

УДК 539.56

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕЩИНЫ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ МЕЖДУ ЕЕ БЕРЕГАМИ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ НИМИ

В. В. Шевелев, Р. А. Осипов

Московский государственный университет тонких химических технологий  
им. М. В. Ломоносова, 119571 Москва  
E-mails: valeshevelev@yandex.ru, r.a.osipov@gmail.com

Предложена математическая модель круговой дискообразной трещины хрупкого разрушения, между берегами трещины действуют силы сцепления, величина которых определяется расстоянием между этими берегами. Разработан алгоритм численного решения сингулярного нелинейного несобственного интегрального уравнения, определяющего профиль трещины, который может быть использован для решения других интегральных уравнений данного типа. Показано, что учет сил сцепления между берегами трещины приводит к их постепенному смыканию по мере удаления от центра трещины.

**Ключевые слова:** трещина, математическая модель, хрупкое разрушение, интегральное уравнение, численные методы.

**Введение.** Экспериментальные данные показывают, что разрушение представляет собой развивающийся во времени процесс релаксации нагруженного материала, осуществляемый в основном за счет разрыва химических связей, пластической деформации в металлах или высокоэластической деформации в полимерах (см. работы [1, 2] и библиографию к ним). Данные процессы происходят прежде всего в областях перенапряжения материала. В основном эти области локализуются в окрестностях дефектов структуры материала, среди которых наиболее опасными являются трещины. Это обусловлено тем, что большинство нагруженных материалов разрушаются в результате развития в них, как правило, одной, наиболее опасной трещины (трещины разрушения).

Развитие трещин в теле в результате внешнего механического воздействия приводит к изменению его напряженно-деформированного состояния, в том числе в областях локализации трещин. Таким образом, разрушение нагруженного материала представляет собой сложный кинетический стохастический процесс, в ходе которого термофлуктуационно меняется исходное стохастическое распределение имеющихся в материале трещин. Процесс завершается после того, как одна или несколько трещин достигнут критического состояния и разделят материал на части.

Моделирование процесса разрушения материалов является сложной теоретической проблемой, так как для построения адекватных моделей необходимо учитывать рассмотренные выше основные факторы, а для этого объединить в рамках одной модели следующие подходы [1, 3]:

— механический — для определения в каждый момент времени напряженно-деформированного состояния материала с учетом имеющихся в нем трещин;

— термодинамический — для определения частоты элементарных актов процесса разрушения (разрыва химических связей) в рамках теории флуктуации с учетом напряженно-деформированного состояния;

— кинетический — для составления кинетических уравнений процесса разрушения;

— статистический — для оценки функции исходного распределения трещин в материале.

Однако до настоящего времени основной проблемой при использовании механического подхода в моделях разрушения остается стремление растягивающих напряжений на фронте трещины к бесконечности, вследствие того что в классической математической теории трещина рассматривается как разрез нулевой толщины. Это не позволяет последовательно включать процессы релаксации, происходящие на фронте трещины и в его окрестности, в модель процесса разрушения, так как их частоты определяются соответствующей энергией активации, величина которой зависит от напряжений на фронте трещины. В свою очередь это не позволяет сформулировать кинетические уравнения, описывающие рост трещин в материале.

В работах [1, 3] модель процесса разрушения была реализована с использованием механического подхода и математической теории трещин, а для устранения неограниченного роста напряжений при приближении к фронту трещины ограничивались значением растягивающего напряжения на некотором расстоянии  $\lambda$  от фронта трещины. При этом в качестве величины  $\lambda$  выбиралось некоторое характерное для материала расстояние между его структурными элементами, участвующими в процессе разрушения [1]. Однако такой подход не позволяет адекватно рассматривать, например, процессы вынужденной высокоэластической деформации в полимерных стеклах, начинающиеся в областях перенапряжения материала вблизи фронта трещины.

Вопрос об устойчивости трещин, о форме их края и причинах возникновения бесконечных напряжений интересовал многих ученых, пытавшихся объяснить появление особенностей, следующих из классической математической теории трещин. Например, в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [4, 5] сингулярность поля напряжений в вершине трещины устраняется посредством введения зоны предразрушения, расположенной на продолжении трещины. В этой зоне действуют сжимающие напряжения, которые совпадают с пределом текучести для квазихрупких материалов и стягивают между собой берега трещины, вследствие чего расстояние между ними стремится к нулю и значения напряжений в вершине фиктивной трещины являются конечными.

В 50-х гг. XX в. С. А. Христианович и Г. И. Баренблатт разработали новый подход в теории трещин хрупкого разрушения, согласно которому напряжения в вершине трещины конечны (см. [6]). Подход Христиановича — Баренблатта к моделированию трещины хрупкого разрушения основан на введении молекулярных сил сцепления, действующих между берегами трещины. Эти силы рассматриваются как внешние по отношению к сплошной среде, ограниченной изнутри поверхностями (берегами) трещины. Введение сил сцепления позволило объяснить причину существования бесконечных напряжений на фронте трещины в решениях, получаемых в рамках классической математической теории трещин, устранить сингулярности полей напряжений и определить форму трещины вблизи ее концов, где и происходит разрыв химических связей.

Однако введение сил сцепления в модель трещины существенно усложняет расчет напряженно-деформированного состояния материала, содержащего трещину. Это обусловлено прежде всего тем, что силы сцепления между берегами трещины определяются потенциалом взаимодействия структурных единиц (атомов, молекул), расположенных на берегах трещины. Данный потенциал (например, потенциал Морса или Леннарда — Джонса) нелинейно зависит от расстояния между структурными элементами, т. е. от расстояния

между берегами трещины, которое в свою очередь определяется величиной сил сцепления. В результате расстояние между берегами трещины принимается равным значению, соответствующему механическому равновесию всей системы, а определение напряженно-деформированного состояния материала с трещиной разрушения с учетом сил сцепления в рамках классической теории упругости приводит к необходимости решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения, определяющего расстояние между берегами трещины.

В силу нелинейности и сингулярности интегрального уравнения его решение возможно только с использованием численных методов. Однако заметим, что Г. И. Баренблаттом был получен асимптотический профиль внутренней прямолинейной трещины вблизи ее конца, но без учета в явном виде зависимости сил сцепления от расстояния между берегами трещины. Насколько известно авторам данной работы, математическая модель трещины разрушения с учетом в явном виде зависимости сил сцепления от расстояния между ее берегами ранее не изучалась. В данной работе предложена математическая модель круговой дискообразной трещины хрупкого разрушения, в которой учтена зависимость сил сцепления между ее берегами от расстояния между ними, и разработан алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения, определяющего в рамках модели форму трещины.

**1. Формулировка математической модели.** Рассмотрим тело, внутри которого имеется круговая дискообразная трещина радиусом  $R$ , лежащая в плоскости  $Oxy$ , являющейся плоскостью симметрии трещины (центр трещины совпадает с началом координат). К телу приложено внешнее, нормальное к данной плоскости растягивающее напряжение  $\sigma$ . Трещина с такой ориентацией наиболее опасна, так как в ее окрестности действуют растягивающие напряжения, являющиеся наибольшими среди растягивающих напряжений для аналогичных трещин, имеющих другую ориентацию. Рассмотрим полуплоскость, на поверхности которой находится трещина. Получаем задачу о равновесии упругой среды, ограниченной плоскостью, на поверхности которой действуют силы. В данном случае они представляют собой силы сцепления, которые в соответствии с линейной теорией упругости должны задаваться на недеформированной поверхности как внешние силы. Задачи такого типа можно решить методом интегральных преобразований. Но поскольку целью настоящей работы является определение формы трещины с учетом сил сцепления, а не решение соответствующей задачи теории упругости, используем приведенное в [7] решение, записанное с использованием тензора Грина для уравнений равновесия полубесконечной среды в случае когда приложенные к свободной поверхности силы исчезают на бесконечности. Для этого необходимо полагать, что к свободной поверхности приложена сила, равная разности значений силы сцепления на единицу площади поверхности и приложенного внешнего растягивающего напряжения. В результате получаем следующее интегральное уравнение для определения смещения берегов трещины (интегрирование ведется по области  $\Omega$ , представляющей собой плоскость  $Oxy$ ):

$$u_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{F(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy', \quad (1)$$

где

$$u_z(x, y) = h(x, y) - h_0(x, y) - h_{\infty} + h_{\infty}^{(0)} \quad (2)$$

есть разность между смещением берега трещины в точке  $(x, y)$  вдоль оси  $Oz$  и смещением в плоскости трещины при тех же условиях нагружения, но в отсутствие трещины;  $h(x, y)$  — половина расстояния между берегами трещины или расстояние от берега трещины до плоскости симметрии  $Oxy$ , т. е. профиль трещины;  $h_0(x, y)$  — начальная, до

нагружения, форма трещины;  $h_{\infty}^{(0)}$ ,  $h_{\infty}$  — половина равновесного расстояния между частицами в ненагруженном материале и в материале, подвергнутом одноосному растяжению напряжением  $\sigma$ , соответственно;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала;  $E$  — модуль Юнга материала, Па;

$$F(x, y) = f(h(x, y)) = \frac{1}{2r_0^2} \frac{dU(h)}{dh} - \sigma,$$

$U(h)$  — потенциал межатомного взаимодействия берегов трещины;  $r_0 = 2h_{\infty}^{(0)}$  — равновесное расстояние между частицами в ненагруженном материале;  $r_0^2$  — площадь поверхности трещины, приходящаяся на одну кинетическую единицу (атом, молекулу). Величина  $h_{\infty}$  определяется из решения уравнения

$$\frac{1}{2r_0^2} \frac{dU(h)}{dh} - \sigma = 0. \quad (3)$$

Из двух положительных корней уравнения (3) выбирается меньший, соответствующий минимуму потенциала взаимодействия берегов трещины.

В рамках рассматриваемой математической модели трещины необходимо определить границу разреза, т. е. границу нарушения сплошности материала, или фронт трещины. В данной работе граница разреза определяется условием

$$\frac{d^2U(h)}{dh^2} = 0. \quad (4)$$

Условие (4) означает, что в качестве границы разреза принимается линия на плоскости симметрии трещины, на которой величина  $h(x, y)$  имеет значение  $h_m$ :

$$h(x, y) = h_m$$

( $h_m$  — решение уравнения (4)). При данном значении величины  $h$  квазиупругая сила между берегами трещины достигает максимального значения.

Поскольку рассматриваемая модель трещины разрушения является осесимметричной, все величины, описывающие модель, представляют собой функции только расстояния  $r$  от центра симметрии трещины, находящегося в начале координат:

$$h(x, y) = h(r), \quad h_0(x, y) = h_0(r), \quad u_z(x, y) = u_z(r).$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от начала координат до точки с прямоугольными декартовыми координатами  $(x, y)$ . Введя полярные координаты на плоскости с полюсом в центре трещины, проведем интегрирование в уравнении (1) по полярному углу  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ . Получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{f(h(x', y'))}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r' f(h(r'))}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}} dr' d\varphi' = \\ &= \int_0^{\infty} r' f(h(r')) \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}} \right) dr' = \int_0^{\infty} r' f(h(r')) \psi(r, r') dr', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\psi(r, r') &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}} = 2 \int_0^\pi \frac{d\eta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \eta}} = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta'}{\sqrt{(r - r')^2 + 4rr' \sin^2 \eta'}} = \frac{4}{|r - r'|} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\sqrt{rr'}}{|r - r'|}\right),\end{aligned}$$

$F(\pi/2, k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

С учетом полученного результата интегральное уравнение (1) принимает вид

$$u_z(r) = 4 \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_0^\infty \frac{r'}{r - r'} f(h(r')) F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\sqrt{rr'}}{|r - r'|}\right) dr'. \quad (5)$$

**2. Численное решение интегрального уравнения.** Для решения интегрального уравнения (5) с ядром

$$K(r, r') = \frac{r'}{|r - r'|} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\sqrt{rr'}}{|r - r'|}\right)$$

необходимо задать потенциал взаимодействия. В данной работе, являющейся продолжением работы [8], силы сцепления задавались с помощью потенциала Морса. Согласно (2)

$$h(r) = h_0(r) + u_z(r) + h_\infty - h_\infty^{(0)},$$

тогда функцию  $f(h(r))$  можно представить в виде

$$f(r) = \frac{4\alpha D}{r_0^2} \left( e^{-2\alpha(u_z(r) + h_0(r) + h_\infty - h_\infty^{(0)})} - e^{-4\alpha(u_z(r) + h_0(r) + h_\infty - h_\infty^{(0)})} \right) - \sigma, \quad (6)$$

где  $\alpha$  — постоянная потенциала Морса,  $\text{м}^{-1}$ ;  $D$  — энергия диссоциации, Дж.

С учетом сил сцепления, заданных формулой (6), уравнение (5) запишем в виде

$$u_z(r) = g(r) + \xi \int_0^\infty \left( e^{-2\alpha h(r')} - e^{-4\alpha h(r')} \right) K(r, r') dr'. \quad (7)$$

Здесь  $g(r) = \xi_0 \int_0^\infty K(r, r') dr'$  — свободный член, в котором  $\xi_0 = -4(1 - \nu^2)\sigma/(\pi E)$ ;  $\xi = 16(1 - \nu^2)\alpha D/(\pi E r_0^2)$  — параметр уравнения.

Исходная форма рассматриваемой круговой дискообразной трещины может быть практически любой. В данной работе рассмотрены две наиболее простые исходные формы дискообразной трещины. Первая из них задается выражением

$$h_0(r) = \begin{cases} (h_0 - h_m)(1 - r/R) + h_m, & r < R, \\ h_\infty, & r > R, \end{cases} \quad (8)$$

вторая исходная форма представлена в п. 3.

В (8)  $h_0$  — половина начальной высоты трещины в ее центре, м. Величины  $h_\infty$ ,  $h_m$ , являющиеся решениями уравнений (3), (4) соответственно, в случае использования потенциала Морса определяются выражениями

$$h_\infty = \frac{r_0}{2} - \frac{1}{2\alpha} \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2 \sigma}{D\alpha}} \right), \quad h_m = \frac{r_0}{2} + \frac{\ln 2}{2\alpha}.$$

Уравнение (7) решалось численно с использованием метода последовательных приближений [9], который заключается в следующем:

Шаг 1. В качестве начальной формы трещины (нулевого приближения) выбирается форма (8), при этом начальное смещение  $u_z^{(0)}(r)$  считается равным нулю; таким образом, начальное расстояние  $h^{(0)}(r)$  от берега трещины до плоскости симметрии  $Oxy$  равно

$$h^{(0)}(r) = h_0(r) + h_\infty - h_\infty^{(0)}.$$

Шаг 2. Функция  $h(r) = h^{(0)}(r)$  выбирается таким образом, что сила  $f(h(r))$  в равенстве (5), задаваемая соотношением (6), при  $r > R$  тождественно равна нулю, а правая часть уравнения (7) принимает вид

$$g(r) + \xi \int_0^R (e^{-2\alpha h^{(0)}(r')} - e^{-4\alpha h^{(0)}(r')}) K(r, r') dr'. \quad (9)$$

Таким образом, интеграл в правой части уравнения (7) перестает быть несобственным интегралом первого рода.

Шаг 3. Функция  $g(r)$  заменяется интерполирующей функцией  $G(r)$ , которая строится с помощью монотонной кубической интерполяции Эрмита:

$$\int_0^R K(r, r') dr' = \begin{cases} RK(r^2/R^2), & r \leq R; \\ [(R^2 - r^2)/r]K(R^2/r^2) + rE(R^2/r^2), & r > R \end{cases}$$

( $K(r)$ ,  $E(r)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно). Полученная интерполирующая функция используется вместо функции  $g(r)$  во всех последующих расчетах, что существенно ускоряет их, так как не требуется вычислять одни и те же значения этой функции на каждом шаге алгоритма.

Шаг 4. При заданных значениях параметра  $r$  (равномерная сетка с узлами  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  на отрезке  $[0, R]$ ) с учетом выражения для  $h(r)$  и полученной интерполирующей функции  $G(r)$  для функции  $g(r)$  проводится численное интегрирование (9) [10–12] с использованием двойного экспоненциального метода обработки сингулярности и квадратурной формулы Гаусса — Кронрода. По полученному набору точек  $(r_i, u_z(r_i))$  с помощью монотонной кубической интерполяции Эрмита строится интерполирующая функция  $u_z^{(1)}(r)$ . Эта функция является первым приближением для смещения  $u_z(r)$ , которое используется затем на следующем шаге последовательных приближений.

Шаг 5. По полученному первому приближению  $u_z^{(1)}(r)$  для смещения  $u_z(r)$  строится второе приближение  $u_z^{(2)}(r)$ :

— в качестве функции начального расстояния  $h(r)$  от берега трещины до плоскости симметрии  $Oxy$  выбирается выражение

$$h^{(1)}(r) = h_0(r) + u_z^{(1)}(r) + h_\infty - h_\infty^{(0)};$$

— ищется наибольшее значение параметра  $r$ , равное  $R^{(1)}$ , такое что сила  $f(h(r))$  обращается в нуль при  $r = R^{(1)}$ , т. е. с помощью метода Брента решается нелинейное уравнение

$$f(h^{(1)}(R^{(1)})) = 0; \quad (10)$$

— поскольку при  $r > R^{(1)}$   $f(h^{(1)}(r)) \equiv 0$ , интеграл в правой части уравнения (7) становится интегралом с конечным верхним пределом интегрирования, т. е. правая часть этого уравнения принимает вид

$$G(r) + \xi \int_0^{R^{(1)}} (e^{-2\alpha h^{(1)}(r')} - e^{-4\alpha h^{(1)}(r')}) K(r, r') dr'; \quad (11)$$

— при заданных значениях параметра  $r$  проводится численное интегрирование выражения (11) (аналогично тому, как это сделано на шаге 4). Как и выше, по полученному набору точек строится интерполирующая функция  $u_z^{(2)}(r)$ , являющаяся вторым приближением для смещения  $u_z(r)$ .

Шаг 6. Повторяется шаг 5, до тех пор пока расстояние  $d(i)$  между приближениями  $u_z^{(i)}(r)$  и  $u_z^{(i+1)}(r)$ , определяемое равенством

$$d(i) = \max |u_z^{(i+1)}(r) - u_z^{(i)}(r)|,$$

не станет меньше заданного значения погрешности  $\varepsilon$ , в работе принятого равным  $r_0 \times 10^{-8} \approx 10^{-18}$ .

При реализации данного алгоритма возникает ряд вычислительных сложностей.

1. Вследствие того что на каждом этапе проводится численное интегрирование правой части нелинейного сингулярного уравнения (5), ищется решение нелинейного уравнения (10), проводится интерполяция функции  $g(r)$  и каждого приближения  $u_z^{(i)}(r)$  смещения  $u_z(r)$ , промежуточные вычисления необходимо вести с большой точностью, чтобы избежать погрешности, обусловленной ошибками округления; в данной работе вычисления проводились с погрешностью  $10^{-100}$ .

2. Ядро  $K(r, r')$  содержит логарифмическую особенность в окрестности точки  $r' = r$ , существенно усложняющую численное интегрирование выражений типа (9)–(11). Для решения этой проблемы в достаточно малой окрестности точки  $r' = r$  ядро аппроксимировалось его асимптотическим представлением, после чего в этой окрестности с использованием адаптивного алгоритма проводится численное интегрирование.

3. На каждой последующей итерации пределы интегрирования меняются и для установления верхнего предела требуется решать нелинейное уравнение (10).

4. Решение интегрального уравнения (5) существенно зависит от начальной формы трещины  $h_0(r)$ , а также от значения внешнего растягивающего напряжения  $\sigma$ . При определенных видах трещины и напряжения рассмотренный алгоритм теряет устойчивость и перестает быть сходящимся. Это обусловлено тем, что при таких значениях рассматриваемых величин трещина переходит на атермическую стадию роста и материал мгновенно разрушается. Полученные значения напряжения  $\sigma$ , при которых алгоритм теряет устойчивость, хорошо коррелируют с данными эксперимента по определению критического напряжения.

Указанные сложности, а также ряд других были преодолены с помощью алгоритма, реализованного в программе Wolfram Mathematica 8 [10–12]. Разработанный алгоритм может быть применен для численного решения других нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

**3. Результаты расчетов по модели.** Расчеты проводились при следующих значениях параметров, характерных для органического стекла:  $\nu = 0,33$ ,  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-10}$  м,  $\alpha = 1,73 \cdot 10^{10}$  м<sup>-1</sup>,  $D = 5,73 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $E = 4$  ГПа.

Приведем некоторые результаты, следующие из построенной модели.

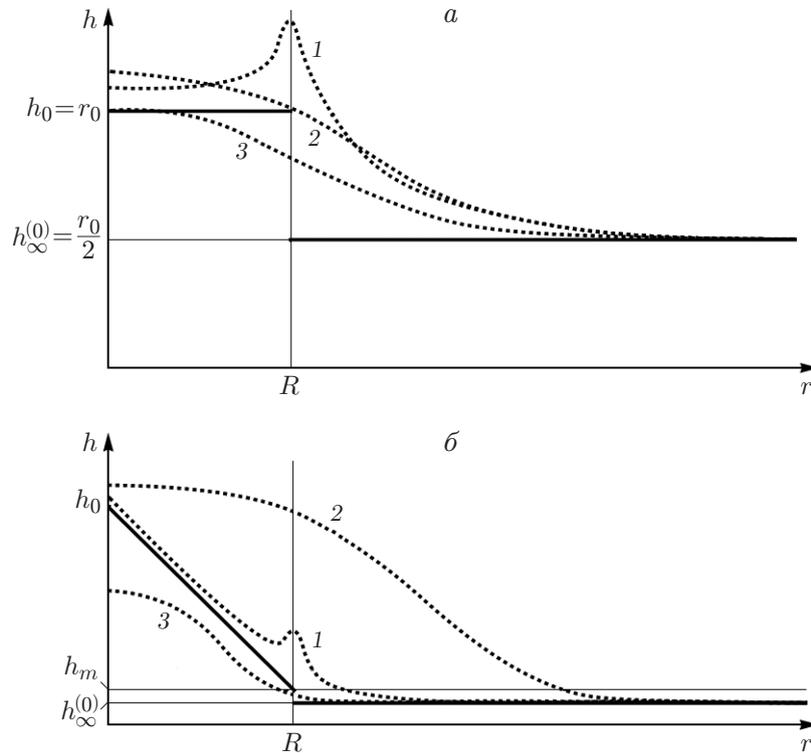


Рис. 1. Формы трещин с различным начальным профилем  $h_0(r)$  (сплошные линии) при  $R = 10^{-7}$  м,  $\sigma = 40$  МПа:  
 а — начальный профиль, задаваемый выражением (12), б — начальный профиль, задаваемый выражением (8); 1 — первое приближение  $h^{(1)}(r)$ , 2 — итоговый профиль  $h_{sol}(r)$ , 3 — равновесный профиль  $h_{eq}(r)$

Рассмотрим два вида трещин:

— разрез толщиной  $r_0$ , начальный профиль  $h_0(r)$  которого задается формулой (рис. 1,а)

$$h_0(r) = \begin{cases} r_0, & r < R, \\ h_\infty, & r > R; \end{cases} \quad (12)$$

— трещина, начальный профиль которой является линейным и задается равенством (8) (рис. 1,б).

На рис. 1 для трещин указанной формы представлены начальные профили  $h_0(r)$ , первые приближения  $h^{(1)}(r)$ , итоговые профили  $h_{sol}(r)$  и равновесные профили  $h_{eq}(r)$  при  $R = 10^{-7}$  м,  $\sigma = 40$  МПа.

На рис. 2 приведены зависимости нормальной силы от координаты  $r$  для трещин различной формы, представленных на рис. 1, при  $R = 10^{-7}$  м,  $\sigma = 40$  МПа.

Результаты расчета в рамках предложенной модели показывают, что равновесный профиль трещины  $h_{eq}(r)$  (получаемый в случае отсутствия внешнего растягивающего напряжения, т. е. при  $\sigma = 0$ ), а также итоговый профиль  $h_{sol}(r)$  близки к профилю, предсказываемому теорией Баренблатта для каждого рассмотренного вида трещины (см. рис. 1). На рис. 2 видно, что нормальные силы, действующие на берега трещины, в каждом случае конечны. Это свидетельствует о конечности напряжений в вершине трещины. Таким образом, модель позволяет определить форму трещины, поле напряжений в окрестности которой не имеет особенностей. Это позволяет рассчитать явным образом значение напря-

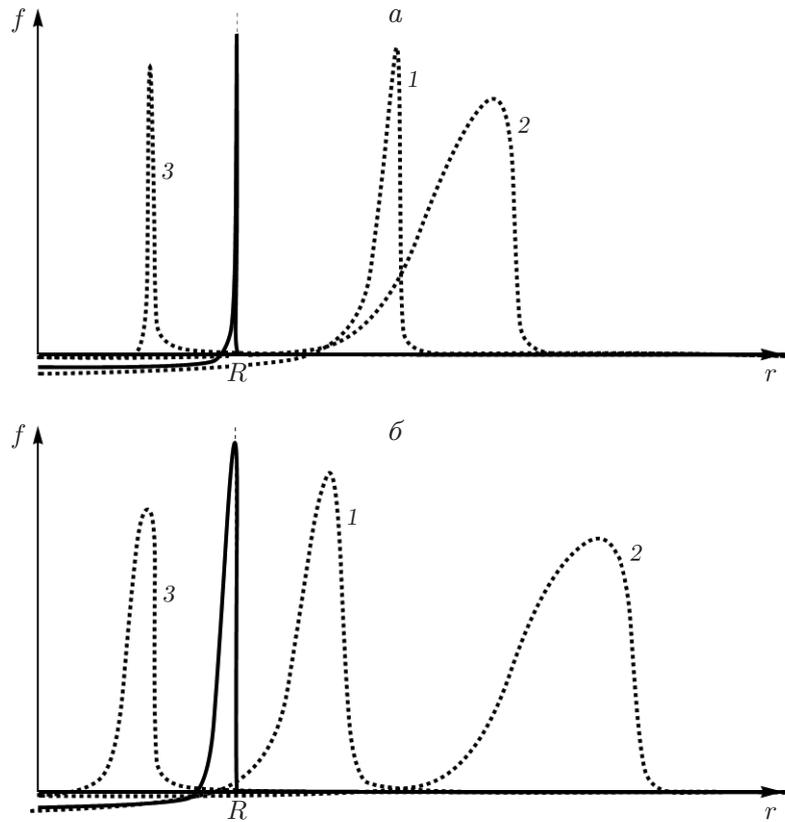


Рис. 2. Зависимости нормальной силы от координаты  $r$  для трещин с различным начальным профилем  $h_0(r)$  (сплошные линии) при  $R = 10^{-7}$  м,  $\sigma = 40$  МПа (обозначения те же, что на рис. 1)

жения в вершине трещины, что имеет большое значение при вычислении средней долговечности материалов, на которые действует внешнее растягивающее напряжение  $\sigma$ , в области их хрупкого разрушения.

Результаты расчета, представленные на рис. 1, показывают, что в отсутствие внешней нагрузки исходный неравновесный профиль трещины релаксирует к равновесной форме профиля, которая значительно отличается от начальной формы разреза и указывает на возможность естественного сближения берегов трещины под действием сил сцепления. Модель позволяет также вычислить изменения профиля трещины разрушения в зависимости от ее начальной формы, размера, параметров материала и величины внешней нагрузки.

Один из принципиальных вопросов теории хрупкого разрушения — вопрос, является ли критерий Гриффитса критерием начала катастрофического (практически мгновенного) роста трещины разрушения или он определяет начало активного, но термоактивированного, развивающегося во времени процесса роста трещины разрушения в соответствии с экспериментально подтвержденной кинетической природой прочности твердых тел [1, 2]. Ответ на этот вопрос можно получить на основе расчета по предложенной модели изменения термодинамического потенциала  $\Delta\Phi$  и численного решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения (7) по формуле [13]

$$\Delta\Phi = \pi \int_0^{\infty} f(r) u_z(r) r dr + 2\pi(h_{\infty} - h_{\infty}^{(0)}) \int_0^{\infty} f(r) r dr + 4\pi\alpha_n \int_0^R \frac{h_{eq}(r) - h_{\infty}^{(0)}}{h_{eq}(r)} r dr \quad (13)$$

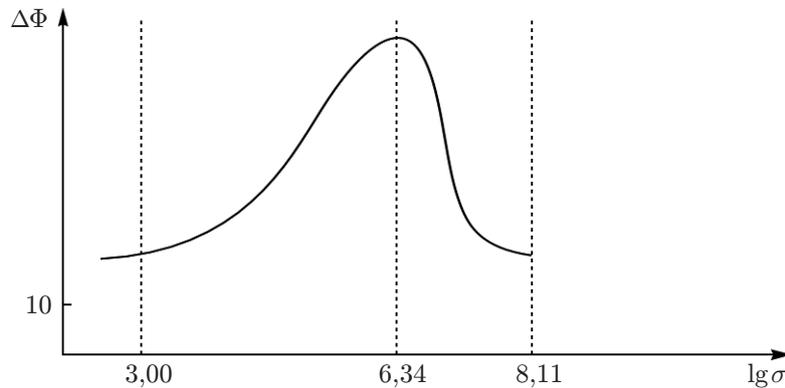


Рис. 3. Зависимость термодинамического потенциала  $\Delta\Phi$  материала, содержащего трещину в виде разреза толщиной  $r_0$ , от внешнего растягивающего напряжения при постоянной начальной длине  $R = 10^{-7}$  м

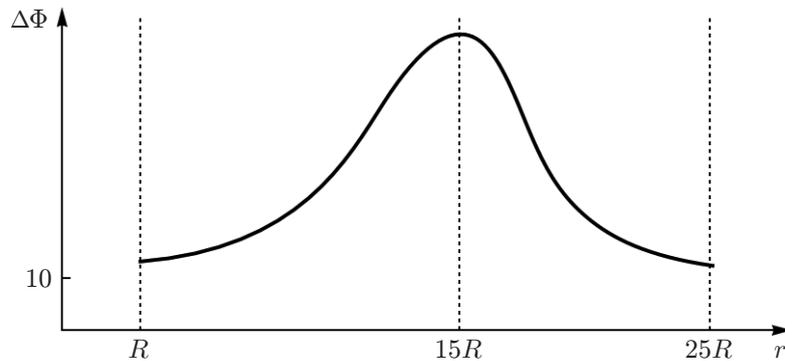


Рис. 4. Зависимость термодинамического потенциала  $\Delta\Phi$  материала, содержащего трещину в виде разреза толщиной  $r_0$ , от ее начальной длины  $R$  при постоянном внешнем растягивающем напряжении  $\sigma = 105$  МПа

( $\alpha_n$  — удельная свободная поверхностная энергия материала). Третье слагаемое в выражении (13) учитывает наличие берегов трещины и конечность расстояния между ними с помощью параметра  $\alpha_n$ .

На рис. 3, 4 представлены зависимости термодинамического потенциала  $\Delta\Phi$  трещины от величины внешнего растягивающего напряжения при постоянной начальной длине (рис. 3) и от ее начальной длины  $R$  при постоянном значении внешнего растягивающего напряжения (рис. 4).

Из зависимости, приведенной на рис. 4, следует, что устойчивый профиль трещины существует при  $R < r < 25R$  ( $R$  — длина трещины в нулевом приближении). Неустойчивость профиля трещины наблюдалась при  $r > 25R$ . Таким образом, критерий Гриффитса определяет начало медленного, а не катастрофического роста трещины. Данный вывод подтверждают расчеты термодинамического потенциала  $\Delta\Phi$  при фиксированном значении начального радиуса разреза и переменной внешней нагрузке  $\sigma$  (см. рис. 3). В этом случае, если  $\sigma$  принимает некоторое критическое значение (в приведенном расчете при  $\sigma \approx 130$  МПа, на рис. 4 этому значению соответствует точка  $\lg \sigma = 8,11$ ), существенно превышающее значение, при котором достигается максимум  $\Delta\Phi$ , модель также теряет устойчивость и дальнейшее вычисление термодинамического потенциала становится невозможным.

Таким образом, предложенная нелинейная модель трещины разрушения учитывает все основные особенности ее поведения при хрупком характере развития разрушения в материале, не содержит нефизических сингулярностей, присущих моделям, не учитывающим силы сцепления между берегами трещины. Это позволяет строить более адекватные модели развития процесса разрушения при усложненных условиях разрушающего внешнего воздействия на материал.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Карташов Э. М.** Структурно-статистическая кинетика разрушения полимеров / Э. М. Карташов, Б. Цой, В. В. Шевелев. М.: Химия, 2002.
2. **Регель В. Р.** Кинетическая природа прочности твердых тел / В. Р. Регель, А. И. Слуцкер, Э. Е. Томашевский. М.: Наука, 1974.
3. **Шевелев В. В., Карташов Э. М.** Некоторые статистические аспекты хрупкого разрушения и долговечности полимеров. Материалы с трещинами // Высокомолекуляр. соединения. 1997. Т. 39Б, № 2. С. 371–381.
4. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
5. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
6. **Райзер Ю. П.** Физические основы теории трещин хрупкого разрушения // Успехи физ. наук. 1970. Т. 100, вып. 2. С. 329–347.
7. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
8. **Шевелев В. В., Осипов Р. А.** Модель профиля трещины разрушения с учетом сил сцепления между ее берегами // Сб. тез. Междунар. конф. “Математика. Компьютер. Образование. 2011”, Пушкино, 24–29 янв. 2011 г. Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. С. 243.
9. **Березин И. С.** Методы вычислений: В 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. М.: Физматгиз, 1960.
10. **Advanced numerical integration in Mathematica.** Champaign: Wolfram Res. Inc., 2008.
11. **Wolfram Mathematica tutorial collection.** Champaign: Wolfram Res. Inc., 2008.
12. **Trott M.** The Mathematica guidebook for numerics. S. l.: Springer: Wolfram Res. Inc., 2006.
13. **Шевелев В. В.** Критерий хрупкого разрушения и долговечность материалов при термомеханическом воздействии // Инж.-физ. журн. 2008. Т. 81, № 2. С. 394–400.

*Поступила в редакцию 4/VI 2012 г.,  
в окончательном варианте — 26/IX 2012 г.*