УДК 539.4

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКИХ ПЛАСТИН С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: lab4nemir@rambler.ru

На основе численной схемы типа “крест” построена математическая модель упругопластического изгибного деформирования пространственно-армированных пластин. Упругопластическое поведение материалов компонентов композиции описывается теорией течения с изотропным упрочнением. Малое сопротивление композитных пластин поперечным сдвигам учитывается в рамках теории Редди, а геометрическая нелинейность задачи — в приближении Кармана. Исследовано динамическое упругопластическое изгибное деформирование плоско- и пространственно-армированных металлокомпозитных и стеклопластиковых прямоугольных пластин под действием воздушной взрывной волны. Показано, что для относительно толстых пластин замена плоской перекрестной структуры армирования на пространственную приводит к уменьшению интенсивности деформаций в связующем (на десятки процентов для металлокомпозитной конструкции и на сотни процентов для стеклопластиковой), а также к уменьшению податливости пластины в поперечном направлении (незначительному в случае металлокомпозитной конструкции и почти в 1,5 раза в случае стеклопластиковой). Установлено, что для относительно тонких пластин замена плоской структуры армирования на пространственную приводит к незначительному уменьшению ее податливости.

Ключевые слова: гибкие пластины, плоское армирование, пространственное армирование, теория Редди, динамический изгиб, упругопластическое деформирование, схема типа “крест”.

DOI: 10.15372/PMTF20180611

Введение. В последнее время широкое применение находят композиционные материалы (КМ) с пространственными структурами армирования [1–3]. Такое армирование позволяет, с одной стороны, локализовать распространение трещин в пределах нескольких ячеек композиции, с другой — устранить такой недостаток армированных в плоскости композитов, как расслоение вследствие малого сопротивления поперечному отрыву и сдвигу. Поэтому актуальной является проблема моделирования поведения конструкций из КМ с такими структурами армирования.

Линейно-упругое поведение пространственно-армированных КМ моделировалось в работах [1, 4–6]. Однако современные инженерные конструкции часто подвергаются интенсивным внешним воздействиям [1], при которых материал становится упругопластическим. В [7] разработана математическая модель упругопластического деформирования

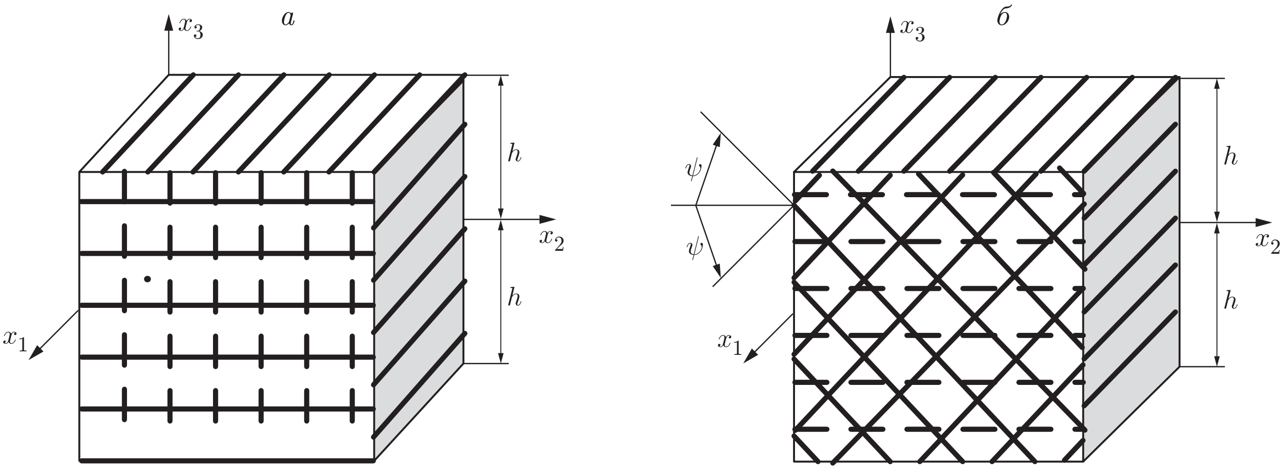

Рис. 1. Схемы элемента пластины из КМ с пространственной структурой: *а* — ортогональное армирование в трех направлениях, *б* — неортогональное армирование в четырех направлениях

плоскоармированных пластин, адаптированная для решения задач с использованием явной численной схемы типа "крест". Однако структурная модель упругопластического (в рамках теории течения) поведения пространственно-армированных КМ не построена. Данная работа посвящена моделированию пространственно-армированных гибких пластин при наличии упругопластической деформации в предположении, что численное интегрирование соответствующей начально-краевой задачи осуществляется на основе метода шагов по времени с использованием явной схемы типа "крест".

1. Моделирование упругопластического деформирования гибкой пластины с пространственной структурой армирования. Рассматривается изгибное деформирование пространственно-армированной пластины толщиной $2h$ (рис. 1). Используется декартова прямоугольная система координат: ось Ox_3 направлена в поперечном направлении, плоскость Ox_1x_2 является срединной ($|x_3| \leqslant h$). Конструкция усилена K семействами волокон с плотностями армирования ω_k, $1 \leqslant k \leqslant K$. (На рис. 1,*а* показано ортогональное пространственное армирование в трех направлениях при $K = 3$ [4], на рис. 1,*б* — неортогональное армирование в четырех направлениях.) Объемную долю материала связующего в представительной ячейке композиции обозначим ω_0.

Для описания малого сопротивления пластины поперечным сдвигам (например, в случае структуры армированного материала, показанной на рис. 1,*а*) используется теория Редди [7–9], геометрическая нелинейность учитывается в приближении Кармана. Предполагается, что на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ пластина нагружена только нормальными внешними распределенными нагрузками, тогда осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек пластины U_i аппроксимируются следующим образом [7]:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\,(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3\partial_i\partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}\,(3h^2 - x_3^2)(\partial_i\varepsilon_{j3}^0 + \partial_j\varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2}\,\partial_i w\partial_j w,\\ \varepsilon_{i3}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2}\,\varepsilon_{i3}^0(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1,x_2), \quad \boldsymbol{r} = (x_1,x_2,x_3), \quad i,j = 1,2;\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}U_i(t,\boldsymbol{r}) = u_i(t,\boldsymbol{x}) - x_3\,\partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}\,(3h^2 - x_3^2)\varepsilon_{i3}^0, \qquad U_3(t,\boldsymbol{r}) = w(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{x} \in G, \qquad |x_3| \leqslant h, \qquad t \geqslant t_0, \qquad i = 1,2.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь w — прогиб; u_i — тангенциальные перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i; ε_{i3}^0 — деформации поперечных сдвигов в точках срединной плоскости;

t_0 — начальный момент времени t; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменным x_i; G — область, занимаемая пластиной в плане. В равенствах (1), (2) неизвестными являются функции u_i, w, ε^0_{i3} $(i = 1, 2)$.

Поскольку определить реальное распределение деформаций, напряжений и их скоростей в КМ, связующее которого содержит многочисленные произвольно ориентированные жесткие включения, достаточно сложно [9] (особенно при неупругом деформировании материалов компонентов композиции), для построения применимых на практике определяющих уравнений упругопластического деформирования рассматриваемого КМ пластины примем допущения, аналогичные принятым в [7, 9].

1. В пределах ячейки периодичности КМ является макроскопически квазиоднородным анизотропным.

2. Между арматурой и связующим реализуется идеальный механический контакт.

3. В пределах представительной ячейки, выделенной в КМ на мини-уровне, напряжения и деформации во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Влиянием полей напряжений и деформаций на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры и связующего пренебрегается.

4. Поля деформаций и напряжений в композиции осредняются по объему представительного элемента (согласно допущению 3, пропорционально объемной доле ω_k каждого компонента).

5. Материалы компонентов композиции изотропны, а их деформирование определяется уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением [10]

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = B_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \qquad (B_k = A_k - P_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, K, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k &= \{\dot\sigma_1^{(k)}, \dot\sigma_2^{(k)}, \dot\sigma_3^{(k)}, \dot\sigma_4^{(k)}, \dot\sigma_5^{(k)}, \dot\sigma_6^{(k)}\}^{\text{т}} \equiv \{\dot\sigma_{11}^{(k)}, \dot\sigma_{22}^{(k)}, \dot\sigma_{33}^{(k)}, \dot\sigma_{23}^{(k)}, \dot\sigma_{31}^{(k)}, \dot\sigma_{12}^{(k)}\}^{\text{т}}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \{\dot\varepsilon_1^{(k)}, \dot\varepsilon_2^{(k)}, \dot\varepsilon_3^{(k)}, \dot\varepsilon_4^{(k)}, \dot\varepsilon_5^{(k)}, \dot\varepsilon_6^{(k)}\}^{\text{т}} \equiv \{\dot\varepsilon_{11}^{(k)}, \dot\varepsilon_{22}^{(k)}, \dot\varepsilon_{33}^{(k)}, 2\dot\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\dot\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\dot\varepsilon_{12}^{(k)}\}^{\text{т}}, \end{aligned} \tag{4}$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в k-й фазе композиции; $B_k = (b_{ij}^{(k)})$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $P_k = (p_{ij}^{(k)})$ — симметричные матрицы размером 6×6, причем ненулевые компоненты матриц A_k и P_k определяются следующим образом [10]:

$$a_{ii}^{(k)} = 2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} = \lambda^{(k)}, \quad a_{mm}^{(k)} = \mu^{(k)}, \quad p_{nl}^{(k)} = A^{(k)} s_n^{(k)} s_l^{(k)}$$

$$(j \ne i, \qquad i, j = \overline{1,3}, \qquad m = \overline{4,6}, \qquad l, n = \overline{1,6}\,),$$

$$A^{(k)} = \frac{\mu^{(k)} c^{(k)}}{J_2^{(k)}}\,(1 - \varkappa^{(k)}), \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})},$$

$$\varkappa^{(k)} = \frac{\bar\mu^{(k)}}{\mu^{(k)}}, \qquad J_2^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (s_i^{(k)})^2 + \sum_{m=4}^{6} (s_m^{(k)})^2,$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & J_2^{(k)} < J_{2*}^{(k)} \text{ или } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, \quad W^{(k)} \leqslant 0, \\ 1, & J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, \quad W^{(k)} > 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$W^{(k)} = \sum_{i=1}^{6} s_i^{(k)} \dot e_i^{(k)}, \quad s_j^{(k)} = \sigma_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(k)}, \quad s_l^{(k)} = \sigma_l^{(k)}, \quad e_j^{(k)} = \varepsilon_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i^{(k)},$$

$$e_l^{(k)} = \varepsilon_l^{(k)}, \qquad J_{2*}^{(k)} = \max\{J_{2p}^{(k)}, J_{2m}^{(k)}\}, \qquad j = \overline{1,3}, \qquad l = \overline{4,6},$$

$E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала k-го компонента композиции; $\bar{\mu}^{(k)}$ — касательный модуль на диаграмме чистого сдвига материала k-й фазы композиции; $c^{(k)}$ — функция переключения, определяющая активное упругопластическое нагружение или разгрузку k-го компонента композиции; $J_{2p}^{(k)}$ — значение второго инварианта девиатора напряжений $J_2^{(k)}$, при котором материал k-й фазы композиции впервые начинает деформироваться пластически; $J_{2m}^{(k)}$ — максимальное значение $J_2^{(k)}$, достигнутое за все время деформирования элемента среды k-го компонента композиции; точка означает частное дифференцирование по времени t.

С каждым k-м семейством волокон свяжем локальную ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$, так чтобы ось $x_1^{(k)}$ совпадала с направлением траектории армирования этого семейства, а оси $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ были перпендикулярны этим траекториям (рис. 2). Направление армирования волокнами k-го семейства можно однозначно задать с помощью двух углов сферической системы координат θ_k и φ_k (см. рис. 2). При этом направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ k-й локальной системы координат и осями x_j $(i, j = \overline{1,3})$ глобальной системы координат вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} l_{11}^{(k)} = \sin\theta_k\cos\varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin\theta_k\sin\varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos\theta_k, \quad l_{21}^{(k)} = -\sin\varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos\varphi_k, \\ l_{23}^{(k)} = 0, \quad l_{31}^{(k)} = -\cos\theta_k\cos\varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos\theta_k\sin\varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin\theta_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant K. \end{gathered} \tag{6}$$

При переходе от глобальной системы координат x_i к локальной системе $x_i^{(k)}$ $(i = \overline{1,3}\,)$ имеют место преобразования векторов, аналогичных (4):

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = G_k\boldsymbol{\sigma}_k \quad \Bigl(\bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{6} g_{ij}^{(k)}\sigma_j^{(k)}\Bigr), \qquad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = Q_k\boldsymbol{\varepsilon}_k \quad \Bigl(\bar{\varepsilon}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{6} q_{ij}^{(k)}\varepsilon_j^{(k)}, \quad i = \overline{1,6}\Bigr), \tag{7}$$

где $G_k = (g_{ij}^{(k)})$, $Q_k = (q_{ij}^{(k)})$ — матрицы размером 6×6 с компонентами

$$\begin{gathered} g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)}l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)}l_{12}^{(k)}, \quad \ldots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)}l_{11}^{(k)}, \quad \ldots, \\ 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)}l_{11}^{(k)}, \quad \ldots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)}l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)}l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant K. \end{gathered} \tag{8}$$

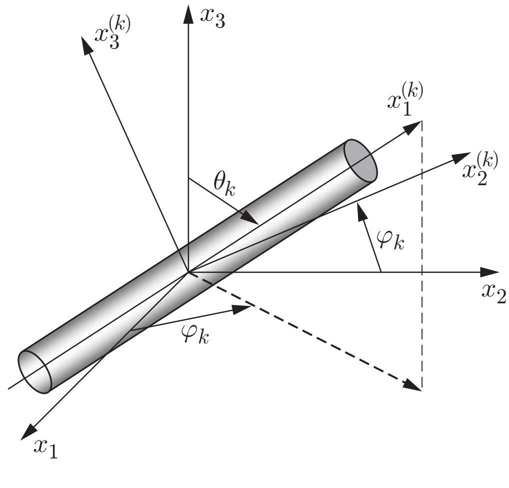

Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном k-го семейства

Не приведенные в (8) компоненты матриц G_k и Q_k представлены в табл. 21.40 и 21.44 в [9]. В равенствах (7) черта сверху соответствует величинам, определенным в локальной системе координат $x_i^{(k)}$ ($i = \overline{1,3}$).

В силу второго и третьего допущений и условий сопряжения полей напряжений и перемещений на границах области контакта волокон со связующим имеем

$$\sum_{j=1}^{6} q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{6} q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}, \qquad \sum_{j=1}^{6} g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{6} g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)},$$
$$i = \overline{2,6}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant K. \tag{9}$$

Так как допущения 1–5 аналогичны исходным предположениям, принятым в [7], то, выполняя преобразования, аналогичные приведенным в [7], с учетом соотношений (3), (5), (9) получим матричное равенство, описывающее упругопластическое поведение пространственно-армированного КМ пластины:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = B\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{10}$$

Здесь

$$B = \Big(\omega_0 B_0 + \sum_{k=1}^{K} \omega_k B_k E_k\Big) H, \qquad H = \Big(\omega_0 I + \sum_{k=1}^{K} \omega_k E_k\Big)^{-1},$$
$$E_k = D_k^{-1} C_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant K, \tag{11}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — шестикомпонентные вектор-столбцы скоростей осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции, имеющие структуру, аналогичную (4); I — единичная матрица размером 6×6; B, H, E_k, C_k — матрицы размером 6×6; D_k^{-1} — матрица, обратная матрице D_k размером 6×6. Согласно (3), (9) и с учетом (6), (8) компоненты $c_{ij}^{(k)}$, $d_{ij}^{(k)}$ матриц C_k, D_k определяются следующим образом:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \qquad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{6} g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \qquad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{6} g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)},$$
$$i = \overline{2,6}, \qquad j = \overline{1,6}.$$

При выводе соотношений (10), (11) получены матричные равенства

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = H\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}; \tag{12}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = E_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant K. \tag{13}$$

Соотношение (12) позволяет выразить скорости деформаций в связующем $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ через скорости осредненных деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, равенства (13) — скорости деформаций в арматуре k-го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости деформаций связующего материала $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$.

Так как исследуется механическое поведение конструкции из КМ, представляющей собой гибкую тонкостенную систему, напряжение $\sigma_{33}(t, \boldsymbol{r})$ с приемлемой для приложений точностью можно линейно аппроксимировать по толщине пластины [11]:

$$\sigma_{33}(t, \boldsymbol{r}) \equiv \sigma_3(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \boldsymbol{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \boldsymbol{x})}{2h}\, x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \boldsymbol{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \boldsymbol{x})}{2}. \tag{14}$$

Здесь $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \boldsymbol{x}, \pm h)$ — известные нормальные напряжения на верхней (знак “+”) и нижней (знак “−”) лицевых поверхностях, определяемые силовыми граничными условиями, заданными на этих поверхностях.

Из третьего равенства системы шести алгебраических уравнений (10) можно определить скорость линейной поперечной деформации пластины из КМ

$$\dot{\varepsilon}_{33} \equiv \dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{b_{33}}\Big(\dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^{6}(1-\delta_{3i})b_{3i}\dot{\varepsilon}_i\Big), \tag{15}$$

где δ_{3i} — символ Кронекера; b_{3i} ($i = \overline{1,6}$) — компоненты матрицы B в (10); величина $\dot{\sigma}_3$ определена в (14) (после дифференцирования по времени). Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$, входящие в правую часть (15), можно получить путем дифференцирования по времени t соотношений (1), т. е. выразить через функции w, $\dot{w}$, $\dot{u}_l$, $\dot{\varepsilon}^0_{l3}$ ($l = 1,2$).

Уравнения движения гибкой пластины с учетом (2), (14) имеют вид [7, 11]

$$\begin{gathered}
2h\rho\ddot{w} = \sum_{l=1}^{2}\partial_l\Big(F_{l3} + \sum_{j=1}^{2}F_{lj}\,\partial_j w\Big) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \qquad \frac{2}{3}h^3\rho\ddot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^{2}\partial_j M_{ij} - F_{i3},\\
2h\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^{2}\partial_j\left(F_{ij} - F_{j3}\,\partial_i w\right) - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)})\,\partial_i w, \qquad i = 1,2, \quad \boldsymbol{x}\in G, \quad t \geqslant t_0,
\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}
\rho = \omega_0\rho_0 + \sum_{k=1}^{K}\omega_k\rho_k, \quad F_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}\,dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{i3}\,dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}x_3\,dx_3,\\
\gamma_i(t,\boldsymbol{x}) \equiv \frac{8}{5}\,\varepsilon^0_{i3} - \partial_i w, \quad \varepsilon^0_{i3}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{5}{8}\,(\gamma_i + \partial_i w), \quad i,j = 1,2, \quad \boldsymbol{x}\in G, \quad t \geqslant t_0,
\end{gathered} \tag{17}$$

ρ_0, ρ_k — объемная плотность материала связующего и арматуры k-го семейства; γ_i — функции, введенные для упрощения расчетов; F_{ij}, F_{i3}, M_{ij} — внутренние силы и моменты.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи к системе уравнений (16) необходимо добавить начальные и граничные условия. Если в момент времени t_0 пластина покоится, то начальные условия имеют вид

$$\begin{gathered}
u_i(t_0,\boldsymbol{x}) = w(t_0,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \gamma_i(t_0,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \dot{u}_i(t_0,\boldsymbol{x}) = \dot{w}(t_0,\boldsymbol{x}) = 0,\\
\dot{\gamma}_i(t_0,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in G, \qquad i = 1,2.
\end{gathered} \tag{18}$$

В случае жесткого закрепления точек кромки пластины кинематические граничные условия определяются равенствами

$$u_i(t,\boldsymbol{x}) = w(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \gamma_i(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\Gamma, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1,2, \tag{19}$$

где Γ — контур, ограничивающий область G, занимаемую пластиной в плане. Возможны также другие граничные условия [9, 11].

2. Метод расчета. Сформулированная начально-краевая задача решается на основе явной численной схемы типа “крест”. Так как равенства (1), (2), (16) с учетом (17) совпадают с кинематическими соотношениями и уравнениями движения в [7], а определяющие уравнения (10) при исключении из них в силу (14), (15) величины $\dot{\varepsilon}_{33}$ формально совпадают с определяющими соотношениями, полученными в [7], то численная схема типа “крест” в рассматриваемом случае пространственного армирования при начальных условиях (18) реализуется так же, как в [7].

3. Обсуждение результатов расчетов. Рассмотрим изгиб прямоугольных пластин толщиной $2h = 2$ см с размерами в плане $a = 60$ см, $b = 20$ см (G: $|x_1| \leqslant a/2$, $|x_2| \leqslant b/2$). Кромки пластин жестко закреплены (см. (19)). Пластины, покоящиеся в начальный

Физико-механические характеристики материалов
компонентов композиций пластин [13, 14]

Материал	ρ, кг/м^3	ν	σ_s, МПа	E, ГПа	E_s, ГПа
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230
Алюминиевый сплав АДМ	2710	0,30	30	71,0	0,143
Стальная проволока У8А	7800	0,31	3968	210,0	6,973

момент времени $t = t_0 = 0$ (см. (18)), нагружаются избыточным давлением, возникающим вследствие воздействия воздушной взрывной волны [12]:

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leqslant t \leqslant t_{\max}, \\ p_{\max} \exp\left[-\alpha(t - t_{\max})\right], & t > t_{\max}. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь

$$\alpha = -\ln(0{,}01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \qquad t_{\min} \gg t_{\max}, \tag{21}$$

$t_{\min}$ — момент времени, после достижения которого нагрузку $|p(t)|$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с $|p_{\max}|$ (согласно (21) предполагается $p(t_{\min}) = 0{,}01 p_{\max}$). На основе экспериментальных данных [12] в расчетах принято $t_{\max} = 0{,}1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс.

Пластины изготавливались из алюминиевого сплава марки АДМ и армировались стальной проволокой марки У8А (металлокомпозит) [13] либо изготавливались из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим амином, и усиливались стеклянными волокнами марки S-994 (стеклопластик) [13, 14]. Упругопластическое поведение материалов компонентов композиции на стадии активного нагружения описывается билинейной диаграммой растяжения-сжатия, определяемой уравнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_s^{(k)} \equiv \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \operatorname{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant k \leqslant K$$

($E_s^{(k)}$, $\sigma_s^{(k)}$ — модуль линейного упрочнения и предел текучести материала k-й фазы композиции). Физико-механические характеристики материалов компонентов рассматриваемых композиций приведены в таблице.

Структуры армирования полагаются прямолинейными и однородными: $\theta_k = \text{const}$, $\varphi_k = \text{const}$, $\omega_k = \text{const}$, $1 \leqslant k \leqslant K$ (см. (6)). Рассматриваются структуры армирования трех типов: 1) плоское ортогональное армирование в двух направлениях: два ($K = 2$) семейства волокон укладываются в плоскости пластины по направлениям Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = 0{,}266$ и $\omega_2 = 0{,}324$ соответственно; 2) пространственное ортогональное армирование в трех направлениях (см. рис. 1,*а*): три ($K = 3$) семейства волокон укладываются по направлениям Ox_1, Ox_2 и Ox_3 с плотностями армирования $\omega_1 = 0{,}235$, $\omega_2 = 0{,}324$ и $\omega_3 = 0{,}031$ [15]; 3) пространственное армирование в четырех направлениях (см. рис. 1,*б*): первые два семейства волокон укладываются по направлениям Ox_1 и Ox_2, третье и четвертое — по направлениям, определяемым углами $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (т. е. $\psi = \pi/4$). В последнем случае плотности армирования в металлокомпозиции имеют значения $\omega_1 = 0{,}235$, $\omega_2 = 0{,}324$, $\omega_3 = \omega_4 = 0{,}0155$, в стеклопластиковой композиции — $\omega_1 = 0{,}126$, $\omega_2 = 0{,}324$, $\omega_3 = \omega_4 = 0{,}07$. Во всех структурах армирования суммарный расход арматуры является фиксированным.

На рис. 3 приведена зависимость прогибов в центральных точках рассматриваемых пластин из КМ от времени ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$), на рис. 4 — зависимость максимальных значений интенсивности деформаций в связующем $\varepsilon_*^{(0)}$ соответствующей композиции от

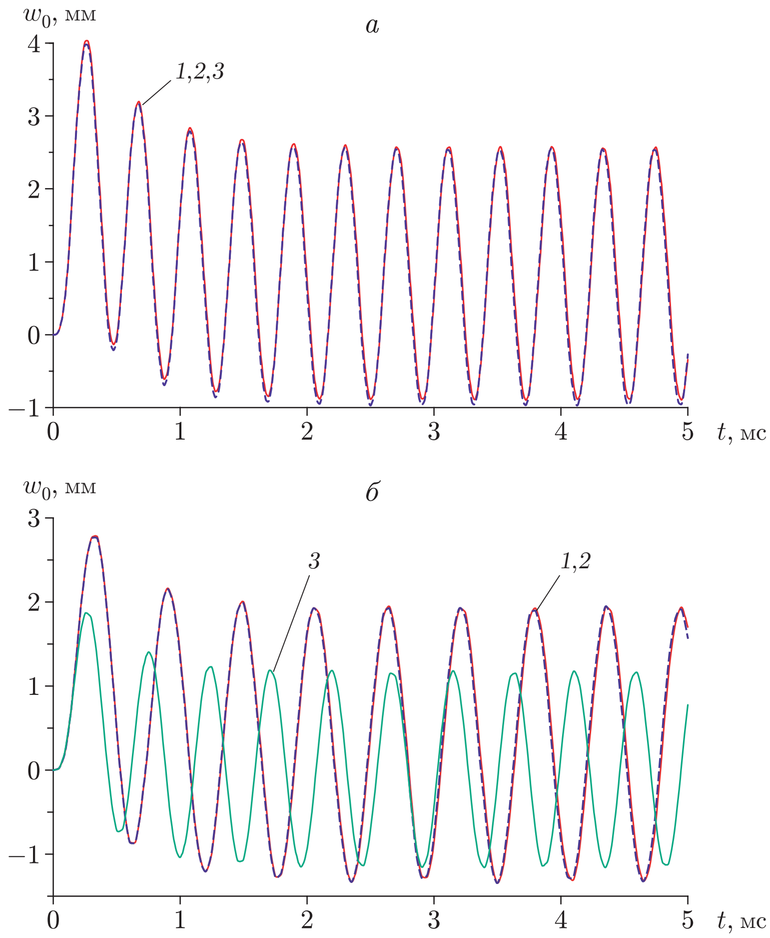

Рис. 3. Зависимость прогибов в центральных точках прямоугольных пластин от времени при различных структурах армирования:
а — металлокомпозитные конструкции, *б* — стеклопластиковые пластины; *1* — плоское ортогональное армирование пластин в двух направлениях, *2* — пространственное ортогональное армирование в трех направлениях, *3* — пространственное армирование в четырех направлениях

времени ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max\limits_{\boldsymbol{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \boldsymbol{r})$, $|x_1| \leqslant a/2$, $|x_2| \leqslant b/2$, $|x_3| \leqslant h$). На рис. 3,*а*, 4,*а* представлены зависимости, полученные для металлокомпозитных пластин при $p_{\max} = 40$ МПа, на рис. 3,*б*, 4,*б* — для стеклопластиковых пластин при $p_{\max} = 6$ МПа. (Рассматриваемые металлокомпозиции обладают слабовыраженной анизотропией, так как для них $E^{(k)}/E^{(0)} \approx 3$ (см. таблицу), стеклопластиковые композиции — сильно выраженной анизотропией, так как для них $E^{(k)}/E^{(0)} = 31$, $1 \leqslant k \leqslant K$.) Кривые *1–3* на рис. 3,*а* и кривые *1, 2* на рис. 3,*б*, 4,*б* практически совпадают.

Поведение кривых на рис. 3,*а*, 4,*а* свидетельствует о том, что замена плоской структуры армирования (кривые *1*) на пространственные структуры (кривые *2, 3*) в случае металлокомпозитных пластин практически не оказывает влияния на их податливость (кривые *1–3* на рис. 3,*а*), но приводит к уменьшению максимальных значений интенсивности деформаций в связующем приблизительно на 10–11 % (ср. кривые *1–3* на рис. 4,*а*), причем более эффективной является структура с пространственным ортогональным армированием в трех направлениях (кривая *2* на рис. 4,*а*).

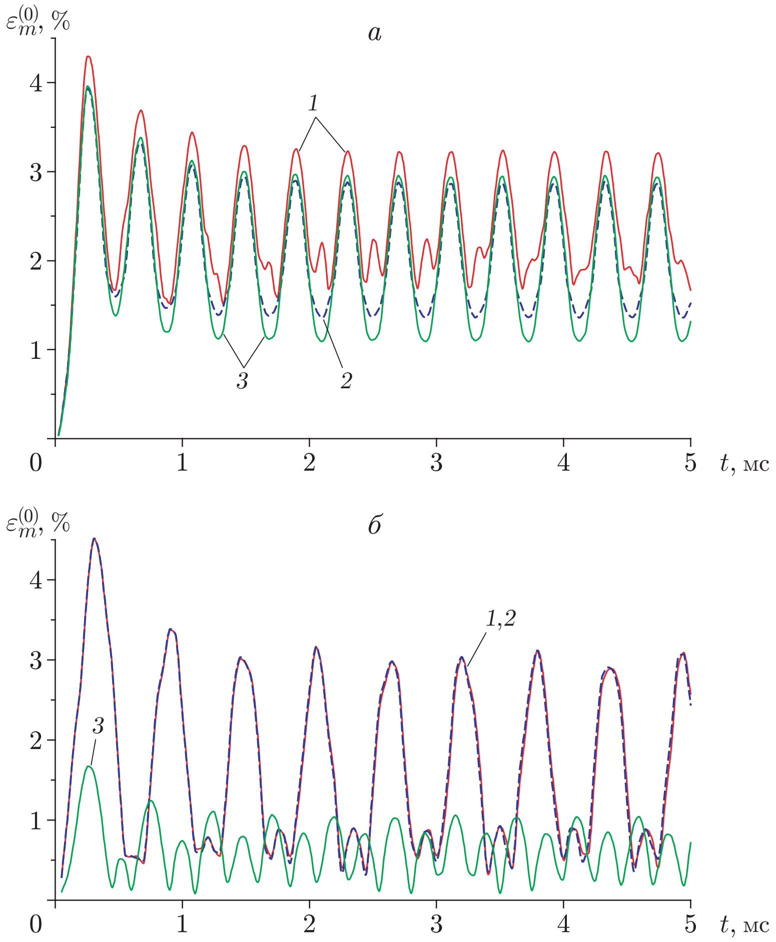

Рис. 4. Зависимость максимальной интенсивности деформаций связующего материала от времени для прямоугольных пластин при различных структурах армирования:

а — металлокомпозитные конструкции, *б* — стеклопластиковые пластины; остальные обозначения те же, что на рис. 3

Анализ кривых на рис. 3,*б*, 4,*б* показывает, что в случае стеклопластиковой композиции замена плоской структуры армирования на пространственную ортогональную структуру практически не влияет на податливость такой пластины и деформированное состояние связующего материала (кривые *1*, *2* на рис. 3,*б*, 4,*б*). Однако использование пространственной структуры армирования в четырех направлениях в этом случае позволяет уменьшить максимальный прогиб пластины практически в 1,5 раза, а интенсивность деформаций связующего материала — в 3 раза по сравнению со случаем плоского ортогонального армирования (кривые *1*, *3* на рис. 3,*б*, 4,*б*).

Выше рассматривались относительно толстые пластины ($2h/\min(a,b) = 1/10$). Дополнительные расчеты показали, что в случае относительно тонких пластин ($2h/\min(a,b) \leqslant 1/20$) замена плоской перекрестной структуры армирования на пространственную (с сохранением общего расхода арматуры), как правило, не приводит к уменьшению податливости конструкции из КМ и интенсивности деформаций компонентов ее композиции. Известны случаи, когда замена плоской структуры армирования тонкой пластины на пространственную структуру приводит к увеличению ее податливости в поперечном направлении.

Заключение. Проведенный анализ динамического упругопластического изгибного поведения пластин из КМ с плоскими и пространственными структурами армирования показал, что в случае относительно толстых пластин (с относительной толщиной порядка 1/10), структура которых имеет слабовыраженную анизотропию (металлокомпозиции), замена плоской перекрестной структуры армирования на пространственную структуру (с сохранением общего расхода арматуры) приводит к незначительному уменьшению податливости конструкции в поперечном направлении и к существенному уменьшению деформации связующего материала композиции (более чем на 10 %). В случае использования композиций с сильно выраженной анизотропией (например, стеклопластиковых) замена плоской структуры армирования в относительно толстой пластине на пространственную структуру позволяет уменьшить податливость конструкции в поперечном направлении на десятки процентов (даже в 1,5 раза), а интенсивность деформаций в связующем материале — на сотни процентов. При замене плоских структур армирования на пространственные в относительно тонких пластинах (с относительной толщиной не более 1/20) уменьшения их податливости практически не наблюдается. В ряде случаев при такой замене структуры армирования обнаруживается увеличение прогибов пластин из КМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тарнопольский Ю. М.** Пространственно-армированные композиционные материалы: Справ. / Ю. М. Тарнопольский, И. Г. Жигун, В. А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987.
2. **Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., et al.** A new generation of 3D woven fabric performs and composites // SAMPE J. 2001. V. 37, N 3. P. 3–17.
3. **Шустер Й., Гейдер Д., Шарп К., Глования М.** Измерение и моделирование теплопроводности трехмерных тканых композитов // Механика композит. материалов. 2009. Т. 45, № 2. С. 241–254.
4. **Тарнопольский Ю. М., Поляков В. А., Жигун И. Г.** Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // Механика полимеров. 1973. № 5. С. 853–860.
5. **Крегерс А. Ф., Тетерс Г. А.** Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // Механика композит. материалов. 1982. № 1. С. 14–22.
6. **Янковский А. П.** Определение термоупругих характеристик пространственно-армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // Механика композит. материалов. 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678.
7. **Янковский А. П.** Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // Вычисл. механика сплош. сред. 2016. Т. 9, № 3. С. 279–297.
8. **Reddy J. N.** Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.
9. **Малмейстер А. К.** Сопротивление жестких полимерных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. Рига: Зинатне, 1972.
10. **Иванов Г. В.** Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
11. **Богданович А. Е.** Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987.

12. **Houlston R., Des Rochers C. G.** Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Structures. 1987. V. 26, N 1/2. P. 1–15.
13. **Композиционные** материалы: Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985.
14. **Справочник** по композитным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988.
15. **Жигун И. Г., Душин М. И., Поляков В. А., Якушин В. А.** Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // Механика полимеров. 1973. № 6. С. 1011–1018.

Поступила в редакцию 26/III 2018 г.