

К ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАЗМЫ В КАНАЛЕ

А. И. Морозов, А. П. Шубин

(Москва)

Получены упрощенные уравнения, описывающие медленно изменяющиеся плоские течения хорошо проводящей квазинейтральной невязкой плазмы в канале. Разобран практически интересный случай течения в канале со сплошными металлическими идеально проводящими стенками — электродами. В случае, когда газовое давление велико по сравнению с магнитным ($\beta \gg 1$), распределение полей и тока определяется газодинамическими факторами, возмущения продольного электрического поля сплошными электродами проникают в поток скинновым образом, симметрично с обоих электродов, приводя к затуханию продольного электрического поля вблизи входа в канал; рассмотрены также задачи о движении плазмы при идеальной и при плохой проводимости. В обратном предельном случае ($\beta \ll 1$) показано, что при ускоренном движении плазмы в канале вблизи анода наблюдается возрастание напряженности электрического поля и течение резко неоднородно в поперечном направлении. Показана возможность отрыва плазмы от анода (предельный режим), сопровождающаяся отрывом электронной скорости от скорости ионов. Получен критерий отрыва плазмы и отмечена его возможная связь с возникновением прианодных «взрывов». Показано, что при $\beta \ll 1$ джоулевы потери малы по сравнению с вкладываемой в разряд мощностью, и их величина не зависит от проводимости плазмы.

Стационарным коаксиальным плазменным ускорителям с собственным магнитным полем (т.е. полем, создаваемым исключительно за счет протекающего через ускоритель электрического тока) посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ; тем не менее до сих пор нет должного понимания процессов, имеющих место в системах подобного рода. Это объясняется как многообразием процессов, так и их сложностью и взаимозависимостью. Даже если оставить в стороне вопросы, связанные с ионизацией плазмы и ее трением об электроды — стенки ускорительного канала, и считать плазму полностью ионизованной и невязкой, остается очень сложная проблема воссоздания картины течения плазмы при наличии тех или иных граничных условий на электродах. Сущность этой проблемы (которая возникает при самых различных течениях плазмы около стенок) заключается в трудности согласования электромагнитных полей в потоке плазмы с полями на электродах¹, поскольку для электромагнитного ускорения хорошо проводящей плазмы (т.е. для ускорения ионов при сохранении квазинейтральности) необходимо продольное электрическое поле (см. [1]). Очевидно, что проблема согласования полей в потоке и на электродах не возникает, если конструкция электродов не накладывает каких-либо ограничений на величину продольного электрического поля. Такая ситуация может реализоваться в системах с секционированными электродами [2]². Однако, если электроды каким-либо образом ограничивают возможные значения продольного электрического поля E_t (простейший пример — идеально проводящие сплошные металлические электроды, на которых $E_t = 0$), то сразу возникает проблема согласования полей. Для этого необходимо рассматривать дифференциальные уравнения более высокого порядка, чем уравнения движения идеально проводящей плазмы в пренебрежении инерцией электронов, т.е. учесть либо конечную проводимость плазмы, либо инерцию электронов, либо и то и другое вместе.

Качественный анализ процессов в коаксиальных ускорителях в рамках двухжидкостной модели плазмы был дан в работах [1, 4, 5]. В работе [1] анализировались общие свойства двумерных течений плазмы в предположении ее идеальной проводимости ($\sigma = \infty$) и безынерционности электронов ($m = 0$). Было показано, что течения обладают совершенно различными свойствами при малых параметрах обмена ($\xi \ll 1$) и при $\xi \gg 1$ ³. Влияние параметра обмена на картину течения объясняется тем, что для хо-

¹ Первое указание на трудность такого рода содержится в [12].

² Если параметр обмена [3] мал, то, как видно из эюр ускорителя [1], можно также организовать регулярную картину течения, перейдя на ионную проводимость, т.е. с помощью подачи вещества через анод и частичного высаживания ионов на катод заставить ионы переносить электрический ток.

³ Напомним, что параметром обмена ξ (см. [3]) называется отношение разрядного тока I к подаче вещества m в токовых единицах.

лодных электронов ($T_e = 0$) такие величины, как электрический потенциал ϕ и характеристика вмороженности B/n сохраняются не вдоль ионных траекторий, а вдоль электронных траекторий. При $\xi \ll 1$, когда ионные и электронные траектории почти совпадают, можно говорить о вмороженности поля в «плазму», т. е. в обе ее компоненты. Если же $\xi \gg 1$, то значения B/n и ϕ в объеме определяются в основном их значениями вблизи катода. Стало быть, даже при очень хорошей проводимости, но $\xi \sim 1$, возмущение продольного электрического поля у сплошного металлического катода распространится на весь поток. Эти рассуждения были подтверждены в работах [4, 5], где анализировался характер возмущений, вносимых слабо неидеальной расщепкой электродов (под идеально расщепленными электродами понимаются электроды, не накладывающие никаких ограничений на E_t); эти возмущения были малы в силу слабой неидеальности расщепки. Остановимся подробнее на работе [4], в которой предполагалось, что плазма квазинейтральна ($n_i \approx n_e$), инерция электронов пренебрежимо мала ($m = 0$), но проводимость плазмы σ конечна, хотя и велика. Основные результаты работы [4] можно сформулировать следующим образом:

1) если $\xi \ll 1$, то возмущения могут быть локализованы в симметричных скин-слоях вблизи электродов, скин-толщины при этом, однако, соответствуют диффузии плазмы в магнитном поле, а не диффузии поля в плазме [6]. Этот случай допускает расчет методом пограничного слоя;

2) если же $\xi \gg 1$, то возмущения, вносимые неидеальностью катода, захватывают весь объем канала, это приводит к образованию одного прианодного слоя. Течение уже не может быть разбито на «основной» поток и приэлектродные слои и необходимо искать решение сразу для всего объема канала. Строгое решение нелинейной двухмерной задачи крайне затруднительно; в то же время приближение узкого канала здесь явно не годится. Приемлемым приближением является приближение канала медленно меняющегося сечения, развитое в работах [1, 7] для случая идеально проводящей плазмы. Здесь это приближение будет обобщено на случай конечной проводимости. Кроме того, ограничимся анализом плоских течений, как наиболее простым, поскольку учет аксиальной симметрии не тривиален как физически, так и математически.

Следует отметить, что экспериментальное изучение течений в каналах [8, 9] полностью подтвердило выводы теории [1, 4, 5]. Картина течений оказалась в то же время гораздо сложнее. Речь идет об устойчивости течений в коаксиальных ускорителях. Эксперименты и расчеты на ЭВМ показали, что при достаточно больших ξ течения плазмы в каналах со сплошными металлическими электродами оказываются неустойчивыми, что проявляется в образовании прианодных «взрывов» [10, 11]. К. В. Брушлинский, Н. И. Герлах и А. И. Морозов, просчитав большое число вариантов, установили, что существует такое критическое значение ξ^* при данных значениях магнитного числа Рейнольдса R_m и параметра β , что при $\xi > \xi^*$ течение теряет устойчивость. Зависимость ξ^* от β и R_m при $\beta \gg 0.1$ и заданной геометрии электродов может быть аппроксимирована формулой [10]

$$\xi^* \sim (\beta / R_m)^{1/2}, \quad \beta = 8\pi p / B^2 \quad (0.1)$$

Отсюда, в частности, следует ограничение скорости v при регулярном истечении плазмы. В самом деле $v \sim \xi I \lesssim \xi^* I$, и поскольку $R_m / \beta \sim B^2 v$, $I \sim B$, то v оказывается ограниченной сверху. К. В. Брушлинским и А. И. Морозовым было проведено исследование на устойчивость течений, описываемых системой уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики в предположении идеальной проводимости [12]. При этом оказалось, что течения всегда неустойчивы, если существуют точки, в которых непараллельны векторы ∇p и $\nabla(p + B^2/8\pi)$. Ниже будет показано, что анализ двухжидкостной системы уравнений в приближении канала медленно меняющегося сечения приводит к зависимостям, подобным (0.1), хотя исчерпывающей теории прианодных взрывов в настоящее время нет.

1. Рассмотрим стационарное плоское течение плазмы в поперечном магнитном поле, т. е. такое течение, у которого векторы скорости плазмы v , электрического тока j и электрического поля E лежат в одной плоскости xu , магнитное поле B перпендикулярно плоскости xu и все величины зависят только от координат x и y . Ось x выберем направленной вдоль канала (фиг. 1). Стенки канала являются электродами, они могут быть как сплошными металлическими, так и расщепленными. Будем считать, что плазма — квазинейтральная, полностью ионизованная, хорошо проводящая, невязкая и нетеплопроводная, ионы — однозарядные и инерция электронов пренебрежимо мала. Примем также, что состояние компонент плазмы описывается политропическим законом. Определение

того, что следует понимать под термином «хорошая проводимость», будет дано ниже. Масса иона обозначается буквой M , проводимость — σ , плотность — ρ , газокINETические давления ионной и электронной компонент — соответственно p_i, p_e . При сделанных предположениях система уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики имеет вид:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p_i}{\rho} + \frac{e}{M} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{e \mathbf{j}}{M \sigma} \quad (1.1)$$

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{M}{e \rho} \nabla p_e - \frac{M}{e \rho c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.3)$$

$$p_i = p_i(\rho), \quad p_e = p_e(\rho) \quad (1.4)$$

Первые два уравнения (1.3) удовлетворяются введением функций потока $\Psi(x, y)$ и электрического потенциала $\phi(x, y)$

$$\rho v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \rho v_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \mathbf{E} = - \nabla \phi \quad (1.5)$$

Кроме того

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = - \nabla \frac{B^2}{8\pi} \quad (1.6)$$

Подставляя в (1.1) значение \mathbf{j}/σ из (1.2) и учитывая (1.6), получаем (1.7)

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p_i + p_e + \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

Вводя «полное» давление плазмы P как сумму газокINETического давления $p = p_i + p_e$ и магнитного давления $B^2 / 8\pi$, можно написать

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla P}{\rho}, \quad P = P(\rho) \pm \frac{B^2}{8\pi} \quad (1.8)$$

Введем величину μ — характерное отношение поперечной составляющей скорости (иона) v_y к продольной составляющей v_x ¹. Будем называть течение медленно изменяющимся, если выполняются соотношения

$$\mu \ll 1, \quad |(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_y| \sim \mu |(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x| \quad (1.9)$$

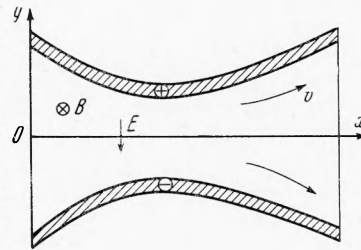
В дальнейшем рассматриваем этот случай. Проводимость плазмы будем считать настолько хорошей, что выполняется условие

$$R_m = \frac{v_0 L}{\nu_m} \gg \frac{1}{\mu^2} \gg 1 \quad \left(\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right) \quad (1.10)$$

Здесь v_0 — характерная скорость, L — характерный продольный масштаб длины, ν_m — магнитная вязкость плазмы.

Считая выполненными условия (1.9), (1.10), можно существенно упростить уравнения. Из (1.9) следует, что $|\partial P / \partial y| \sim \mu |\partial P / \partial x|$ и, следовательно, зависимость P от y можно пренебречь, считая P функцией только x .

¹ В режимах, при которых плазма не высаживается на стенки, μ — величина порядка максимального абсолютного значения тангенса угла наклона стенок канала к оси x .



Фиг. 1

Тогда вместо (1.1) можно написать

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}, \quad P(x) = p(\rho) + \frac{B^2}{8\pi} \quad (1.11)$$

Выполнение условия (1.10) означает, что можно пренебречь величиной j_y / σ в левой части y -компоненты уравнения (1.2). Вводя термализованный потенциал Φ_T соотношением

$$\Phi_T = \Phi + \frac{M}{e} \int \frac{dp_i}{\rho} \quad (1.12)$$

и учитывая (1.11), можно записать уравнение (1.2) в компонентах следующим образом:

$$\frac{v_m}{c} \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_T}{\partial x} + \frac{v_y B}{c} + \frac{M}{e\rho} \frac{dP}{dx}, \quad 0 = \frac{\partial \Phi_T}{\partial y} + \frac{v_x B}{c} \quad (1.13)$$

Переходя к переменным x, Ψ , получим из (1.11)–(1.13) следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}, \quad P(x) = p(\rho) + \frac{B^2}{8\pi} \\ \frac{B}{\rho c} &= -\frac{\partial \Phi_T}{\partial \Psi}, \quad \frac{v_m}{c} \rho v_x \frac{\partial B}{\partial \Psi} = -\frac{\partial \Phi_T}{\partial x} + \frac{M}{e\rho} \frac{dP}{dx} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Система (1.14) будет исходной в последующем рассмотрении¹. Дальнейшее ее упрощение может быть произведено, если задать вид функции $p(\rho)$. Наиболее просто рассматриваются случаи: $p \sim \rho^2$ (адиабатическая система), $p \sim \rho$ (изотермическая система); в случае $\beta \ll 1$, $\beta \gg 1$ более общая политропическая зависимость $p \sim \rho^\gamma$. В принципе уравнения (1.14) не накладывают ограничений ни на конструкцию электродов, ни на зависимость проводимости от координат. В данной работе ограничимся течениями в канале со сплошными электродами и будем считать, что процесс организован таким образом, что ионы не эмитируются анодом и не высаживаются на катод, т.е. масса плазмы, проходящая через любое поперечное сечение канала, одна и та же, а электрический ток, переносимый с электрода на электрод, чисто электронный.

Зададимся значением разности потенциалов U между анодом и катодом и подачей вещества m . Вместо переменной Ψ удобно ввести нормированную координату $\psi = \Psi / m$. При сделанных предположениях ψ постоянна вдоль электродов; выберем, что на катоде $\psi = 0$, а на аноде $\psi = 1$. Произведем дальнейшее упрощение системы (1.14) для трех случаев.

Первый случай. Пусть $p = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma$, $\beta \gg 1$. Процесс ускорения носит газодинамический характер. В нулевом приближении по β^{-1} можно считать, что $\rho = \rho(x)$. Остальные уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{v_x^2}{2} + w(\rho) &= F(\psi), \quad B = -\frac{\rho c U}{m} \frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \\ -v_m \rho^2 v_x \frac{U}{m^2} \frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial \psi^2} &= -U \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} + \frac{M}{e} \frac{dw(\rho)}{dx} \\ \left(w &= \int \frac{dp}{\rho}, \quad \Phi_x = \frac{\Phi_T}{U} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

¹ Уравнение, исследованное в [4], получается при линеаризации системы (1.14), если в качестве невозмущенного течения выбрать течение в канале с идеально рассеянными электродами

$$v_x = v_x(x), \quad \rho = \rho(x), \quad B / \rho = \text{const}$$

Здесь Φ_T — безразмерный термализованный потенциал. Если $F(\psi) = F_0 = \text{const}$ и $v_m = v_m(\rho)$, то $v_x = v_x(x)$. Можно записать третье уравнение (1.15) в безразмерных переменных

$$\frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \Phi_T}{\partial \eta} - \frac{M}{eU} \frac{dw}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} = \frac{v_m \rho^2 v_x}{m^2} \right) \quad (1.16)$$

Дифференцируя еще раз уравнение (1.16) по ψ и учитывая второе уравнение (1.15), получим следующее уравнение для характеристики в замороженности

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \psi^2} = \frac{\partial k}{\partial \eta} \left(k = \frac{B}{\rho} \right) \quad (1.17)$$

В уравнении (1.17) отсутствует холловский член. Эффект Холла входит, однако, в граничные условия для уравнения (1.17).

Второй случай. Пусть $p = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma$, $\beta \ll 1$. Процесс ускорения электромагнитный. Из (1.14) в нулевом приближении по β

$$B = B(x), \quad \rho = \frac{m \sqrt{8\pi P(x)}}{eU \partial \Phi_T / \partial \psi} \quad (1.18)$$

Параметр обмена ξ можно записать в виде

$$\xi = \frac{Mc}{em} \left(\frac{P_0}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (1.19)$$

Здесь P_0 — максимальное значение P , соответствующее входу в канал. Запишем первое уравнение (1.14) в безразмерной форме

$$\frac{\partial u^2}{\partial q} = \frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \left(u = v_x \left(\frac{M}{2eU\xi} \right)^{1/2}, \quad q(x) = 1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/2} \right) \quad (1.20)$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения (1.14)

$$\begin{aligned} \frac{v_m}{c} \frac{\rho v_x}{m} \frac{\partial B}{\partial \psi} &= \frac{4\pi v_m u}{c^2 \partial \Phi_T / \partial \psi} \left(\frac{2eU\xi}{M} \right)^{1/2} \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} = - \frac{\gamma \rho_0 \rho^\gamma \partial^2 \Phi_T / \partial \psi^2}{\rho_0^\gamma \partial \Phi_T / \partial \psi} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Если выбрать в качестве характерной плотности ρ_0 величину

$$\rho_0 = \frac{4\pi e \xi m^2}{Mc^2 U}$$

то четвертое уравнение (1.14) примет вид

$$u \frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial \psi^2} = \frac{c^2 U^2}{4\pi v_m \gamma \rho_0} \left(\frac{M}{2eU\xi} \right)^{1/2} \frac{1}{(1-q)^\gamma} \frac{dq}{dx} \left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \right)^{\gamma+2} \left(-\frac{\partial \Phi_T}{\partial q} + \xi \frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \right) \quad (1.22)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (1.22) учитывает влияние эффекта Холла. При $v_m \rightarrow 0$ имеется регулярное решение уравнения (1.22)

$$\Phi_T = f(\psi - \xi q) \quad (1.23)$$

Это означает, что величина Φ_T , а с ней и B/ρ сохраняются вдоль электронных траекторий $\psi_e = \psi - \xi q + \text{const}$. Для систем со сплошными металлическими электродами из-за влияния граничных условий решение имеет другую структуру, отличную от (1.23). Подробно этот вопрос рассмотрен в п.3 данной работы.

Третий случай. Пусть $\gamma = 2$ (адиабатическая система). В этом случае β может быть произвольным. Уравнения (1.14) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial q} &= \left[\left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \right)^2 + \kappa^2 \right]^{1/2}, \quad B = - \frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \left[\frac{8\pi P}{(\Phi_T / \partial \psi)^2 + \kappa^2} \right]^{1/2} \\ \rho &= \frac{m}{cU} \left[\frac{8\pi P}{(\partial \Phi_T / \partial \psi)^2 + \kappa^2} \right]^{1/2} \left(\kappa = \left(\frac{P_0}{P_0} \right)^{1/2} = \beta_0^{1/2} \right) \\ u \frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial \psi^2} &= \frac{1}{v_m (1-q)^2} \frac{dq}{dx} \left(\frac{M}{2eU\xi} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{\rho_0 \kappa} \right)^2 \times \\ &\times \left[\left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \right)^2 + \kappa^2 \right]^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_T}{\partial q} + \xi \left[\left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \right)^2 + \kappa^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Остановимся подробнее на первом и втором случаях.

2. Рассмотрим тепловой режим ускорения плазмы ($\beta \rightarrow \infty$). Для этого режима при $F(\psi) = F_0 = \text{const}$ уравнения движения и поля имеют следующий вид:

а) нулевое приближение по β^{-1}

$$\frac{v_x^2}{2} + w(\rho) = F_0, \quad B = -\rho(\eta) \frac{cU}{m} \frac{\partial \Phi_T}{\partial \psi} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_T}{\partial \psi^2} = \frac{\partial \Phi_T}{\partial \eta} - \frac{M}{eU} \frac{dw}{d\eta} \left(w = \int \frac{dp}{\rho}, \quad \eta = \int_0^x v_m \frac{\rho^2 v_x}{m^2} dx \right)$$

Видно, что динамическая и электрическая задачи здесь независимы: задавая ρ , v_x , w , находим затем Φ_T и B . Это естественно, поскольку поля в данном режиме целиком определяются газодинамическим характером течения;

б) первое приближение. Обозначая невозмущенные значения индексом 0 и возмущения — индексом 1, получаем

$$\begin{aligned} \rho_{(1)} &= - \frac{B_{(0)}^2}{8\pi c_{T(0)}^2}, \quad v_{(0)} v_{(1)} = - \int \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(0)}} dw_{(0)} \quad \left(c_{T(0)}^2 = \frac{dp_{(0)}}{d\rho_{(0)}} \right) \\ \frac{\partial^2 B_{(1)}}{\partial \psi^2 c_{\rho(0)}} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{B_{(1)}}{c_{\rho(0)}} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(0)}} + \frac{v_{(1)}}{v_{(0)}} \right) \frac{\partial B_{(0)}}{\partial \psi c_{\rho(0)}} \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{B_{(0)}}{c_{\rho(0)}} \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(0)}} \right) - \frac{M}{em} \frac{dw_{(0)}}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(0)}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Последнее уравнение системы (2.2) математически эквивалентно уравнению теплопроводности с правой частью, являющейся известной функцией η и ψ . В случае $F = F(\psi)$ уравнения несколько усложняются, но структура их остается прежней. Обращаясь к исходной системе уравнений (1.1) — (1.4), нетрудно видеть, что при $\beta \rightarrow \infty$ членом $\mathbf{j} \times \mathbf{B} / enc$ в уравнении (1.2) можно пренебречь. В самом деле, по порядку величины $\mathbf{j} \sim cB / 4\pi L$ и отношение члена $\mathbf{j} \times \mathbf{B} / enc$ к лоренцевскому члену $\mathbf{v} \times \mathbf{B} / c$ будет равно $(v \sim c_T)$

$$\frac{cB}{4\pi Lenc_T} = \frac{c_A}{c_T L \Pi_i^{1/2}} \left(\Pi_i = \frac{4\pi e^2 n}{Mc^2}, \quad c_A^2 = \frac{B^2}{4\pi \rho} \right) \quad (2.3)$$

Увеличивая при постоянном Π_i величину $\beta \sim c_T^2 / c_A^2$, видим, что холловским током действительно можно пренебречь. Вследствие этого в правой части уравнения для Φ системы (2.1) холловский член зависит только от продольной координаты η , а в уравнении (1.17) для B / ρ холловский член отсутствует.

Наиболее просто система (2.1) может быть проанализирована для случая холодных ионов ($p_i \rightarrow 0$). При этом $\Phi_r = \Phi$ и из (2.1) получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{M}{eU} \frac{dw}{d\eta}, \quad 0 \leq \psi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (2.24)$$

Граничные условия к уравнению (2.4) имеют вид

$$\Phi(\eta, 0) = 0, \quad \Phi(\eta, 1) = 1, \quad \Phi(0, \psi) = \Phi_0(\psi) \quad (2.5)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда

$$w = w_0 + \eta w_1 \quad (w_1 = \text{const}, \quad w_0 = \text{const})$$

При этом решение уравнения (2.5), сохраняя общую, присущую ему структуру, несколько упрощается¹. Вводя функцию Γ соотношением

$$\Gamma = \Phi - \psi + \frac{M}{2eU} w_1 (\psi^2 - \psi) \quad (2.6)$$

сводим задачу (2.4), (2.5) к следующей:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \psi^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}, \quad \Gamma(\eta, 0) = \Gamma(\eta, 1) = 0, \quad \Gamma(0, \psi) = \Gamma_0(\psi) \quad (2.7)$$

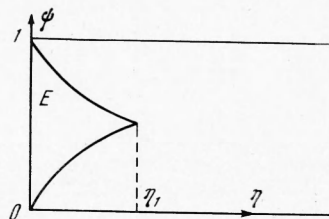
Решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\Gamma(\eta, \psi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\pi^2 n^2 \eta] \sin \pi n \psi \int_0^1 \Gamma_0(\zeta) \sin \pi n \zeta d\zeta \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что при $\eta > \pi^{-2}$ величина $\Gamma \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$\Phi \rightarrow \psi - \frac{M}{2eU} w_1 (\psi^2 - \psi) = \Phi(\psi) \quad (\eta > \pi^{-2} = \eta_1) \quad (2.9)$$

Таким образом, влияние условий на входе существенно для $0 \leq \eta \lesssim \eta_1$ и в этом же интервале существует продольное электрическое поле; при $\eta > \eta_1$ продольное электрическое поле экспоненциально мало. Можно сказать, что возмущение начального продольного электрического поля граничными условиями (в рассматриваемом случае — на сплошных металлических электродах) проникает скиновым образом в глубь потока плазмы. При этом приэлектродные скиновые слои симметричны. Ситуация здесь такая же, как и при возникновении погранслоев в обычной газодинамике. При $\eta > \eta_1$ происходит перекрытие скиновых слоев, что ведет к исчезновению продольного электрического поля (область E на фиг. 2)².



Фиг. 2

¹ Уравнение (2.4) с граничными условиями (2.5) заменой $\Phi = \chi + \psi + M[w(\eta) - w(0)]/eU$ приводится к задаче, легко решаемой методом Лапласа.

² В случае холодных ионов при малых β ситуация оказывается аналогичной: продольное электрическое поле исчезает по мере удаления от входа в канал, поскольку уравнение для Φ квазипараболического типа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = \alpha \left(q, \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \alpha_1 \left(q, \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right) \quad (\alpha > 0)$$

В заключение отметим два точно решаемых предельных случая. При этом можно отказаться от предположения о медленном изменении течения и ограничения на магнитное число Рейнольдса.

Первый случай. Пусть $\sigma \rightarrow \infty$. В этом случае справедливо уравнение замороженности в электронной компоненту [1]

$$\frac{B}{\rho} = -c \frac{d\varphi_T}{d\psi_e}(\psi_e), \quad B = \frac{4\pi e M}{c m^*} (\psi - \psi_e) \quad (2.10)$$

Находя ρ и ψ из уравнений газодинамики и учитывая, что $\varphi_T(\psi_e)$ — априорно заданная функция, получаем одно уравнение для определения B . Очевидно, однако, что в этом случае необходимо пренебречь граничными эффектами.

Второй случай. Пусть $\sigma \rightarrow 0$. При этом закон Ома (1.2) приобретает вид

$$\frac{j}{\sigma} = E + \frac{M}{e\rho} \nabla p_e, \quad E_{\parallel} = -\nabla\varphi \quad (2.11)$$

Считая $p_e = p_e(\rho)$ и учитывая, что $\operatorname{div} j = 0$, находим

$$\operatorname{div} \sigma \left(\frac{M}{e\rho} \nabla p_e(\rho) - \nabla\varphi \right) = 0 \quad (2.12)$$

Плотность ρ определяется из гидродинамической задачи, поэтому уравнение (2.12) при задании граничных условий на φ полностью определяет φ , а следовательно, и распределение электрического тока.

3. Рассмотрим электродинамический режим ускорения плазмы ($\beta \rightarrow 0$). Для течений с $\beta \rightarrow \infty$ было показано, что при конечной проводимости $\Phi \rightarrow \Phi(\psi)$ и, таким образом, вдоль данной линии потока $\psi = \text{const}$ потенциал сохраняется. Очевидно (см. сноску на стр. 15), что при достаточно большой протяженности канала и конечной проводимости всегда будут устанавливаться режимы, близкие к течению с $\Phi = \Phi(\psi)$ (последнее назовем квазиизомагнитным). При квазиизомагнитном течении электрическое поле перпендикулярно по отношению к ионным траекториям ($E \cdot v = 0$), поэтому, как видно из уравнения (1.1), ускорение ионов в режимах с $\beta \ll 1$ обязано члену $-j_x/\sigma$, т.е. «электронному ветру» [8,13]. Этот режим является столкновительным (более быстрые электроны, сталкиваясь с ионами, ускоряют их) и его естественно назвать омическим. Качественные особенности квазиизомагнитного омического режима проще всего проанализировать на примере течения в узком канале со сплошными металлическими стенками — электродами. Пусть ионы — холодные, т.е. $p(\rho) = p_e(\rho)$. Из (1.2) следует, что $E = vB/c$; поскольку $U = E_{\parallel} = \text{const}$ (l — ширина канала), то имеем постоянство противно-э.д.с. $vB/c = \text{const}$. Так как расход $m^* = \rho v l$ также постоянен, то отсюда очевидна справедливость соотношения изомагнитности $B/\rho = \text{const}$ для узкого канала. В результате получаем из (1.14)

$$\frac{B}{\rho} = \text{const}, \quad \rho v l = \text{const}, \quad \frac{v^2}{2} + w(\rho) + \frac{B^2}{4\pi\rho} = \text{const}, \quad \frac{j_x}{\sigma} = \frac{M}{e\rho} \frac{d}{dx} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right)$$

Первые три уравнения (3.1) аналогичны системе уравнений для течения идеальной плазмы в узком канале. В частности, отсюда следует, что канал должен иметь перетяжку. Четвертое уравнение является в известном смысле независимым, оно определяет продольный ток в канале. При $\beta \ll 1$ $j_x = -\omega\tau j_y$, где $\omega\tau = M\sigma B/e\rho c$ — параметр Холла.

Система (3.1), строго говоря, применима лишь для узкой «трубки тока». В канале конечной ширины необходим учет двумерных эффектов, связанных с наличием продольного тока. Непосредственным обобщением (3.1) на случай канала конечной ширины является квазиизомагнитное течение

$$\frac{B}{\rho} = -\frac{cU}{m^*} \frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}$$

Рассмотрим квазиизоманнитный режим, предположив, для простоты, что проводимость плазмы постоянна¹. При $\beta \ll 1$ можно считать в (1.22), что $\Phi_r = \Phi$. Для квазиизоманнитного режима с учетом (1.20) имеем

$$u = \left[(q + q_0) \frac{d\Phi}{d\psi} \right]^{1/2} \quad (q_0 = \text{const} > 0)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\psi^2} = \frac{c^2 U^2}{4\pi v_m} \left[\frac{M}{2eU\xi(q + q_0)} \right]^{1/2} \frac{\xi}{\gamma p_0 (1 - q)^\gamma} \frac{dq}{dx} \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \right)^{\gamma + 3/2} \quad (3.2)$$

Зависимость $q(x)$ определяется из того условия, что множитель перед степенью $\partial\Phi / \partial\psi$ в правой части второго уравнения (3.2) — постоянная величина. Вводя характерный продольный масштаб L спада магнитного поля (в режиме ускорения $dq/dx > 0$), получаем уравнение для $q(x)$

$$\frac{L}{(q + q_0)^{1/2} (1 - q)^\gamma} \frac{dq}{dx} = 1 \quad (3.3)$$

Выбрав в качестве характерной скорости v_0 величину $(2eU\xi / M)^{1/2}$ и в качестве характерного магнитного поля B_0 — величину $cU\rho_0 / m$, можем преобразовать множитель в правой части второго уравнения (3.2) к виду

$$\frac{c^2 U^2 \xi}{4\pi v_m \gamma p_0 L} \left(\frac{M}{2eU\xi} \right)^{1/2} = \frac{1}{2L} \frac{v_0^2}{c_T^2} \left(\frac{m}{\rho_0 v_0} \right) (\omega\tau)_0 = a \quad (3.4)$$

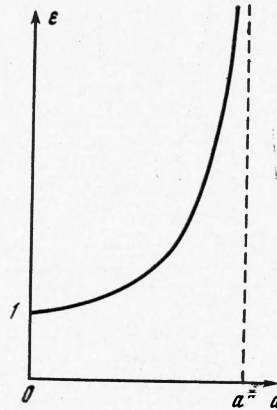
Здесь $c_T^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, $(\omega\tau)_0$ — характерный параметр Холла. Обозначим через ε значение $\partial\Phi / \partial\psi$ на аноде ($\psi = 1$). Интегрируя (3.2) с учетом $\Phi(0) = 0$, получаем

$$\frac{d\Phi}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{[1 + sa\varepsilon^s(1 - \psi)]^{1/s}},$$

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{sa\varepsilon^s} \frac{s}{s-1} \{ [1 + sa\varepsilon^s]^{1-1/s} - [1 + sa\varepsilon^s(1 - \psi)]^{1-1/s} \} \quad (3.5)$$

Здесь $s = \gamma + 3/2$ так что реально $s > 1$. Условие $\Phi(1) = 1$ дает связь a и ε

$$1 = \frac{\varepsilon}{sa\varepsilon^s} \frac{s}{s-1} \{ [1 + sa\varepsilon^s]^{1-1/s} - 1 \} \quad (3.6)$$



Фиг. 3

Из (3.6) следует, что при $a \rightarrow 0$ $\varepsilon \rightarrow 1$, при $a > 0$ $\varepsilon > 1$. Нетрудно видеть, что возможен случай $\varepsilon \rightarrow \infty$, который назовем предельным режимом. Этот режим осуществляется при

$$a = a^* = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{s-1} \right)^s = \frac{2}{3+2\gamma} \left(\frac{3+2\gamma}{1+2\gamma} \right)^{\gamma+3/2} \quad (3.7)$$

Для $\gamma = 5/3$ $a^* = 1.05$. Качественный ход зависимости $\varepsilon(a)$ приведен на фиг. 3. Особенность решения (3.5) — типа точки ветвления. Это огра-

¹ Если σ зависит от температуры T , например $\sigma = \sigma_0 (T / T_0)^{3/2}$, то этот случай в предположении политропического закона $p(\rho)$ также может быть легко рассмотрен.

ничивает максимально возможные значения ψ . В самом деле, формально из (3.5) следует

$$\psi < 1 + \frac{1}{sa\varepsilon^s} = \psi^* \quad (3.8)$$

При $\varepsilon \rightarrow \infty$ $a \rightarrow a^*$ и $\psi^* \rightarrow 1$, т. е. особенность решения возникает на аноде ускорителя. Решение регулярно при $0 \leq a < a^*$. Используя (3.4), запишем условие регулярности решения

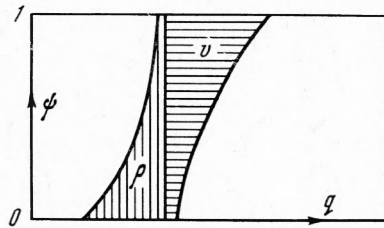
$$L \frac{f c_T^2}{v_0^2} \frac{1}{(\omega\tau)_0} > \frac{1}{2a^*} \left(\frac{m}{\rho_0 v_0} \right) \quad (3.9)$$

Из (1.8) и (3.2) следует, что

$$\rho \sim \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \right)^{-1}, \quad v_x \sim \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \right)^{1/2}$$

Качественный вид профилей ρ и v_x изображен на фиг. 4. При $d\Phi / d\psi \rightarrow \infty$ $\rho \rightarrow 0$ у анода.

Продольный электрический ток прижимает плазму к катоду; поскольку электроны движутся в поперечном направлении за счет столкновений с ионами, то это движение носит характер диффузии. У катода плотность выше, поэтому электронам легче выйти с катода, чем попасть на анод.



Фиг. 4

Видно (см. (3.5)) что $d\Phi / d\psi$ нарастает с ростом ψ , т. е. по направлению к аноду, так что только вблизи анода образуется зона большой напряженности E -поля, т. е. образуется прианодный слой. В данном случае образование «прианодного слоя» связано просто с

возрастанием сопротивления за счет $\rho \rightarrow 0$, а не с переносом потенциала, как в [4].

Формально по достижении предельного режима должен был бы происходить отрыв плазмы от анода, что приводило бы к резкому перераспределению плотности тока в канале и к срыву стационарного режима. Фактически, однако, устойчивость должна исчезать несколько раньше за счет большого отрыва электронной скорости от скорости ионов (нетрудно видеть, что $v_{ex} \gg v_x \rightarrow \infty$ при $d\Phi / d\psi \rightarrow \infty$); кроме того, влияние газокинетической вязкости плазмы также должно сказываться на устойчивости течения. Плазменные течения, сопровождающиеся отрывом, рассматривались в работе [14]. Обращает на себя внимание тот факт, что критерий (3.9) близок к условию (0.1) возникновения прианодных взрывов. В самом деле, если ввести «локальный» параметр обмена ξ_1 как характерное отношение поперечной скорости электрона к продольной скорости плазмы, то получаем из (3.9)

$$\xi_1 = \frac{McB_0}{4\pi e L \rho_0 v_0} = \frac{\xi}{L} \left(\frac{m}{\rho_0 v_0} \right), \quad \xi_1 \leq \left(\frac{a^* \gamma \xi}{2} \frac{\beta_0}{R_m} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

$$\left(R_m = \frac{v_0 L}{\nu_m}, \quad \beta_0 = 8\pi \frac{\rho_0}{B_0^2} \right)$$

В заключение оценим диссипацию энергии за счет джоулевых потерь. В режимах, близких к предельному $|j_x| \gg |j_y|$, так что выделение джоулева тепла в единице объема равно j_x^2 / σ . Полное выделение джоулева тепла за единицу времени

$$Q = \int_V \frac{j_x^2}{\sigma} dx dy = \int_0^1 \sigma (U \xi)^2 \left(\frac{d\Phi}{d\psi} \right)^{5/2} \frac{m}{\rho_0 v_0 (q + q_0)^{1/2} (1 - q)} \frac{dq}{dx} dq d\psi \quad (3.11)$$

Выполняя интегрирование, получим отношение джоулевых потерь к вкладываемой мощности N

$$\frac{Q}{N} = \frac{\xi\beta_0}{2(\gamma-1)} \left(\frac{3+2\gamma}{1+2\gamma} \right)^{\gamma-1}, \quad \gamma > 1 \quad \left(N = IU = \frac{em\xi U}{M} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{Q}{N} = 0.2\xi\beta_0 \ln [1 + 0.4a\varepsilon^{5/2}] \approx \frac{\xi\beta_0}{2} \ln \frac{5}{3} \varepsilon, \quad \gamma = 1$$

Отсюда следует, что при $\xi \leq 1$, $\beta \ll 1$ джоулевы потери невелики. Кроме того, величина джоулевых потерь не зависит от проводимости плазмы.

Поступила 9 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, вып. 7.
2. Вуд Г., Картер А. Соображения NASA относительно конструкции плазменного ускорителя непрерывного действия с постоянным магнитным полем. В сб. «Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели», М., Атомиздат, 1961.
3. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Об одном параметре подобия в теории плазменных течений. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 1.
4. Морозов А. И., Шубин А. П. Течение плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 6.
5. Морозов А. И., Шубин А. П. О приэлектродных слоях в течениях хорошо проводящей вязкой плазмы. ПМТФ, 1967, № 5.
6. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
7. Морозов А. И., Соловьев Л. С. О симметричных течениях проводящей жидкости поперек магнитного поля. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
8. Кислов А. Я., Морозов А. И., Тилинин Г. Н. Распределение потенциала в коаксиальном квазистационарном инжекторе плазмы. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 6.
9. Ковров П. Е., Морозов А. И., Токарев Л. Г., Щепкин Г. Я. Распределение магнитного поля в коаксиальном инжекторе плазмы. Докл. АН СССР, 1967 т. 172, № 6.
10. Morozov A. I., Brushlinski K. V., Gerlach N. I., Shubin A. P. Theoretical and numerical analysis of physical processes in a stationary high current gas discharge between the coaxial electrodes. Proc. Internat. Conf. Phenomena in ionized gases, Vienna, 1967; Contributed Papers, 1968, Paper № 159.
11. Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И. Расчет двумерных нестационарных течений плазмы конечной проводимости при наличии эффекта Холла. Магнитная гидродинамика, 1967, № 1.
12. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Об эволюционности уравнений магнитной гидродинамики с учетом эффекта Холла. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
13. Морозов А. И., Артюшков Е. В., Соловьев Л. С., Шубин А. П. Некоторые свойства течений проводящего газа в магнитном поле. В сб. «Низкотемпературная плазма», М., «Мир», 1967.
14. Бам-Зеликович Г. М. О влиянии токов Холла на течение проводящего газа при больших скоростях потока. ПМТФ, 1965, № 3.