda \theta &= i\alpha U'' \psi - i\alpha U \theta + \nu \Delta \theta - (f/\tau) \theta - (f/\tau)(i\alpha v_2 - u_2'), \\ \lambda u_2 &= -i\alpha U u_2 - \nu_2 U' + (1/\tau)(\psi' - u_2), \\ \lambda v_2 &= -i\alpha U v_2 - (1/\tau)(i\alpha \psi + v_2) \end{aligned} \quad (2)$$

с условиями  $\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0$  прилипания и непроницаемости. Здесь  $\psi$  — функция тока,  $\lambda = -i\alpha C$ ,  $\alpha$  — волновое число,  $C = X + iY$  — комплексная фазовая скорость ( $\alpha Y$  — инкремент или декремент возмущения, возмущения нарастают, если величина  $\alpha Y$  больше нуля). Спектральная задача (2) позволяет определить условия нарастания и затухания малых возмущений.

Введем параметр  $J = [1 + i\alpha\tau(U - C)]^{-1}$ . Оператором  $J$  определяется связь между полями скоростей в первой и во второй фазах. Видно, что  $J$  и  $J^{-1}$  ограничены, когда  $\tau < \infty$ , поэтому легко установить, что  $u_2 = Ju_1 + \tau U J^2 v_1$ ,  $v_2 = Jv_1$ . Величины  $u_1, v_1$  — компоненты  $x$  и  $y$  комплексной амплитуды возмущений несущей фазы,  $u_2, v_2$  — соответствующие величины для дисперсной фазы. Теперь систему (2) можно записать в виде

$$(U - C)(1 + fJ)\Delta\psi - U''(1 + fJ^2)\psi - \nu\Delta^2\psi / (i\alpha) - 2fU'JJ'\psi = 0. \quad (3)$$

Несложные преобразования позволяют привести полученное уравнение к виду

$$(1 + fJ)OZ(C, \text{Re}(1 + fJ))\psi + i\alpha\tau f[U''(U - C) + 2(U')^2 J]J^2\psi = 0. \quad (4)$$

Здесь  $OZ(C, \text{Re})$  обозначает оператор Орра–Зоммерфельда для однофазной жидкости при числе Рейнольдса  $\text{Re}$ .

Из уравнения (4) непосредственно следует, что при  $\tau \ll 1$  спектральная задача сводится к задаче на собственные значения для однофазной среды при эффективном числе Рейнольдса  $\text{Re}_e = \text{Re}(1 + f)$ . Для дальнейшего целесообразно подействовать

на соотношение (4) оператором  $J^{-1}$  такое количество раз, какое необходимо для исключения  $J$ . Будем считать, что  $(J^{-1})^2 = J^{-2}$ ,  $(J^{-1})^3 = J^{-3}$ . В результате получим

$$(U - C)(J^{-3} + f J^{-2})\Delta\psi - U''(J^{-3} + f J^{-1})\psi - J^{-3}v\Delta^2\psi/(i\alpha) + 2i\alpha\tau f(U')^2\psi = 0. \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:

$$z = -i\alpha\tau C, \quad \tilde{U} = i\alpha\tau U, \quad t = \tilde{U} + z + 1. \quad (6)$$

Тогда, используя выражение для  $\tau$ , получим

$$T(z) = t^4\Delta\psi - t^3[(1-f)\Delta\psi + \tilde{U}''\psi + S\Delta^2\psi] - t^2 f\Delta\psi - t f\tilde{U}''\psi + 2f(\tilde{U}')^2\psi = 0. \quad (7)$$

Таким образом, спектральная задача сведена к нелинейной задаче на собственные значения для голоморфного пучка линейных операторов  $T(z)$ . Отметим, что спектры и резольвентные множества пучков (7) и (4), а вместе с ними и соответствующие собственные проекторы совпадают, что гарантировано процедурой вывода уравнения (7).

### 3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Численный анализ спектра малых возмущений проводился с использованием метода Галеркина и метода дифференциальной прогонки. Сочетание этих методов позволило оптимизировать вычислительные схемы и осуществлять контроль вычислений. Тестирование вычислительных схем проводилось сравнением с известными результатами по устойчивости течений Куэтта и Пуазейля однородной и двухфазной жидкостей. Использование эффективных вычислительных схем позволило проводить численные расчеты вплоть до чисел Рейнольдса порядка  $10^9$ . В предельном случае  $A = 0$  получено полное совпадение с результатами работы [2].

Данная задача является многопараметрической. В случае низкой концентрации частиц устойчивость течения изменяется слабо, а при высокой концентрации частиц может возникнуть вопрос о применимости используемой модели монодисперсной смеси. Поэтому в настоящей работе рассматривались среды с умеренной концентрацией частиц  $f \cong 0,1$ . Малая же величина  $S$  может изменяться в широких пределах в зависимости от конкретной монодисперсной смеси. В частности, использовались те же значения  $S$ , что и в предыдущих работах по исследованию устойчивости параллельных течений.

Спектр малых возмущений течения Куэтта–Пуазейля однофазной жидкости исследовался ранее одним из авторов этой статьи [8].

На рис. 1, *a* приведены зависимости максимальных по волновому числу инкрементов от числа Рейнольдса для различных значений  $A$ . Видно, что отличие распределения скорости от ее профиля в течении Пуазейля приводит к заметному уменьшению инкрементов и стабилизации первой моды возмущений. Как видно из рис. 1, *a*, кривая  $\theta$ , соответствующая симметричному профилю, является мажорирующей для кривых при  $A \neq 0$ . Данное обстоятельство связано с тем фактом, что при деформации профиля происходит потеря симметрии пристенной моды, для которой приведены графики на рис. 1. Ясно, что с увеличением значения параметра  $A$  координата  $y_c$  верхнего критического слоя стремится к единице и при определенном значении  $A$  выходит за пределы физической области. При этом нижний критический слой несколько смещается к середине канала. Известно, что на границе течения вязкость обеспечивает сдвиг фаз между поперечной и продольной

компонентами пульсационной скорости; такая разность проявляет себя в окрестности критического слоя в виде ненулевых реинольдсовых напряжений. Обмен энергией между основным потоком и пульсациями описывается слагаемым, содержащим реинольдсовы напряжения и сдвиговую производную. Таким образом, уменьшение значения инкремента, а также стабилизацию первой моды можно объяснить тем, что в итоге деформация профиля вызывает преобладание стока пульсационной энергии вблизи границ за счет вязкой диссипации над генерацией энергии возмущений в окрестности критического слоя. При этом нельзя забывать о присутствии в уравнении баланса энергии возмущений для смеси дополнительных слагаемых, обусловленных ненулевой разницей полей возмущений. Такие слагаемые, в свою очередь, нетривиальным образом зависят от формы профиля, а их структура также будет определять и производство энергии пульсаций, и ее рассеяние в основном потоке. Максимум кривых на рис. 1, *a* указывает на существование режимов течения, которым соответствует наибольшая интенсивность генерации пульсационной энергии в потоке.

На рис. 1, *b* представлены в качестве примера три зависимости инкрементов и декрементов от величины  $A$  при различных  $S$  и  $f = 0,1$  (расчеты проводились в диапазоне  $S = 10^{-7} \div 10^{-4}$ ). Первоначально с ростом  $A$  от нуля величины  $\alpha Y$  быстро убывают. Такой характер поведения зависимостей  $\text{Re}\{\lambda(A)\}$  обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, поскольку в потоке локализованы две области генерации пульсационной энергии, то существенным фактором будет расположение критических слоев в потоке и значение скорости сдвига в их окрестности. Ясно, что рост величины  $A$  обуславливает и смещение слоев, и уменьшение значения поперечного градиента основного профиля. Во-вторых, определенное влияние оказывает несимметричность задачи при  $A \neq 0$ . Отметим, что с ростом  $A$  наблюдается сложная перестройка в спектре возмущений и появление точек кратности.

Локальные максимумы у зависимостей  $\text{Re}\{\lambda(A)\}$  указывают на некоторое ослабление диссипации пульсационной энергии. Очевидно, что необходимо помнить об изменении структуры собственных функций, обусловленной деформацией

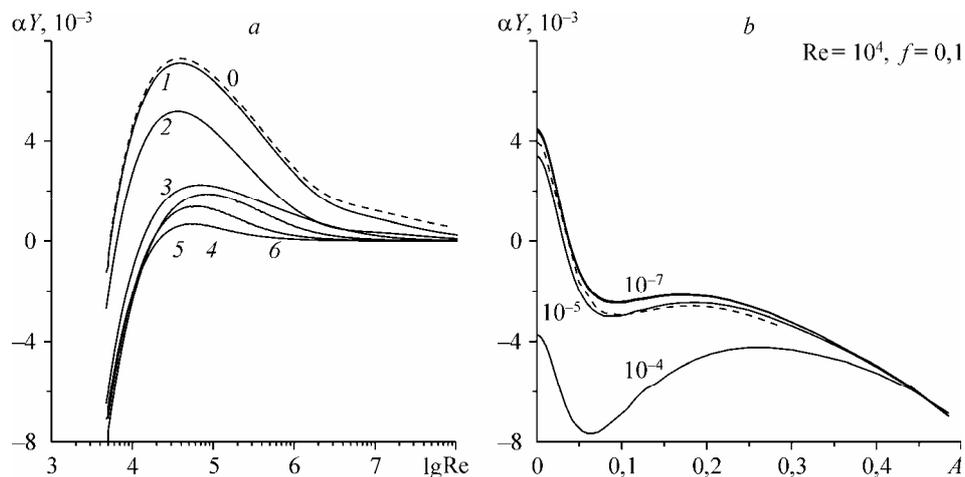


Рис. 1. *a* — зависимость инкрементов и декрементов возмущений от числа Рейнольдса для  $S = 10^{-6}$ ,  $f = 0,1$ , цифрами обозначены следующие значения  $A$ : 0,0 (0), 0,005 (1), 0,02 (2), 0,05 (3), 0,1 (4), 0,15 (5), 0,2 (6); *b* — зависимость инкрементов и декрементов возмущений от значения параметра  $A$ , пунктирной линией обозначена кривая для однокомпонентной среды.

профиля. Видно, что увеличению значения параметра  $S$  соответствует стабилизация пульсаций в смеси, а экстремумы для кривых  $ge\{\lambda(A)\}$  становятся более выраженными.

При  $A = 1$  получаем профиль скорости в течении Куэтта, который стабилен к малым возмущениям в случае однофазного течения при всех числах Рейнольдса. Видно, что симметричному профилю — течению Пуазейля соответствует наибольшее значение  $ge\{\lambda\}$ .

На рис. 2, *a* продемонстрирована сложная форма нейтральных кривых, например, значение  $S = 3 \cdot 10^{-6}$ . При достаточно больших концентрациях частиц в потоке нейтральные кривые состоят из двух подобластей, одна из которых ограничивает “островок” множества точек  $\alpha, Re$ , которым соответствует генерация неустойчивости. Следует отметить, что такое свойство проявляется в случае, когда значение массовой концентрации дисперсной фазы превышает определенную величину (ср. кривые *1* и *1a* на рис. 2, *a*). Ясно, что наличие подобных подобластей обусловлено “трением” компонентов среды. На рис. 2, *b* представлены нейтральные зависимости при  $f = 0,2$ ,  $S = 8,7 \cdot 10^{-6}$  для различных значений  $A$ . Расчеты показывают, что при малых  $A$  появляются две области генерации неустойчивости. При изменении величины  $A$  происходит постепенное смыкание нижней и верхней ветвей нейтральной кривой и образование подобластей типа 2(I) и 2(II) (см. рис. 2, *b*). Оказывается, что ветви кривой типа 2(II) в свою очередь смыкаются, выделяя ограниченную и характерную “вязкую” области генерации неустойчивости на плоскости  $\alpha, Re$ .

Видно, что с ростом величины  $A$  значение критического числа Рейнольдса, соответствующее нижней границе подобласти типа 3(II), увеличивается. Однако при определенных значениях  $A$  (например, кривые 5, 6) подобласть типа 3(II) у нейтральной кривой не наблюдается, а генерации неустойчивости соответствует достаточно малая ограниченная область значений  $\alpha, Re$ . Из рис. 2, *b* видно, что в случае  $A = 0,07$  нарастающие гармоники описываются достаточно узкой областью, расположенной в длинноволновой части спектра пульсаций. Причем форма кривой 7 указывает на то, что при определенных условиях ветви кривой 7 могут сомкнуться, образуя ограниченную и характерную “вязкую” область генерации

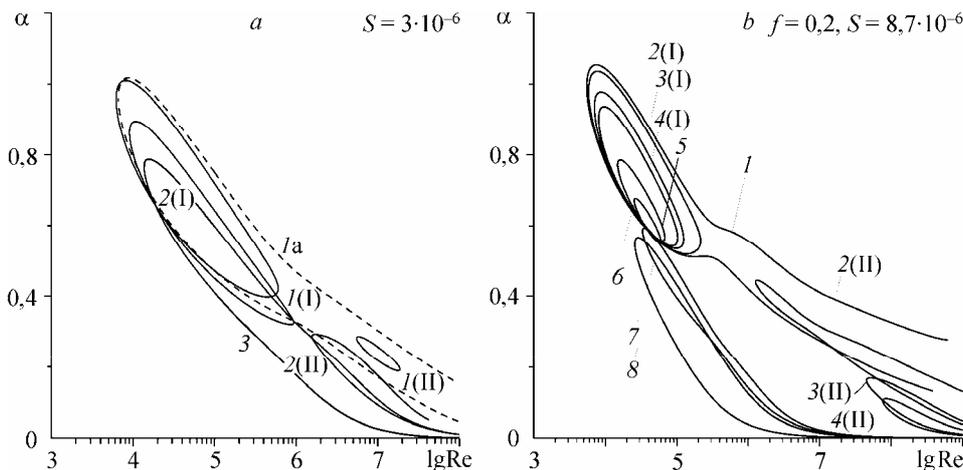


Рис. 2. Нейтральные кривые для  $S = 3 \cdot 10^{-6}$  (*a*),  $8,7 \cdot 10^{-6}$  (*b*) при  $f = 0,1$  (пунктирная линия) и  $f = 0,2$  (сплошная линия); цифрами обозначены следующие значения  $A$ : *a* — 0,02 (1), 0,035 (2), 0,05 (3), *b* — 0,003 (1), 0,01 (2), 0,02 (3), 0,025 (4), 0,04 (5), 0,05 (6), 0,07 (7), 0,1 (8).

неустойчивости. При заметной деформации основного профиля скорости генерация неустойчивости осуществляется длинноволновыми возмущениями (см. кривую 8 на рис. 2, *b*).

Расчеты показывают, что движение смеси при малых  $S$  менее стабильно по сравнению с течением однокомпонентной среды. Увеличение значения параметра  $S$  приводит к увеличению значения критического числа Рейнольдса. При этом наблюдается определенное пороговое значение параметра  $S$ , при котором течение смеси наиболее устойчиво по отношению к двумерным возмущениям.

Отметим определенную общность характера зависимости формы нейтральных кривых от параметров  $A, S$ . Такая общность проявляется в следующем:

а) при малых значениях параметра  $A$  и параметра  $S$  наблюдается заметная деформация нейтральных кривых,

б) рост значений параметров  $A, S$  обуславливает смыкание ветвей нейтральной кривой и образование двух подобластей генерации неустойчивости,

в) при достаточно больших значениях параметров  $A, S$  образования островков генерации, ограниченных ветвями нейтральной кривой, не наблюдается, при этом нейтральные кривые локализованы в диапазоне малых значений волнового числа.

Отметим, что изменение величины  $A$  и изменение величины  $S$  сходным образом сказываются на характере спектра возмущений. Например, появление замкнутых подобластей нейтральной кривой может быть обусловлено как изменением величины  $A$ , так и изменением величины  $S$ . Действительно, параметр  $J$ , определяющий связь между амплитудами возмущений разных фаз в исходных уравнениях, при фиксированном значении числа Рейнольдса практически одинаковым образом зависит как от степени дисперсности  $S$ , так и от параметра  $A$ . Таким образом, при определенных значениях  $A, S$  может происходить усиление или ослабление диссипации за счет управляющего параметра  $J$ , который определяет характер сцепления полей возмущений в фазах.

На рис. 3 представлена зависимость критического числа Рейнольдса  $Re_*$  от величины  $A$  (сплошные линии) для смеси при различных значениях  $S$  и для однокомпонентной среды (пунктирные линии). Кривые  $A(Re_*)$  разграничивают области значений параметров, соответствующих устойчивому режиму, и области генерации неустойчивости для определенных значений степени дисперсности. На рис. 3 видно, что добавление частиц с достаточно малыми размерами в поток приводит к некоторой дестабилизации течения в широком диапазоне изменения значений  $A$  (например, зависимость  $A(Re_*)$  при  $S = 10^{-7}$  (см. рис. 3, *a, b, 1*). Видно, что зависимости  $A(Re_*)$  расположены ниже определенных асимптот  $A = \text{const}$ , ограничивающих каждую кривую сверху при соответствующих значениях  $A$ .

На рис. 3, *a* при  $f = 0,1$  для определенной формы основного профиля росту величины  $S$  может соответствовать заметное повышение порога устойчивости (см., например, кривые 5, 6). Отметим, что данный эффект наиболее сильно проявляется в области  $A \in (0; 0,1)$  для различных концентраций примеси.

Обратим внимание на кривую 3 на рис. 3, *b*. График  $A(Re_*)$  состоит из трех подобластей. При движении вдоль прямой  $A = \text{const}$ , пересекающей кривую 3, в сторону увеличения числа Рейнольдса (например, при  $S = 10^{-5}$ ) наблюдается следующая картина. Неустойчивость впервые проявляется при определенном значении  $Re_1$ , далее стабилизация основного потока происходит при значении числа Рейнольдса  $Re_2$  (см. рис. 3). Течение вновь дестабилизируется при  $Re_* = Re_3$ . Подобласть типа 3(III) у кривой  $A(Re_*)$  на рисунке определяет значение  $Re_4$ , при превышении которого вновь наблюдается устойчивость.

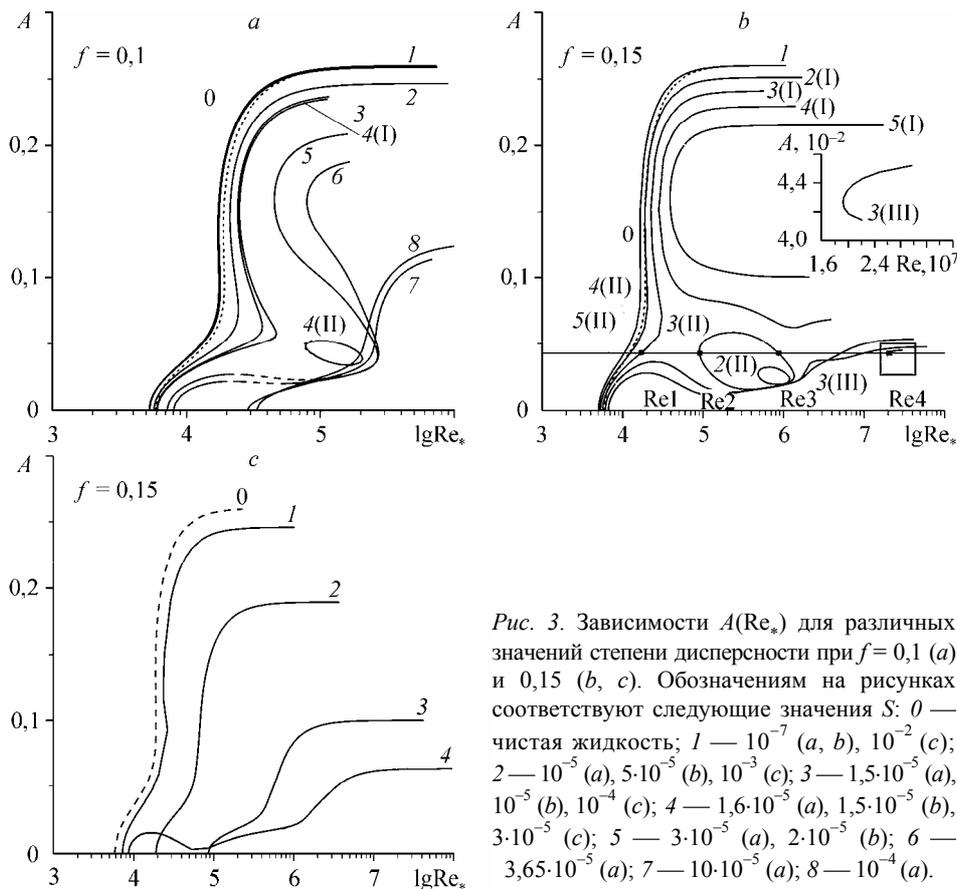


Рис. 3. Зависимости  $A(\text{Re}_*)$  для различных значений степени дисперсности при  $f=0,1$  (a) и  $0,15$  (b, c). Обозначения на рисунках соответствуют следующие значения  $S$ : 0 — чистая жидкость; 1 —  $10^{-7}$  (a, b),  $10^{-2}$  (c); 2 —  $10^{-5}$  (a),  $5 \cdot 10^{-5}$  (b),  $10^{-3}$  (c); 3 —  $1,5 \cdot 10^{-5}$  (a),  $10^{-5}$  (b),  $10^{-4}$  (c); 4 —  $1,6 \cdot 10^{-5}$  (a),  $1,5 \cdot 10^{-5}$  (b),  $3 \cdot 10^{-5}$  (c); 5 —  $3 \cdot 10^{-5}$  (a),  $2 \cdot 10^{-5}$  (b); 6 —  $3,65 \cdot 10^{-5}$  (a); 7 —  $10 \cdot 10^{-5}$  (a); 8 —  $10^{-4}$  (a).

При определенных значениях  $S$  (например,  $S = 1,6 \cdot 10^{-5}$ ) у кривой  $A(\text{Re}_*)$  наблюдаются две подобласти, аналогичные подобластям 4(I), 4(II) на рис. 3, a. Подобласть 4(II) ограничивает островок устойчивости. Кривые, подобные кривым 4(I) и 4(II), смыкаются при увеличении  $S$ , образуя кривые, подобные кривым 5, 6 (см. рис. 3, a). С увеличением значения  $S$  верхняя часть таких кривых смещается в область больших чисел Рейнольдса и меньших значений  $A$  (кривые 7, 8).

Несколько иная картина наблюдается при  $f=0,15$ . Из рис. 3, b видно, что при некотором значении  $S$  образуется подобласть, подобная 2(II), которая расширяется с ростом величины  $S$ . При этом из рис. 3, b видно, что при некотором  $S$  (например,  $S = 10^{-5}$ ) наблюдается подобласть у кривой  $A(\text{Re}_*)$ , подобная 3(III), локализованная при значительно больших числах Рейнольдса  $\text{Re}_4$ . Правее такой кривой обнаруживается множество точек, соответствующих устойчивости. При незначительном изменении величины  $S$  (в диапазоне  $\sim(10^{-5} \div 1,25 \cdot 10^{-5})$ ) подобласти, подобные 3(I) и 3(II) смыкаются при малых значениях чисел Рейнольдса, образуя кривые, подобные кривым 5, 6 на рис. 3, a. В диапазоне  $S \sim(1,25 \cdot 10^{-5} \div 1,3 \cdot 10^{-5})$  часть кривой, подобная кривым 5, 6 на рис. 3, a, расположенная в области больших чисел Рейнольдса и малых  $A$ , смыкается с подобластью 3(III), в результате чего образуются кривые, подобные кривым 4, 5 на рис. 3, b. Следовательно, возникают “окна” устойчивости, поскольку наблюдается диапазон значений  $A$ , внутри которого течение устойчиво. Из рис. 3, b видно, что подобласти, подобные подобластям 4(I), 5(I), постепенно сужаются и смещаются в сторону больших чисел Рейнольдса. При этом у кривых, подобных 4(II) и 5(II), в области малых чисел Рейнольдса наблюда-

ется локальный максимум. Отметим, что такая часть кривой на оси  $A = 0$  при некоторых значениях  $S$  может отделиться от области монотонности. При дальнейшем увеличении  $S$  происходит трансформация области монотонности кривой  $A(\text{Re}_*)$ , как показано на рис. 3, *с*.

Для промежуточных величин  $S$  существенный вклад в спектр линеаризованного оператора вносят слагаемые, содержащие параметр  $J$ . Структура спектра в общем случае существенно зависит от величины  $J$ . При этом структура линеаризованного оператора допускает такой случай, когда имеется пара различных собственных значений, соответствующих первой моде и таких, что  $\text{re}\{\lambda\} = 0$  и  $\partial(\text{re}\{\lambda\})/\partial\alpha = 0$ .

На рис. 4, *а* и 4, *б* приведены зависимости критического числа Рейнольдса от величины  $S$  для различных  $A$  при  $f = 0,1$ . Видно, что существует такой диапазон значений параметра  $S$  ( $10^{-5} \leq S \leq 10^{-3}$ ), внутри которого может наблюдаться повышение порога устойчивости практически на порядок. Значение времени релаксации для такой области заключено в пределах  $0,5 \leq S\text{Re}_* \leq 20$ .

Обратим внимание на кривую 4 на рис. 4, *б*, которая имеет окно устойчивости в широком диапазоне значений  $S$ . В данном случае спектр возмущений полностью расположен в левой полуплоскости. Отметим, что при увеличении значений параметра  $A$  происходит непрерывная деформация кривых  $\text{Re}_*(S)$ , как это показано на рис. 4, *а* (см. кривые 1–3). При этом вдоль вершин таких кривых приближенно выполняется условие  $S\text{Re} = \pi$  (пунктирная прямая на рис. 4, *а*).

Рассмотрим предельный случай  $S\text{Re} \gg 1$ . Удерживая в разложении величины  $J$  слагаемые порядка  $1/(S\text{Re})$ , приходим к спектральной задаче для однокомпонентной среды. При этом собственное значение должно быть переопределено следующим образом:  $-i\alpha C_1 = \lambda_1 = \lambda + f/(S\text{Re})$ . Однако в случае нейтральных возмущений подобное представление осуществимо не во всех точках сечения канала —  $J(y) \sim 1$  в очень малой окрестности критического слоя, размеры которой уменьшаются с ростом величины  $S\text{Re}$ . Внутри такой окрестности уравнение возмущений может быть также представлено в виде уравнения Орра–Зоммерфельда для однокомпонентной среды с собственным числом  $\lambda_1$ , но с добавочным слагаемым, пропорциональным величине  $f$ . Видно, что в этом случае спектр для смеси получается

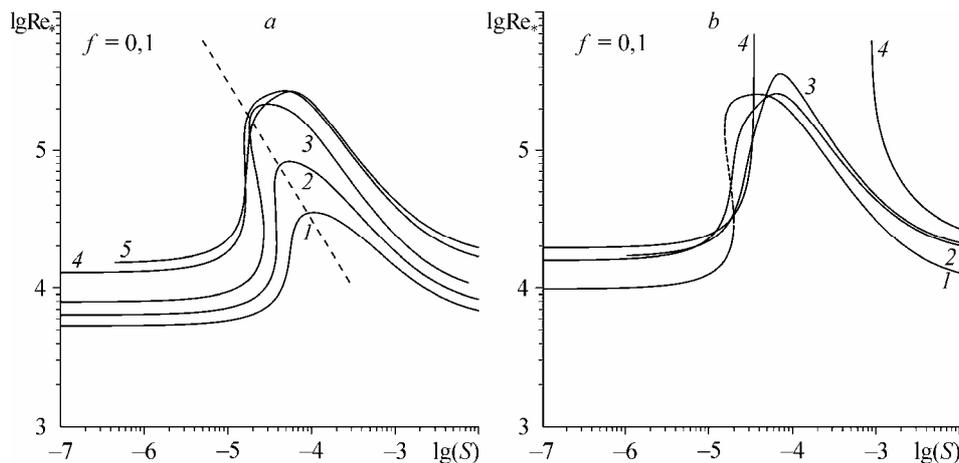


Рис. 4. Зависимости критического числа Рейнольдса от степени дисперсности примеси при  $f = 0,1$ . Обозначения на рисунках соответствуют следующие значения  $A$ : *а* — 0,005 (1), 0,02 (2), 0,03 (3), 0,05 (4), 0,06 (5); *б* — 0,04 (1), 0,07 (2), 0,1 (3), 0,2 (4).

смещением спектра для однокомпонентной среды на одинаковую величину (поправку пучка), а спектральная задача сводится к задаче для однокомпонентной среды с дополнительной силой трения, пропорциональной амплитуде скорости.

Интересно отметить, что подобное свойство наблюдается в задачах об устойчивости плазмы в токамаках при ее нагреве пучками ионов [9, 10].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты расчетов подтвердили априорные предположения относительно существования нескольких областей генерации неустойчивости, разделенных “окнами” устойчивости. Этот факт объясняется нелинейностью задачи на собственные значения, обуславливающей сложную параметрическую зависимость для спектра. Обнаружена возможность существенного (практически на порядок) повышения порога устойчивости потока с примесью. Суперпозиция эффектов, обусловленных степенью дисперсности примеси и формой основного профиля скорости, определяет очень сложную картину устойчивости. Установлено, что изменения формы профиля и величины  $S$  могут в определенной области параметров сходным образом сказываться на поведении спектра.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность Николаю Ивановичу Яворскому за ценные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудяк В.Я., Исаков Е.Б., Борд Е.Г. Неустойчивость плоского течения Куэтта двухфазных жидкостей // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 5. С. 76–80.
2. Рудяк В.Я., Исаков Е.Б. Устойчивость течения Пуазейля двухфазной жидкости с неоднородным распределением частиц // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 95–105.
3. Рудяк В.Я., Исаков Е.Б., Борд Е.Г. Устойчивость струйных течений двухфазной жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 1. С. 59–66.
4. Рудяк В.Я., Исаков Е.Б. Устойчивость течений разреженных газозвесей и суспензий в плоском канале // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 79–85.
5. Rudyak V., Isakov E., Bord E. Hydrodynamic stability of the Poiseuille flow of the dispersed fluid // J. Aerosol Sci. 1997. Vol. 28, No. 1. P. 53–66.
6. Kozhukhovskaya T.A., Kryukov A.A., Sagalakov A.M., Yudintsev A.Yu. Stability of parallel flow of a two-phase liquid between coaxial cylinders // Russian J. Engng. Thermophys. 2000. Vol. 10, No. 2. P. 167–178.
7. Kozhukhovskaya T.A., Kryukov A.A., Sagalakov A.M., Popov D.I. The linear stability with respect to three-dimensional perturbations of a parallel flow between coaxial cylinders of two-phase incompressible liquid // J. Engng. Thermophys. 2002. Vol. 11, No. 4. P. 299–310.
8. Сагалаков А.М. Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта–Пуазейля // ПМТФ. 1971. № 2. С. 63–67.
9. Патудин В.М., Сагалаков А.М. Альфвеновские неустойчивости плоского слоя плазмы с однородным пучком ионов // Физика плазмы. 1984. Т. 10, вып. 5. С. 1073–1080.
10. Патудин В.М., Сагалаков А.М. Собственные альфвеновские колебания плазменного цилиндра с пучком ионов // Физика плазмы. 1986. Т. 12, вып. 3. С. 275–285.

*Статья поступила в редакцию 13 мая 2009 г.,  
после доработки 30 марта 2010 г.*