

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ПРИ ПОМОЩИ ФОТОУПРУГИХ ПОКРЫТИЙ

А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов

(*Новосибирск*)

Известны две схемы исследования плоских упруго-пластических задач при помощи поляризационно-оптического метода. По первой схеме модель исследуемого элемента изготавливается из оптически активного материала, обладающего диаграммой одноосного растяжения, подобной этой диаграмме для материала исследуемого прототипа. В качестве таких материалов применяются хлористое серебро, диаграмма растяжения которого подобна диаграмме растяжения мягкой стали, целлулоид, деформируемый за пределами упругости при малых скоростях нагружения, и другие материалы. Эта схема использована многими авторами, из которых укажем здесь А. В. Степанова [1], предложившего «прозрачные металлы», и отметим монографию С. И. Губкина, С. И. Доброльского и Б. Б. Бойко [2]. Значительное количество работ, выполненных по этой схеме исследования, указано в библиографии обзора Хетены [3].

Предлагаемая работа посвящена второй схеме, при которой исследование проводится непосредственно на заданных элементах (например, металлических) при помощи фотоупругих покрытий. При исследовании по этой схеме на поверхность элемента наносится тонкий слой — покрытие из оптически активного материала. Этот слой обладает малой жесткостью и не оказывает заметного влияния на работу элемента, повторяя деформации на его поверхности. Деформации слоя исследуются поляризационно-оптическим методом при помощи установок одностороннего монтажа. При этом могут исследоваться деформации на поверхности как плоских, так и неплоских элементов.

Такая схема эксперимента для исследования чисто упругих задач была предложена в 1930 г. Менаже [4] и для исследования упруго-пластических задач с указанием способа количественного нахождения напряжений в пластической области деформируемого элемента — в 1950 г. А. Я. Александровым [5].

Однако реализация этой схемы исследования стала возможной только после того, как были разработаны и применены оптически активные материалы на основе эпоксидных смол, обладающие высокой адгезией к конструкционным материалам и необходимыми оптико-механическими характеристиками [6, 7]. Начиная с 1955 г. появилось большое количество экспериментальных работ, основанных на использовании фотоупругих покрытий из эпоксидных смол [8–16] и др.). Более ранняя работа З. Д. Вишневецкого [17] была выполнена с применением бакелита.

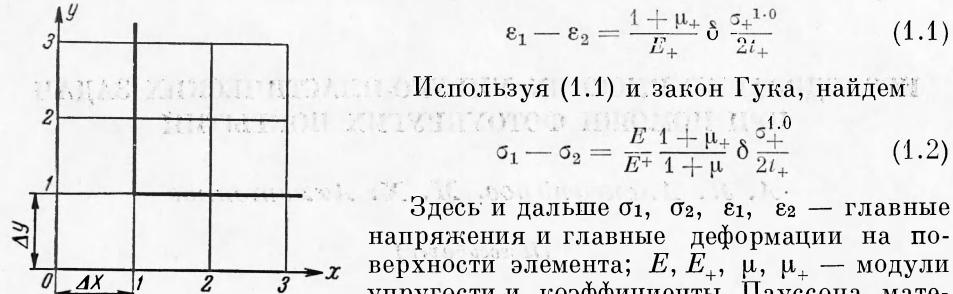
Материал фотоупругих покрытий подбирается так, чтобы его предел упругих деформаций был выше деформаций на исследуемой поверхности элемента. При этом оптическая разность хода поляризованных лучей, нормально проходящих через покрытие, линейно связана с разностью главных деформаций покрытия, а следовательно, и элемента.

По направлениям главных деформаций (совпадающим с направлениями главных напряжений покрытия) определяются направления этих деформаций на поверхности исследуемого элемента.

Техника определения разности главных деформаций и направлений их достаточно полно описана в опубликованных работах [8–17]. Однако вопросы разделения деформаций и определения напряжений в упруго-пластической области в этих работах или вообще не затрагиваются, или (в работах [12, 15, 16]) решаются только для некоторых частных случаев. В работах [12, 15] производится определение напряжений на свободной кромке элемента, находящейся в условиях одноосного растяжения. В работе [16] для определения одного из главных напряжений в поле центрально-растянутой полосы с круглым отверстием вводится предположение, что в рассматриваемых точках вторым главным напряжением можно пренебречь. В работе [8] указывается, что для разделения деформаций можно использовать косое просвечивание (осуществление которого в данном случае связано с экспериментальными трудностями).

В работе предлагаются и экспериментально апробируются некоторые общие способы разделения деформаций и определения напряжений как в упругих, так и в пластических областях деформируемого элемента.

§ 1. Методы решения. 1°. *Определение напряжений в упругой области.* Оптическая разность хода поляризованных лучей, нормально проходящих через покрытие, связана с разностью главных деформаций на поверхности элемента зависимостью:



Здесь и дальше σ_1 , σ_2 , ε_1 , ε_2 — главные напряжения и главные деформации на поверхности элемента; E , E_+ , μ , μ_+ — модули упругости и коэффициенты Пауссона материалов элемента и покрытия соответственно; δ — оптическая разность хода; $\sigma_+^{1.0}$ — цена полосы материала покрытия; t , t_+ — толщина элемента и покрытия соответственно.

Заметим, что зависимость, аналогичную (1.2), легко записать для упругой области элемента из анизотропного материала.

Для разделения главных напряжений в исследуемом элементе могут быть применены обычные методы. В частности, при исследовании элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, применим метод замера поперечной деформации. В этом случае сумма главных напряжений

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{Ew}{t\mu + t_+\mu_+(1-\mu)/(1-\mu_+)} \quad (1.3)$$

Здесь w — суммарное изменение толщины исследуемого элемента и покрытия, определяемое замерами.

Обычные приемы графического интегрирования дифференциальных уравнений равновесия также могут быть использованы для разделения главных напряжений в элементе (но не в покрытии, так как в уравнении равновесия для покрытия войдут неизвестные касательные силы сцепления покрытия с поверхностью элемента, которые по сравнению с напряжениями в элементе пренебрежимо малы). Для применения этого метода на поверхности элемента должна быть хотя бы одна точка, где напряжения разделены. Направления главных напряжений в упругой области элемента из изотропного материала совпадают с направлениями главных деформаций фотоупругого покрытия и определяются при помощи изоклин.

Можно также найти отдельные величины напряжений в элементе (и в покрытии), предварительно определив по отдельности главные деформации, разность которых определяется зависимостью (1.1). Заметим, что определение напряжений в упругой зоне проще произвести, не пользуясь разделением главных деформаций. Однако так как это разделение деформаций используется для исследования неупругих областей, то изложим методику и такого разделения. Ввиду того, что косое просвечивание в данном случае весьма трудоемко, опишем другой способ разделения, основанный на использовании уравнений совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Запишем уравнение (1.4) для точки (1.2) (фиг. 1) в конечных разностях

$$\frac{-2\varepsilon_x(1.2) + \varepsilon_x(1.1) + \varepsilon_x(1.3)}{\Delta y^2} + \frac{-2\varepsilon_y(1.2) + \varepsilon_y(0.2) + \varepsilon_y(2.2)}{\Delta x^2} = -\frac{\gamma_{xy}(0.3) + \gamma_{xy}(2.3) - \gamma_{xy}(2.1) + \gamma_{xy}(0.1)}{4\Delta x \Delta y} \quad (1.5)$$

п определим величину деформации ε_y в точке (2.2) по ранее найденным значениям нормальных удлинений в точках (1.2), (1.1), (1.3) и (0.2). Величина деформации ε_y в точке (2.3) отыскивается аналогично при записи уравнения (1.5) для точки (1.3). Определив деформации ε_x в точках (2.2) и (2.3) по известным разностям нормальных удлинений в этих точках, подсчитанных по данным нормального просвечивания фотоупругого покрытия ($\varepsilon_x - \varepsilon_y = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 20^\circ$, θ — угол наклона главных деформаций к оси x), переходим к разделению деформаций в точке (3.2). Для этого записываем уравнение (1.5) для точки (2.2) и находим ε_y (3.2). Последовательным передвижением аналогично разделяются деформации в других точках поля покрытия. В процессе разделения деформаций производятся контрольные записи уравнения (1.5). Так, например, при записи уравнения (1.5) для точки (2.1) определяется величина ε_x (2.2) и сравнивается с ранее найденным значением ее.

В качестве исходных границ выбираются участки свободного контура, где деформации легко разделяются при помощи соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \mu} \quad (1.6)$$

При помощи этого же соотношения можно разделить деформации вдоль линий, проходящих в непосредственной близости с участками свободного контура.

2°. Определение границы упругой области. Для отделения упругой области элемента от пластической можно воспользоваться известным явлением изменения величины коэффициента Пуассона при появлении пластических деформаций. Одним из методов, описанных выше (построенным без использования зависимости (1.7)), разделяются главные деформации и определяются поперечные деформации элемента в предположении, что деформации по всему полю будут упругими

$$\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (1.7)$$

Расхождение подсчитанных и экспериментально замеренных величин поперечных деформаций означает, что в рассматриваемой точке имеют место пластические деформации. Замеры поперечных деформаций должны производиться с большой точностью с использованием специальной аппаратуры, применяемой для построения изопах при разделении напряжений.

Для приближенного построения границы пластической зоны можно обойтись без замеров поперечных деформаций. В этом случае по формуле (1.2) определяются разности главных напряжений и производится их разделение в предположении, что по всему полю исследуемого элемента деформации будут упругими. Затем выбирается условие пластичности $f(\sigma_1, \sigma_2) = C$ и на основании его по точкам строится контур пластической зоны. При расшифровке напряжений в пластической области границу пластической зоны в некоторых случаях целесообразно сместить в упругую область, чтобы уменьшить возможность ошибочного определения напряжений вблизи границы.

3°. Определение напряжений в пластической области. Знания картины деформированного состояния, найденной при помощи фотоупругих покрытий, недостаточно для определения напряжений в пластической области, и здесь для перехода от деформаций к напряжениям приходится использовать, по крайней мере, одно из допущений различных теорий пластичности. Основные допущения наиболее распространенных теорий пластичности перечислены в таблице.

Данные экспериментального исследования работы фотоупругого покрытия могут быть использованы для выбора и оценки приемлемости используемого допущения. Фотоупругое покрытие позволяет, например, из-

мерить поворот направлений главных деформаций в каждой точке поля в процессе возрастания нагрузок¹.

Если повороты направлений главных деформаций малы, можно воспользоваться одним из допущений деформационной теории пластичности; при наличии заметных поворотов следует использовать одно из допущений

Деформационная теория пластичности	Теория течения
Направления главных нормальных напряжений и главных деформаций совпадают	Направления главных нормальных напряжений и направления приращений главных деформаций совпадают
Интенсивность напряжений есть известная, не зависящая от вида напряженного состояния функция интенсивности деформаций	Интенсивность напряжений есть известная, не зависящая от вида напряженного состояния функций приращения интенсивности деформаций
$\sigma_i = \varphi(\varepsilon_i) \varepsilon_i$	$\sigma_i = \varphi(d\varepsilon_i) d\varepsilon_i$
Объемная деформация пропорциональна среднему нормальному напряжению	Материал в пластическом состоянии не скимаем
$\sigma = K\varepsilon$	
Главные касательные напряжения пропорциональны главным сдвигам	Главные касательные напряжения пропорциональны приращениям главных сдвигов

теории течения. Для отыскания всех компонентов напряжений на свободной поверхности элемента по данным исследования фотоупругого покрытия достаточно каждого из перечисленных в таблице допущений. Однако эти допущения резко неравноценны в смысле приближения получаемых результатов к действительности.

Оценка приемлемости результатов определения напряжений может производиться сопоставлением напряжений, полученных при проходе через пластическую область с напряжениями на участках свободного контура, где они определяются сразу по диаграмме растяжения. Для этого определение напряжений начинается от одной какой-либо свободной кромки с выходом на другую свободную кромку, где и производится сопоставление напряжений. В случае, если пластическая область не выходит на свободные кромки, определение напряжений начинается от границы пластической зоны с выходом через пластическую зону на противоположный участок контура ее, где производится сопоставление напряжений, определенных при проходе через пластическую область и найденных обычными методами для упругой зоны.

Ниже будет показано, как можно определять напряжения в пластической области деформируемого элемента на основе различных допущений деформационной теории. Аналогично ведется определение напряжений и при использовании допущений теории течения. Различие состоит в том, что при использовании допущений теории течения приходится определять приращения разности главных деформаций и изменение их направлений, соответствующие некоторому приращению нагрузки. Для этого замеряются разности главных деформаций и их направления при действии на элемент нагрузок p и $p + \Delta p$. Приращения разности главных деформаций, соответствующие приращению нагрузки Δp , определяются известным выражением

$$\begin{aligned} [\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^2 &= [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_{p+\Delta p}]^2 - [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_p]^2 - \\ &- 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_{p+\Delta p} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_p \cos 2(\theta_{p+\Delta p} - \theta_p) \end{aligned} \quad (1.8)$$

¹ Заметим, что при простом нагружении элементов из материалов, закон растяжения которых хорошо описывается функцией $\sigma_i = A \varepsilon_i^k$ (дюраль, медь), замеренные величины этих поворотов гораздо меньше, чем для элементов из материалов, диаграмма растяжения которых имеет площадку текучести (мягкая сталь).

Изменение угла наклона этих деформаций определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\Delta p} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_{p+\Delta p} \sin 2\theta_{p+\Delta p} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_p \sin 2\theta_p}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_{p+\Delta p} \cos 2\theta_{p+\Delta p} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_p \cos 2\theta_p} \quad (1.9)$$

Заметим, что при определении напряжений на основе допущений теории течения необходима высокая точность эксперимента.

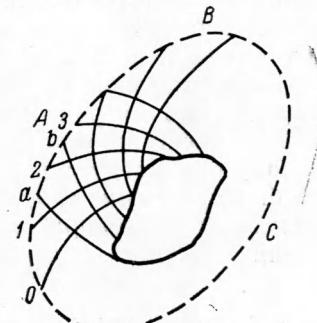
a. *Определение напряжений с использованием допущения о совпадении направлений главных напряжений и главных деформаций* [5]. Найденные при помощи изоклинов направления главных деформаций принимаются за направления главных напряжений. По этим направлениям обычными способами строятся траектории главных напряжений. Определяется граница пластической области и находятся напряжения на этой границе. Напряжения внутри пластической области определяются при помощи дифференциальных уравнений равновесия Ляме — Максвелла для элемента, ограниченного траекториями главных напряжений

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0 \quad (1.10)$$

Здесь s_1 и s_2 — длины, отсчитываемые вдоль траекторий напряжений, ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны этих траекторий.

Интегрируя и преобразуя подынтегральные выражения к виду, более удобному для вычисления, запишем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1(0) - \int_{s_0}^{s_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial s_2} ds_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_2(0) - \int_{s_0}^{s_2} (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \theta_1}{\partial s_1} ds_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$



Фиг. 2

Здесь θ_1, θ_2 — углы наклона главных напряжений к оси x .

Продвигаясь вдоль траекторий, можно последовательно приближенно подсчитать значения интегралов правой части формул (1.11) и далее σ_1 и σ_2 для точек, лежащих внутри пластической области (фиг. 2), ограниченной контуром $ABCD$. Так, например, идя вдоль траекторий из точек 1 и a , можно найти σ_1 и σ_2 в точке {1, a }; аналогично, идя из точек 2 и b , найти σ_1 и σ_2 в точке {2, b }; идя далее из точек {2, b } и {1, a }, найти σ_1 и σ_2 в точке {1, b } и т. д. При таких вычислениях величины $\sigma_1 - \sigma_2$ берутся по исходным точкам, но для уточнения можно вести вычисления методом последовательных приближений. Аналогичный способ можно применить, используя дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи в декартовых координатах [19]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.12)$$

Эти уравнения для элемента (0.0), (0.1), (1.1), (1.0) (фиг. 1) в конечных разностях имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x(1.1) - \sigma_x(0.1)}{\Delta x} + \frac{\tau_{xy}(1.1) - \tau_{xy}(1.0)}{\Delta y} &= 0 \\ \frac{\sigma_y(1.1) - \sigma_y(1.0)}{\Delta y} + \frac{\tau_{xy}(1.1) - \tau_{xy}(0.1)}{\Delta x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Полагая, что напряжения в точках (0.1) и (1.0) найдены и принимая $\Delta x = \Delta y$, определим напряжения σ_x и σ_y в точке (1.1)

$$\begin{aligned}\sigma_x(1.1) &= \sigma_x(0.1) - \tau_{xy}(1.1) + \tau_{xy}(1.0) \\ \sigma_y(1.1) &= \sigma_y(1.0) - \tau_{xy}(1.1) + \tau_{xy}(0.1)\end{aligned}\quad (1.14)$$

Отсюда

$$\sigma_x(1.1) - \sigma_y(1.1) = \sigma_x(0.1) - \sigma_y(1.0) - \tau_{xy}(0.1) + \tau_{xy}(1.0) \quad (1.15)$$

Определив касательное напряжение

$$\tau_{xy}(1.1) = \frac{1}{2} [\sigma_x(1.1) - \sigma_y(1.1)] \operatorname{tg} 2\theta(1.1) \quad (1.16)$$

можно найти напряжения $\sigma_x(1.1)$ и $\sigma_y(1.1)$ при помощи выражений (1.14). Зная напряжения в точках (1.1) и (1.2), можно аналогично определить напряжения в точке (1.2); по напряжениям в точках (2.0) и (1.1) — напряжения в точке (2.1); по напряжениям в точках (1.2) и (2.1) — напряжения в точке (2.2) и т. д. по всему полю элемента.

Заметим, что, как показали эксперименты (§ 3), использование для определения напряжений допущения о соосности напряжений и деформаций приводит иногда (даже при возрастании нагрузок пропорционально одному параметру) к далеким от действительности результатам.

б. Определение напряжений с использованием допущения о связи интенсивностей деформаций и напряжений. Допущение «единой кривой» упрочнения

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) \cdot \varepsilon_i \quad (1.17)$$

(где функция $\Phi(\varepsilon_i)$ определяется опытом на простое растяжение или чистое кручение) подтверждается рядом экспериментов даже в тех случаях, когда нагружение несколько отличается от простого [18].

Для отыскания интенсивности деформаций следует произвести разделение главных деформаций на поверхности элемента и найти величины поперечных деформаций при помощи замеров.

В первом приближении значения ε_3 можно определить, используя условие несжимаемости материала в пластической стадии

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (1.18)$$

По найденным на основании соотношения (1.17) величинам интенсивностей напряжений можно определить все компоненты тензора напряжений при помощи интегрирования дифференциальных уравнений равновесия в декартовых координатах. Для этой цели выражения нормальных напряжений (1.14) в точке (1.1) (фиг. 1) введем в формулу для определения интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (1.19)$$

и определим касательные напряжения в точке (1.1)

$$\tau_{xy}(1.1) = \frac{\eta + \xi}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{16\sigma_i^2 - 15(\eta + \xi)^2 + 48\eta\xi} \quad (1.20)$$

Здесь значения η и ξ определяются компонентами напряжений в точках (0.1) и (1.0)

$$\eta = \sigma_x(0.1) + \tau_{xy}(1.0), \quad \xi = \sigma_y(1.0) - \tau_{xy}(0.1)$$

По найденному значению $\tau_{xy}(1.1)$ при помощи выражений (1.14) определяются $\sigma_x(1.1)$ и $\sigma_y(1.1)$. Дальнейшее продвижение по точкам поля аналогично ранее описанному.

Для приближенного определения напряжений можно взамен условия (1.17) использовать условие упрочнения в виде

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{\max} = f(\gamma_{\max}) \gamma_{\max} \quad (1.21)$$

не требующее предварительного разделения деформаций (при $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$). По найденной разности главных напряжений можно произвести разделение напряжений при помощи дифференциальных уравнений равновесия без использования изоклин [19]. Интегрирование ведется от свободных кромок, где напряжения разделены.

Допустим, что это—оси x и y на фиг. 1, тогда разность нормальных напряжений находится по формуле (1.15) и угол наклона главных напряжений определяется при помощи выражения

$$\cos 2\theta = (\sigma_x - \sigma_y)/(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.22)$$

Определив касательные напряжения, находим напряжения σ_x и σ_y из выражений (1.14).

в. Определение напряжений с использованием допущений о пропорциональности объемной деформации среднему нормальному напряжению. Описанный прием интегрирования уравнений равновесия в декартовых координатах позволяет найти также все компоненты напряжений, если известна только сумма нормальных напряжений. Ее можно определить, используя допущение о пропорциональности объемной деформации и среднего нормального напряжения. Для этого необходимо сначала разделить главные деформации ε_1 и ε_2 и замерить поперечную деформацию ε_z .

Отметим, что определение напряжений в некоторых случаях облегчается при одновременном использовании двух допущений.

§ 2. Техника эксперимента [20]. 1°. *Фотоупругое покрытие.* В качестве материала для фотоупругих покрытий применялась эпоксидная смола марки ЭД-6, отверждаемая малеиновым ангидридом с введением пластификатора — дибутилфталата. Количество пластификатора (от 5 до 40%) определялось требуемой величиной относительного удлинения. Режим полимеризации плиток, механическая обработка их и отжиг производились в соответствии с рекомендациями [7].

В зависимости от величины пластифицирующей добавки меняются оптикомеханические свойства материала ЭД-6М. Средние оптикомеханические характеристики материала с содержанием 10% дибутилфталата были следующими

Модуль упругости	$E_+ = 3.5 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$
Коэффициент Пуассона	$\mu_+ = 0.38$
Предел упругих деформаций	$\varepsilon_{0+} = 2.0\%$
Предел прочности	$\sigma_{B+} = 500 \text{ кг/см}^2$
Цена полосы	$\sigma_+^{1.0} = 12 \text{ кг/см}^2$

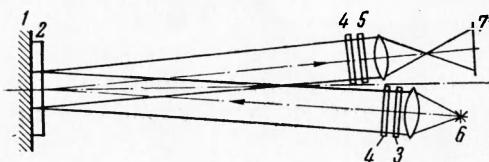
Для отражения света исследуемая поверхность металлического элемента полировалась, но не слишком тщательно (во избежание ухудшения сцепления покрытия с поверхностью элемента). При исследовании элементов из плохо отражающих материалов применялся способ предварительной приклейки к поверхности покрытия тонкой алюминиевой фольги, которая в свою очередь приклеивалась к исследуемой поверхности элемента. Для склеек применялся клей следующего состава:

эпоксидная смола марки ЭД-5	100%
полиэтиленполиамин	7%
акетон	5—10%

Клей полимеризовался при комнатной температуре в течение 36—48 ч., при этом в покрытии начальные напряжения не возникали.

Было также опробовано нанесение покрытий путем наливания и полимеризации смолы ЭД-б непосредственно на исследуемой поверхности элемента. Сцепление получалось вполне достаточным. Однако при этом в покрытии возникали усадочные напряжения, вызывавшие появление значительной разности хода в покрытии у контура элемента.

Толщина покрытия должна выбираться с учетом ряда обстоятельств. При работе с более толстыми покрытиями повышается точность измерения разности хода и облегчается контроль толщины покрытия. С другой стороны, во избежание заметного искажения деформированного состояния элемента жесткость упруго-работающего покрытия должна быть достаточно малой по сравнению с жесткостью пластиически деформируемого элемента.



Фиг. 3

Толщина покрытия должна выбираться с учетом ряда обстоятельств. При работе с более толстыми покрытиями повышается точность измерения разности хода и облегчается контроль толщины покрытия. С другой стороны, во избежание заметного искажения деформированного состояния элемента жесткость упруго-работающего покрытия должна быть достаточно малой по сравнению с жесткостью пластиически деформируемого элемента.

С уменьшением толщины покрытия уменьшаются погрешности, вызванные неравномерным распределением напряжений по толщине покрытия в местах высоких градиентов деформаций и сужается также зона (ширина которой близка к толщине покрытия), расположенная вдоль контура образца или контура покрытия, где деформации свободной и приклеенной к элементу поверхности покрытия значительно отличаются одна от другой. Для определения на этих участках величин деформаций в плоскости элемента может применяться способ приклейки слоя оптически активного материала в торец к элементу с замером разности хода при просвечивании слоя поляризованным лучом, перпендикулярным к плоскости элемента. Разность хода у места склейки связана с деформацией, направленной вдоль контура образца, соотношением

$$\delta = \frac{E_+}{\sigma_{+}^{1.0}} t \varepsilon_1 \quad (2.1)$$

2°. Поляризационные установки. Для исследования деформаций фотоупругого покрытия были применены две установки одностороннего монтажа. При работе методом полос использовалась установка типа Тарди, схема которой представлена на фиг. 3, где 1 — исследуемый элемент, 2 — фотоупругое покрытие, 3 — поляризатор, 4 — пластинка в четверть длины волны, 5 — анализатор, 6 — источник света, 7 — экран.

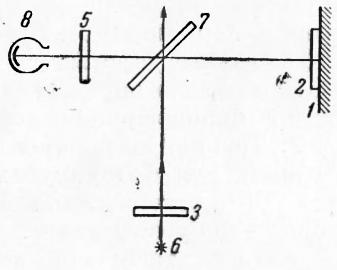
Картины полос и линии изоклин фотографировались фотоаппаратом, снабженным телеобъективом. При угле между осями поляризаторной и анализаторной частей установки порядка 5° точки входа и выхода лучей из покрытия практически совпадают.

Для измерения небольших разностей хода, когда метод полос дает значительную погрешность, применялась установка, схема которой показана на фиг. 4 (обозначения 1—6 те же, что и на фиг. 3), 7 — полупрозрачное зеркало, 8 — фотоэлемент [21].

Мерилом разности хода здесь является интенсивность света, измеряемая фотоэлементом и связанная с разностью хода зависимостью

$$J = J_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (2.2)$$

Здесь α — угол между направлением главного напряжения и плоскостью поляризации, δ — разность хода лучей, J_0 — наибольшая возмож-



Фиг. 4

ная интенсивность света, определяемая калибровкой при $\alpha = 45^\circ$ в точке, где $\delta = \pi$.

Работа при замере интенсивности света по точкам аналогична работе с компенсатором. Прибор позволяет также получать графики J вдоль какого-либо сечения элемента. По двум таким графикам, записанным при двух положениях плоскости поляризации, можно решением двух уравнений типа (2.2) находить разность хода и угол наклона главных деформаций для каждой точки сечения без специального замера этого угла. Для определенных значений угла между двумя положениями плоскости поляризации, при которых производится запись, могут использоваться номограммы.

Отметим, что применение схем с компенсацией (например [22]), исключающих влияние качества отражающей поверхности, прозрачности покрытия и т. п., требует принятия специальных мер (введение иммерсии и др.), чтобы устранить влияние лучей, отраженных от поверхностей покрытия, линз и других элементов установки на результаты измерений.

Описанные установки позволяют найти разность главных деформаций (напряжений покрытия) и их направление. Для разделения деформаций можно применить косое просвечивание покрытия. Для этого был создан прибор по схеме, показанной на фиг. 5, где 9 — компенсатор, а остальные обозначения те же, что и на фиг. 3. Трехгранная призма была изготовлена из материала, обладающего таким же коэффициентом преломления, как и материал фотоупругого покрытия. Если коэффициенты преломления материалов призмы и покрытия оказываются недостаточно близки и этого обстоятельства устраниить нельзя, то для гашения луча, отраженного от поверхности покрытия в сечение AB , вводится непрозрачная перегородка. Для ликвидации воздушного зазора опорная поверхность призмы смазывается иммерсионной жидкостью (альфабромнафталин с керосином). Разность хода δ_k при косом просвечивании связана с главными напряжениями покрытия (σ_{1+} , σ_{2+}) следующим соотношением

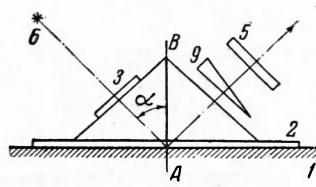
(в плоскости падения лежит вектор σ_{2+})

$$\delta_k = \frac{2t_+}{\cos \varphi} \frac{1}{\sigma_{1+}^{1.0}} (\sigma_{1+} - \sigma_{2+} \cos^2 \varphi) \quad (2.3)$$

Здесь φ — угол падения.

При $\varphi = 0$ (нормальное падение) имеем

$$\delta = \frac{2t_+}{\sigma_{1+}^{1.0}} (\sigma_{1+} - \sigma_{2+}) \quad (2.4)$$



Фиг. 5

Из (2.3) и (2.4) находим величины главных напряжений σ_{1+} и σ_{2+} в отдельности, а по ним, используя закон Гука, и деформации. Наличие металлической отражательной поверхности под покрытием значительно осложняет эксперимент, так как к оптической разности хода лучей, прошедших через покрытие, добавляется добавочный сдвиг фаз при отражении поляризованного света от поверхности металла. Этот добавочный сдвиг фаз происходит в плоскости падения и зависит от угла падения и диэлектрических постоянных металла. Поэтому при замере оптической разности хода приходится соблюдать условия перпендикулярности одного из главных напряжений в исследуемой точке покрытия к плоскости падения. Это вынуждает вести исследования по точкам, меняя каждый раз направление плоскости падения, что делает этот метод весьма трудоемким.

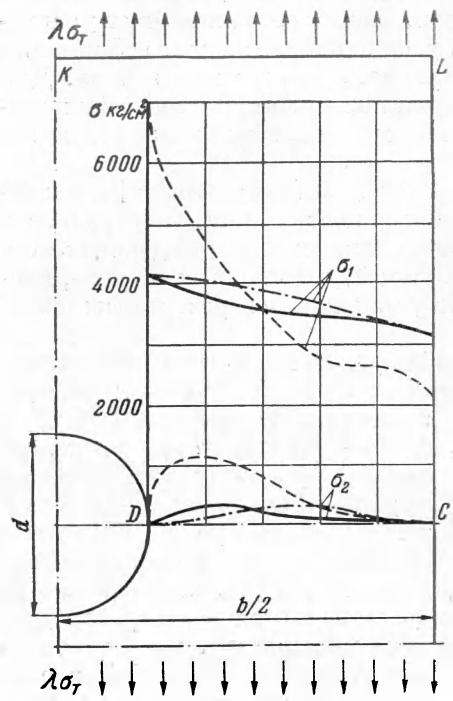
Некоторые приближенные способы разделения деформаций предложены в работе [23]. Суть их заключается в том, что разрезкой покрытия снимается одно из напряжений в сечении разреза по замерам разности хода до разрезки и после разрезки разделяются главные напряжения (деформации) в покрытии.

§ 3. Пример исследования. Растяжение полосы с круглым отверстием. В качестве примера приведем результаты исследования упруго-изотропного состояния полосы с круглым отверстием при растяжении (фиг. 6). Образцы изготавливались из дуралюминия марки Д-1Т с характеристиками: модуль упругости $E = 7 \cdot 10^5$ кг/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0.38$, предел текучести (условный) $\sigma_T = 2500$ кг/см², предел прочности $\sigma_B = 4500$ кг/см². На образцы наклеивались покрытия толщиной $t_+ = 2.3$ мм.

В процессе нагружения образца, которое производилось по ступеням с фотографированием картин полос и линий изоклинов, на каждой ступени было обнаружено, что направление главных деформаций на большей части поля меняет свою ориентацию незначительно. Для определения напряжений были использованы допущения деформационной теории пластичности. Картинны полос для некоторых значений параметра нагружения λ показаны на фиг. 7 ($\lambda = p/bt\sigma_T$, p — растягивающее усилие).

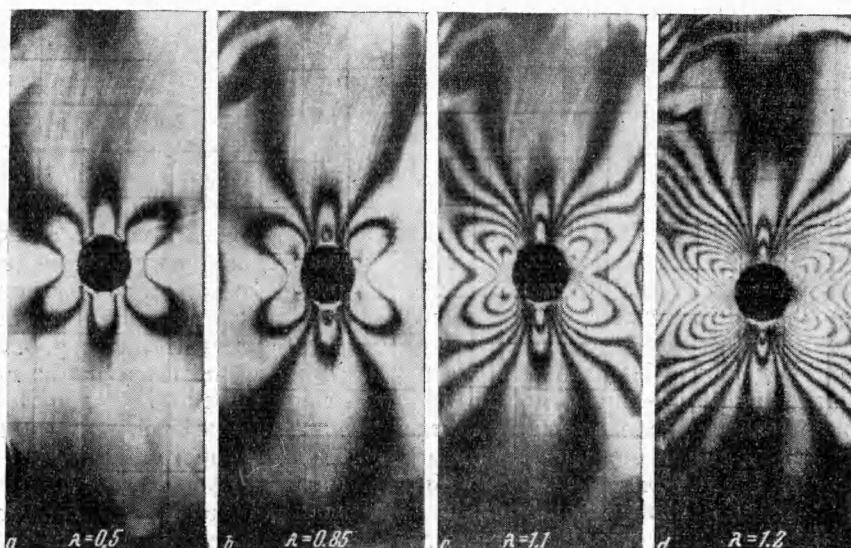
а. *Определение напряжений с использованием допущения о соосности главных напряжений и главных деформаций*

Изоклины главных деформаций покрытия рассматривались как изоклины главных напряжений образца, и напряжения по всему образцу



Фиг. 6

определялись при помощи интегрирования дифференциальных уравнений равновесия (см. § 1, 3°). Интегрирование производилось от кромок KL и CL , для которых известно (фиг. 6) $\sigma_1 = \lambda\sigma_T$ на кромке KL , $\sigma_2 = 0$.



Фиг. 7

Эпюры напряжений σ_1 и σ_2 для сечения DC по данным такого интегрирования показаны пунктиром на фиг. 6. Проверка равновесия (площадь эпюры σ_1 должна равняться $0,5\lambda\delta_T$) подтверждает достаточную точность процесса интегрирования (погрешность составила 1%).

Приемлемость полученного решения определяется сопоставлением напряжений, определенных в ходе интегрирования с напряжениями, определенными по картине полос для тех точек, где реализуется одноосное напряженное состояние.

Так, по расшифровке напряжения в точках D и C оказались

$$\sigma_1^* = 6700 \text{ кг}/\text{см}^2, \quad \sigma_2^* = 2100 \text{ кг}/\text{см}^2$$

соответственно, в то время как по картине полос они должны быть равны

$$\sigma_1 = 4100 \text{ кг}/\text{см}^2, \quad \sigma_2 = 3100 \text{ кг}/\text{см}^2.$$

Величина σ_1^* в точке D намного превышает предел прочности материала образца. Кроме того, решение показывает наличие значительной концентрации напряжений, в то время как при развитии пластических деформаций можно ожидать уменьшения ее. Результаты этого решения показывают, что принятые направления главных напряжений отличаются от действительных. Отсюда следует, что с развитием пластических деформаций направления главных напряжений поворачиваются относительно направлений главных деформаций и, следовательно, расшифровка напряжений на основе допущения о совпадении направлений главных напряжений и главных деформаций неприемлема.

б. *Определение напряжений с использованием допущения о связи интенсивностей деформаций и напряжений.* Интенсивность деформаций находилась по разделенным значениям главных деформаций в предположении отсутствия объемной сжимаемости материала в пластической стадии. Разделение деформаций производилось при помощи уравнения совместности деформаций.

По найденным значениям интенсивностей деформаций по кривой $\Phi(\varepsilon_i)$ определялись интенсивности напряжений. Определение компонентов напряжений производилось по методике, изложенной в § 1.

Интегрирование начиналось от кромки CL (фиг. 6), где на картине полос определялись значения $\sigma_1(\sigma_2 = 0)$ и подсчитывались величины напряжений (ось x направлена под углом 45° к направлению растяжения)

$$\sigma_x = \sigma_y = -\tau_{xy} = \frac{\sigma_1}{2}$$

Эпюры по данным этого интегрирования показаны штрих-пунктиром на фиг. 6 для сечения DC . Одновременно была произведена расшифровка с использованием зависимости (1.21) между максимальным касательным напряжением и максимальным сдвигом (данные этого интегрирования для сечения DC показаны на фиг. 6 сплошными линиями).

Расхождение между этими двумя решениями незначительно. В обоих случаях сопоставление напряжений, определенных в ходе расшифровки для точки D с напряжениями, определенными из картины полос, дало ошибку в пределах 2%.

Точность процесса расшифровки подтверждена суммарной проверкой равновесия (погрешность составила $\pm 1.5\%$).

Поступила 15 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

- С т е п а н о в А. В. Новый оптический метод изучения напряжений в поляризованном свете. ЖТФ, 1949, т. 19 вып. 2.
- Г у б к и н С. И., Д о б р о в о л ь с к и й С. И., Б о й к о Б. Б. Фотопластичность. Изд-во АН БССР. Минск, 1957.
- Н е т े п у е М. Photoelasticity and photoplasticity. Proc. of the first symposium of naval structural mechanics. Pergamon Press, 1960.

- Есть русс. пер. в Сб. пер. иностр. статей, Механика, 1961, 1.
4. Mesnager M. Sur la determination optique des tensions intervenues dans les solides a trois dimensions. Compt. Rent. C. Acad. Sci. Paris, 1930, 190, 1249.
 5. Александров А. Я. Об одной возможной схеме применения метода фотоупругости к исследованию плоских упруго-пластических задач. Тр. НИИЖТ, 1952, вып. VIII.
 6. D'Agostino J., Drucker D. C., Liu C. K. and Mylonas C. Epoxy Adhesives and Casting Resins as Photoelastic Plastics. Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, 1955, v. 12, N 2, 123—128.
 7. Пригородный Н. И., Рейсс А. К., Бокштейн М. Ф., Курякова Н. Л. Модели из нового оптически активного материала для поляризационно-оптического метода исследования наяжений. М., Изд-во филиала ВНИТИ, 1958.
 8. D'Agostino J., Drucker D. C., Liu C. K. and Mylonas C. An Analysis of Plastic Behaviour of Metals with Bonded Birefringent Plastic. Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, 1955, vol. XII, N 2, pp. 115—122.
 9. Zandman F. Analyse des Contraintes par vernis photoelastiques. Analyse Contraintes, 1956, 2, N 6.
 10. Zandman F. and Wood M. R. Photostress. Prod. Eng. 1956, 27, N 9.
 11. Zandman F. Photoelastic-Coating Technique for Determining Stress Distribution in Welded Structures. Welding J. 1960, 4290, N 5.
 12. Kawata K. Analyse of Elasto-Plastic Behaviour of Metals by means of Photoelastic Coating Method. J. Scient. Ros. Inst. 1958, 52, 1471/1477.
 13. H. D. Fesser, D. J. Haines. A Photoelastic Technique for Strain Measurement on Flat Aluminium alloy Surfaces. Brit. J. of Appl. Phys. 1959, 9, N 7.
 14. Кузнецов Б. А. Поляризационный метод исследования малых пластических деформаций, Заводская лаборатория, 1957, № 5.
 15. Напряжения и деформации в деталях и узлах машин. Под редакцией Н. И. Пригородского, Машгиз, 1961.
 16. Linge J. R. Photoelastic Measurement of Surface Strain. Aireract Eng. 1960, V. XXXII, N 378, 379, 380.
 17. Вишневецкий З. Д. Поляризационно-оптический метод измерения напряжений на натуральных конструктивных элементах. Заводская лаборатория, 1955, № 4.
 18. Жуков А. М. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. Инж. сб., 1954, т. XX.
 19. Ахметзянов М. Х. Разделение напряжений без использования пзоклин. Тр. НИИЖТА, 1961, вып. XXIV.
 20. Ахметзянов М. Х. Измерение упруго-пластических деформаций методом фотоупругих покрытий. Тр. НИИЖТА, 1961, вып. XXIV.
 21. Краснов Л. А. Измерение оптической разности хода при исследовании методом фотоупругих покрытий, Тр. НИИЖТА, 1961, вып. XXIV.
 22. Александров А. Я., Краснов Л. А. Электрический компенсатор для измерения разности хода при исследованиях методом фотоупругости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
 23. Краснов Л. А. Приближенные способы разделения главных деформаций при исследовании методом фотоупругих покрытий. Тр. НИИЖТА, 1961, вып. XXIV.