

ДРЕЙФ ОЧАГА ДИФфуЗИОННОГО ГОРЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕШАННОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

С. С. Минаев, Л. Каган*, Г. Сивашинский*

Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск, minaev@ns.kinetics.nsc.ru

*School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Ramat Aviv, Tel Aviv 69978, Israel

Дрейфующие, локализованные в пространстве очаги горения или шарики пламени были недавно обнаружены при численном моделировании горения околопредельных предварительно перемешанных смесей газов с низким значением числа Льюиса. В данной работе прямолинейно движущийся очаг пламени рассматривается как бифуркация стационарного сферического очага горения.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что ламинарные пламена смесей с низким значением числа Льюиса испытывают влияние диффузионной неустойчивости, приводящей к образованию ячеистых структур на поверхности плоских пламен. Диффузионная неустойчивость наиболее заметна при горении околопредельных предварительно перемешанных смесей газов с низким числом Льюиса. Процессы горения таких составов чувствительны к радиационным теплопотерям. В таких системах ячеистое пламя часто распадается на отдельные «колпачки» или ячейки, которые могут соединиться разомкнутыми концами, образуя почти сферические структуры, названные шариками пламени [1–4].

В работах [5, 6] была сделана попытка численного исследования процессов образования подобных структур в рамках диффузионно-тепловой двумерной модели. В согласии с теоретическими предсказаниями [7–10] было найдено, что неразрывный ячеистый фронт пламени может существовать при теплопотерях, превышающих критическое значение, предсказываемое теорией для плоского пламени. При достаточно больших теплопотерях пламя распадалось на отдельные ячейки, движущиеся по предварительно перемешанной смеси в поисках недостающего компонента (рис. 1). При дальнейшем увеличении теплопотерь движение таких очагов горения замедлялось и формировались почти симметричные структуры, напоминающие шарики пламени, описанные в теоре-

тических работах [3, 4]. Двумерное приближение, использованное в численных исследованиях, не позволило получить неподвижные объекты из-за логарифмической расходимости стационарных решений модельных уравнений вдали от очага горения. В то же время была продемонстрирована возможность образования отдельных очагов горения вблизи пределов распространения пламени. Эти исследования дают также основание считать, что существует промежуточный (между стационарными шариками пламени и неразрывным ячеистым фронтом пламени) режим горения, представляющий собой движущиеся, локализованные в пространстве очаги горения.

В работе [11] с использованием упрощенных представлений о пространственной структуре очага горения была предпринята попытка аналитического описания трехмерных движущихся с постоянной скоростью шариков пламени. Согласно результатам этих исследований решения, описывающие движущийся шарик, появляются при некотором критическом уровне теплопотерь, и их можно рассматривать как бифуркацию решений для неподвижного шарика пламени.

В данной работе предлагается последовательное описание движущихся шариков пламени, основанное на реальном учете трехмерной структуры очага горения. В работе построены точные решения, описывающие стационарный шарик пламени, исследована их линейная устойчивость по отношению к трехмерным возмущениям, построены решения, описывающие движущиеся шарики пламени вблизи точки бифуркации, а также приведены результаты численного моделирования трехмерной за-

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS-96-1173, US-Israel BSF-98-00374 и ISF-67-01, 574-00.

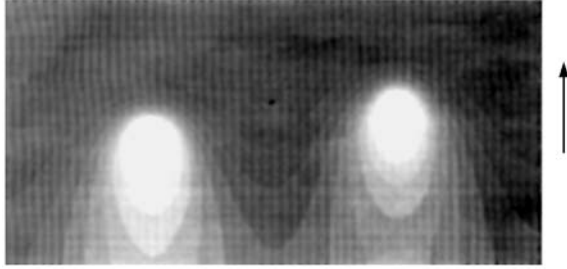


Рис. 1. Распределение недостающего компонента свежей смеси, возникающее при движении двух очагов горения, согласно результатам численного двумерного моделирования [5]: более светлые области соответствуют более низким значениям концентрации; стрелка показывает направление движения очагов

дачи. Настоящее исследование является дальнейшим развитием стационарного бифуркационного анализа, изложенного в [12].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для одиночного осесимметричного шарика пламени, распространяющегося с постоянной скоростью V вдоль оси z (рис. 2), диффузионно-тепловая модель горения имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - V \left(\cos \Theta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) = \nabla^2 T + (1 - \sigma)W - Q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - V \left(\cos \Theta \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \Theta} \right) = \frac{1}{\text{Le}} \nabla^2 C - W, \quad (2)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right), \quad (3)$$

$$W = \exp \left(\frac{1}{2} N \left(1 - \frac{1}{T_f} \right) \right) \times \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \Theta} \right)^2} \delta(r - R(\Theta)). \quad (4)$$

Здесь T — безразмерная температура газа, измеряемая в единицах T_b — адиабатической температуры продуктов горения плоского пламени; C — безразмерная концентрация недостающего компонента свежей смеси в единицах C_0 — концентрации недостающего компонента

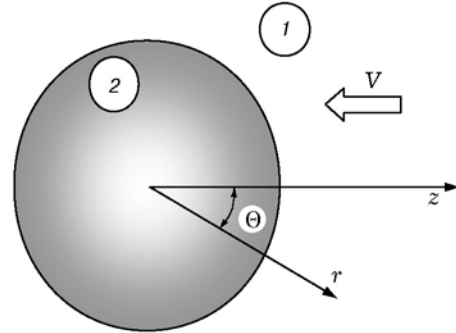


Рис. 2. Схема пламени:

1 — область свежего газа, 2 — продукты горения, заполняющие внутреннюю область шарика пламени

свежей смеси вдали от очага горения; r — радиальная координата, измеряемая в единицах $l_{th} = D_{th}/U_b$ — тепловой толщины плоского адиабатического пламени, D_{th} — коэффициент температуропроводности смеси, U_b — нормальная скорость адиабатического плоского пламени; t — безразмерное время в единицах l_{th}/U_b ; Θ — полярный угол в сферической системе координат ($0 < \Theta < \pi$); $r = R(\Theta)$ — поверхность шарика пламени, на которой происходит химическая реакция; $T_f = T(R(\Theta), \Theta)$ — температура поверхности шарика пламени; $\sigma = T_0/T_b$, где T_0 — температура свежей смеси вдали от шарика пламени; $N = E/RT_b$ — безразмерная энергия активации химической реакции; δ — дельта-функция Дирака; $\text{Le} = D_{th}/D_{mol}$ — число Льюиса, где D_{mol} — коэффициент молекулярной диффузии недостающего компонента свежей смеси; $Q = hT^4$ — член, ответственный за радиационные теплотери, где h — безразмерная константа Стефана — Больцмана в единицах $\rho_b c_p l_p U_b / 4 T_b^3 l_{th}$, l_p — средняя длина поглощения излучения, c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, ρ_b — плотность продуктов горения.

В дальнейшем член, ответственный за теплотери в (1), заменяется линейной функцией температуры внутри шарика пламени и полностью отсутствует вне шарика [3, 11]:

$$Q(T) = hT^4 = hT_{f,0}^4 (1 + (T - T_{f,0})/T_{f,0})^4 \cong \cong 4hT_{f,0}^3 (T - 3T_{f,0}/4) \quad (5)$$

для $r < R(\Theta)$ и $Q(T) = 0$ для $r > R(\Theta)$. Здесь $T_{f,0}$ — температура поверхности стационарного сферического шарика пламени.

В этих предположениях модель записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - V \left(\cos \Theta \frac{\partial T_1}{\partial r} - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \Theta} \right) = \nabla^2 T_1$$

для $r > R(\Theta)$, (6)

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} - V \left(\cos \Theta \frac{\partial C_1}{\partial r} - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial C_1}{\partial \Theta} \right) = \frac{1}{\text{Le}} \nabla^2 C_1$$

для $r > R(\Theta)$, (7)

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - V \left(\cos \Theta \frac{\partial T_2}{\partial r} - \frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \Theta} \right) = \nabla^2 T_2 -$$

$$- 4hT_{f,0}^3 \left(T_2 - \frac{3T_{f,0}}{4} \right) \quad \text{для } r < R(\Theta). \quad (8)$$

Индексы 1, 2 относятся к областям свежей смеси и продуктов горения соответственно. Внутри области продуктов горения недостающий компонент полностью расходуется, поэтому

$$C_2 \equiv 0 \quad \text{при } r < R(\Theta). \quad (9)$$

Граничные условия для системы уравнений (6)–(8) при $r \rightarrow \infty$ имеют вид

$$r \rightarrow \infty: \quad T_1 \rightarrow \sigma, \quad C_1 \rightarrow 1. \quad (10)$$

На поверхности шарика пламени для температуры, концентрации, потоков тепла и недостающего компонента задаются следующие условия:

$$\frac{\partial T_2}{\partial n} - \frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{(1-\sigma)}{\text{Le}} \frac{\partial C_1}{\partial n}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\text{Le}} \frac{\partial C_1}{\partial n} = \exp \left(\frac{1}{2} N \left(1 - \frac{1}{T_f} \right) \right), \quad (12)$$

$$T_1 = T_2 = T_f(\Theta), \quad (13)$$

$$C_1 = 0. \quad (14)$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности шарика:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) / \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \Theta} \right)^2}. \quad (15)$$

2. СТАЦИОНАРНЫЙ ШАРИК ПЛАМЕНИ

Для стационарного сферического шарика пламени ($V = 0$) система уравнений (6)–(8) с условиями (9)–(14) имеет следующее решение:

$$T_{1,st}(r) = \sigma + (T_{f,0} - \sigma) \left(\frac{R_0}{r} \right), \quad (16)$$

$$T_{2,st}(r) = \frac{3}{4} T_{f,0} + \frac{1}{4} T_{f,0} \left(\frac{R_0}{r} \right) \frac{\text{sh}(\alpha_0 r / R_0)}{\text{sh}(\alpha_0)}, \quad (17)$$

$$C_{1,st} = 1 - \frac{R_0}{r}, \quad (18)$$

где

$$\alpha_0 = 2T_{f,0}^{3/2} R_0 \sqrt{h}. \quad (19)$$

Подставляя решение (16)–(19) в граничные условия (11), (12), получаем алгебраическую систему уравнений для радиуса R_0 и температуры на поверхности шарика пламени $T_{f,0}$:

$$R_0 = \frac{1}{\text{Le}} \exp \left(\frac{1}{2} N \left(\frac{1}{T_{f,0}} - 1 \right) \right), \quad (20)$$

$$T_{f,0} = \frac{4(\sigma \text{Le} + 1 - \sigma)}{\text{Le}(\alpha_0 \text{cth} \alpha_0 + 3)}. \quad (21)$$

На рис. 3 приведена зависимость безразмерного параметра радиационных теплопотерь h от

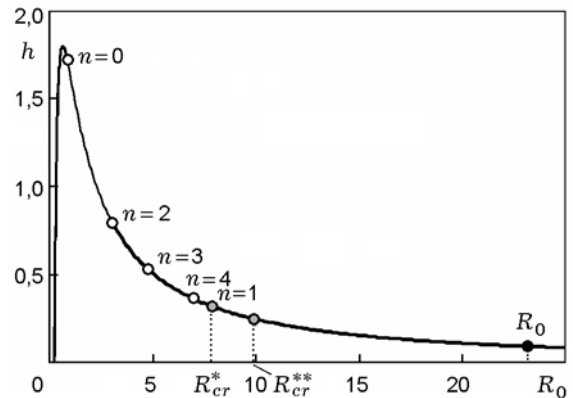


Рис. 3. Зависимость безразмерного параметра теплопотерь h от радиуса шарика R_0 при $N = 10$, $\sigma = 0,2$, $\text{Le} = 0,5$:

светлые кружки — точки нейтральной устойчивости (31) для гармоник с номерами $n = 0, 2, 3, 4$; черный кружок — точка бифуркации (h_{cr}, R_{cr}) (33), (56); серые кружки — точки R_{cr}^* и R_{cr}^{**} , между которыми инкремент первой гармоники имеет мнимую составляющую; толстые линии — неустойчивые части кривой $h(R_0)$

радиуса шарика R_0 при $Le = 0,5$, $N = 10$ и $\sigma = 0,2$. При $\varepsilon_0 \ll 1$ из (20), (21) можно получить неявное выражение, связывающее радиус шарика R_0 с параметром теплопотерь h , ранее полученное в [3, 4]. В этих работах приведена зависимость $h(R_0)$, которая качественно совпадает с показанной на рис. 3. На рис. 3 указаны также точки нейтральной устойчивости стационарного решения (16)–(21) относительно линейных возмущений, имеющих вид сферических гармоник. Эти вычисления описаны в следующем параграфе.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ШАРИКА ПЛАМЕНИ

Рассмотрим поведение малых возмущений стационарного решения. Подобная задача рассматривалась ранее в работах [3, 4]. Выполненный анализ устойчивости показывает, что учет членов порядка $O(1/N)$ в дисперсионном уравнении приводит к заключению о неустойчивости возмущений, которые ответственны за перемещение шарика в пространстве с сохранением его сферической формы. Как будет показано ниже, уточненное дисперсионное уравнение для таких возмущений, кроме нулевого решения, найденного в [4], имеет решение с конечным значением инкремента неустойчивости.

Будем искать решения уравнений (6)–(8), в которых $V = 0$, в виде

$$T_{1,2} = T_{1,st;2,st} + \tilde{T}_{1,2}(r) P_n(\Theta) \exp(\Omega_n t),$$

$$C_1 = C_{1,st} + \tilde{C}_1(r) P_n(\Theta) \exp(\Omega_n t),$$

$$T_f = T_{f,0} + \tilde{T}_f P_n(\Theta) \exp(\Omega_n t), \quad (22)$$

$$R = R_0 + \tilde{R} P_n(\Theta) \exp(\Omega_n t).$$

Здесь волной обозначены малые возмущения, нижним индексом st — стационарные решения, приведенные в § 2; Ω_n — скорость роста гармоники с номером n ; $P_n(\Theta)$ — полиномы Лежандра n -й степени, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial P_n(\cos \Theta)}{\partial \Theta} \right) + n(n+1) P_n(\cos \Theta) = 0, \quad (23)$$

$$P_0(\cos \Theta) = 1, \quad P_1(\cos \Theta) = \cos \Theta, \dots$$

Обсудим вопрос о форме возмущенной поверхности шарика, задаваемой полиномами Лежандра с различными степенями n . Для $n = 0$ поверхность возмущенного шарика остается сферической, так как возмущения не зависят от угла Θ . Под действием этих возмущений шарик сохраняет сферическую форму и просто увеличивается или уменьшается в размерах. Малые возмущения, задаваемые гармоникой с $n = 1$, описывают перемещение шарика вдоль оси z без изменения его сферической формы. Действительно, уравнение для возмущенной поверхности шарика в этом случае имеет вид

$$r = R(\Theta) = R_0 + \tilde{R}_1 \cos \Theta.$$

В декартовой системе координат это уравнение, в пренебрежении членами второго порядка малости по \tilde{R}_1 , может быть записано в виде

$$x^2 + y^2 + (z - \tilde{R}_1)^2 = R_0^2 + O(\tilde{R}_1^2),$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \Theta, \quad z = r \cos \Theta.$$

Отсюда следует, что возмущения, задаваемые гармоникой с $n = 1$, приводят к перемещению сферического шарика вдоль оси z на величину \tilde{R}_1 . Гармоники с большими номерами искривляют сферическую форму шарика и при неограниченном росте могут привести к распаду шарика на отдельные части.

После подстановки решений (22) в уравнения (6)–(8) с учетом (23) получим, что $\tilde{T}_{1,2}$ и \tilde{C}_1 имеют вид

$$\tilde{T}_1 = \tilde{a}_n A_n(r \sqrt{\omega_n} / R_0),$$

$$\tilde{T}_2 = \tilde{b}_n B_n(r \mu_n / R_0), \quad (24)$$

$$\tilde{C}_1 = \tilde{c}_n A_n(r \mu_n \sqrt{Le} / R_0).$$

Здесь $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n, \tilde{c}_n$ — константы, $\omega_n = \Omega_n R_0^2$, $\mu_n = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_n}$, а параметр ε_0 задан выражением (19). В выражениях (24) функции $A_n(\chi)$, $B_n(\chi)$ являются решениями уравнения

$$\frac{d^2(A_n, B_n)}{d\chi^2} + \frac{2}{\chi} \frac{d(A_n, B_n)}{d\chi} - \left(\frac{n(n+1)}{\chi^2} + 1 \right) (A_n, B_n) = 0 \quad (25)$$

с условиями $A_n(\chi) \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow \infty$ и $dB_n(\chi)/d\chi \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow 0$. В явном виде эти функции записываются так:

$$A_n(z) = \frac{e^{-z}}{z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(2z)^k k!(n-k)!}, \quad (26)$$

$$B_n(z) = z^n \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\text{sh } z}{z}. \quad (27)$$

Ограничимся далее рассмотрением неустойчивых решений. В этом случае реальная часть скорости роста возмущений положительна: $\text{Re}(\Omega_n) > 0$ и $|\arg \Omega_n| < \pi/2$. Подставляя решения (22) в линеаризованные граничные условия на поверхности шарика (11)–(14) и исключая константы $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n, \tilde{c}_n, \tilde{R}_f, \tilde{T}_f$, получаем дисперсионное уравнение для скорости роста гармоники с номером n :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_0^2}{4} T_{f,0} + \tilde{\beta}_n(\mu_n) \left(T_{f,0} - \sigma - \frac{1-\sigma}{\text{Le}} \right) - \\ & - (T_{f,0} - \sigma) \tilde{\alpha}_n(\sqrt{\omega_n}) + \frac{1-\sigma}{\text{Le}} \tilde{\alpha}_n(\sqrt{\omega_n \text{Le}}) + \frac{2T_{f,0}^2}{N} \times \\ & \times (2 + \tilde{\alpha}_n(\sqrt{\omega_n \text{Le}})) (\tilde{\alpha}_n(\sqrt{\omega_n}) - \tilde{\beta}_n(\mu_n)) = 0, \quad (28) \end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}_n(\chi) = \chi d \ln A_n(\chi)/d\chi$, $\tilde{\beta}_n(\chi) = \chi d \ln B_n(\chi)/d\chi$.

При $\omega_n = 0$ из уравнения (28) следует условие нейтральной устойчивости вида

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_0^2}{4} T_{f,0} + (\tilde{\beta}_n(\alpha_0) + n + 1) \times \\ & \times \left(T_{f,0} - \sigma - \frac{1-\sigma}{\text{Le}} + \frac{2(n-1)T_{f,0}^2}{N} \right) = 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Уравнение (29) вместе с (19)–(21) представляет собой систему неявных уравнений относительно радиуса шарика R_0 и безразмерного параметра теплотеря h . Решение этой системы уравнений задает точку $(R_0^{(n)}, h^{(n)})$, разделяющую устойчивую и неустойчивую части кривой $h(R_0)$.

Вблизи кривой нейтральной устойчивости при малой скорости роста возмущений ($\sqrt{\omega_n} \ll 1$) из (28) можно получить приближенное уравнение для ω_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$):

$$F_n(h^{(n)}, R_0^{(n)}) + H_n(h^{(n)}, R_0^{(n)}) \omega_n = 0, \quad (30)$$

где функция $F_n(h^{(n)}, R_0^{(n)})$ задана правой частью уравнения (29):

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha_0^2}{4} T_{f,0} + (\tilde{\beta}_n(\alpha_0) + n + 1) \times \\ & \times \left(T_{f,0} - \sigma - \frac{1-\sigma}{\text{Le}} + \frac{2(n-1)T_{f,0}^2}{N} \right), \\ H_n &= \frac{1}{2\alpha_0} \frac{d\tilde{\beta}_n}{d\alpha_0} \left(T_{f,0} - \sigma - \frac{1-\sigma}{\text{Le}} + \right. \\ & \left. + \frac{2(n-1)T_{f,0}^2}{N} \right) + \frac{1}{2n-1} \left(T_{f,0} - 1 + \right. \\ & \left. + \frac{2T_{f,0}^2}{N} (\text{Le}(\tilde{\beta}_n(\alpha_0) + n + 1) + n - 1) \right). \end{aligned}$$

Уравнение (30) позволяет выделить ту часть кривой, которая неустойчива относительно малых возмущений. Результаты расчетов показали, что стационарный сферический шарик пламени становится неустойчивым относительно гармоники с номером n , если выполнено условие

$$\begin{aligned} R_0 &> R_0^{(n)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \\ R_0 &< R_0^{(n)}, \quad n = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Случай $n = 1$ является особым, так как здесь уравнение нейтральной устойчивости (29) совпадает с уравнением (21) ($F_1(h, R_0) \equiv 0$) при всех значениях h и R_0 . Поскольку уравнение (30) представляет собой первые два члена разложения дисперсионного уравнения (28) в ряд по степеням $\sqrt{\omega_1}$, следующие члены разложения (28) для $n = 1$ будут пропорциональны ω_1 . Отсюда следует, что для всех радиусов шарика $\omega_1 = 0$ есть точное решение уравнения (28). Последнее не означает, что первая мода нейтрально устойчива, поскольку уравнение (29) имеет и другие корни. Действительно, при малых значениях инкремента ($\omega_1 \ll 1$) уравнение (28) может быть преобразовано к виду

$$H_1(h, R_0) \omega_1 - E(h, R_0) \omega_1^{3/2} = 0. \quad (32)$$

Это уравнение кроме нулевого решения имеет решение $\sqrt{\omega_1} = H_1/E \ll 1$. При выводе уравнения (32) из (28) функцию $\tilde{\beta}_1(\mu_1)$ разлагали по степеням малости $\sqrt{\omega_1}$ и записывали в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1(\mu) &= \tilde{\beta}_1(\sqrt{\alpha_0^2 + \omega_1}) \cong \\ &\cong \tilde{\beta}_1(\alpha_0) + \frac{d\tilde{\beta}_1(\alpha_0)}{d\alpha_0} \frac{\omega_1}{2\alpha_0} + O(\omega_1^2). \end{aligned}$$

Приведем также выражение для коэффициента $\tilde{\alpha}_1$, использованное при выводе (32) из (28):

$$\tilde{\alpha}_1(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 2.$$

Решение (32) возникает вблизи точки бифуркации (R_{cr}, h_{cr}) , которая задается уравнением

$$\Phi(h_{cr}, R_{cr}) = 0, \text{ где } \Phi(h_{cr}, R_{cr}) = H_1(h_{cr}, R_{cr}). \quad (33)$$

Коэффициенты $\Phi(h, R_0)$ и $E(h, R_0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{8} T_{f,0}(\alpha_0(\beta_1(\alpha_0) - \beta_0(\alpha_0)) - 1) + \\ &+ \frac{2Le}{N} T_{f,0}^2(\alpha_0\beta_1(\alpha_0) + 2) + T_{f,0} - 1, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= T_{f,0} - \sigma - (1 - \sigma)\sqrt{Le} + \\ &+ \frac{2Le^{3/2}}{N} T_{f,0}^2(\alpha_0\beta_1(\alpha_0) + 2). \quad (35) \end{aligned}$$

В выражениях (34), (35) используются функции $\beta_0(\alpha_0) = d \ln B_0(\alpha_0)/d\alpha_0$ и $\beta_1(\alpha_0) = d \ln B_1(\alpha_0)/d\alpha_0$. Выражение (34) представляет собой преобразованный вид коэффициента H_1 , который можно получить из выражения для H_1 (30), используя тождество

$$\chi \left(\beta_1 + \chi \frac{d\beta_1}{d\chi} \right) = (2 + \chi\beta_1)(1 - \chi(\beta_1 - \beta_0))$$

и учитывая, что $F_1 = 0$.

В § 5 вблизи точки бифуркации (R_{cr}, h_{cr}) построено решение, которое описывает прямолинейно и равномерно движущийся шарик. Отметим, что, используя асимптотический подход, изложенный в § 4, можно получить выражение для точки бифуркации, в точности совпадающее с (33), (34).

Для того чтобы найти скорость роста возмущений вдали от точки бифуркации и точек нейтральной устойчивости, применялось численное решение уравнения (28). В результате такого решения было найдено, что шарик пламени неустойчив относительно возмущений, перемещающих шарик в пространстве

без изменения его формы ($n = 1$), если его радиус становится больше некоторого критического значения: $R_0 > R_{cr}^*$. Этот критический радиус оказался меньше радиуса шарика в точке бифуркации, задаваемой уравнением (33): $R_{cr}^* < R_{cr}$ (см. рис. 3). Инкремент неустойчивости имеет мнимую часть, если размер шарика удовлетворяет условию $R_{cr}^* \leq R_0 < R_{cr}^{**}$. Шарик, радиус которого больше R_{cr}^{**} неустойчив, и при $R_{cr}^{**} \leq R_0 < R_{cr}$ уравнение (28) имеет два различных действительных положительных корня. Меньшее решение существует только в области $R_{cr}^{**} \leq R_0 < R_{cr}$, и вблизи точки бифуркации $R_0 \cong R_{cr}$ приближенное значение скорости роста возмущений описывается выражением (32). В точке R_{cr}^{**} два положительных корня уравнения (28) одинаковы, а при $R_0 > R_{cr}$ уравнение имеет только один положительный корень.

На рис. 4 приведены зависимости скорости роста возмущений ω_n от радиуса шарика R_0 для различных гармоник. Важно, что имеется область значений теплотерь (радиусов), при которых могут существовать стационарные шарик пламени (см. рис. 3). Шарик пламени с меньшими радиусами неустойчив относительно одномерных радиальных возмущений. Шарик с большими радиусами, существующие в области малых теплотерь, неустойчивы относительно возмущений, искривляющих их сферическую форму. При неограниченном росте таких возмущений шарик может разделиться на отдельные части,

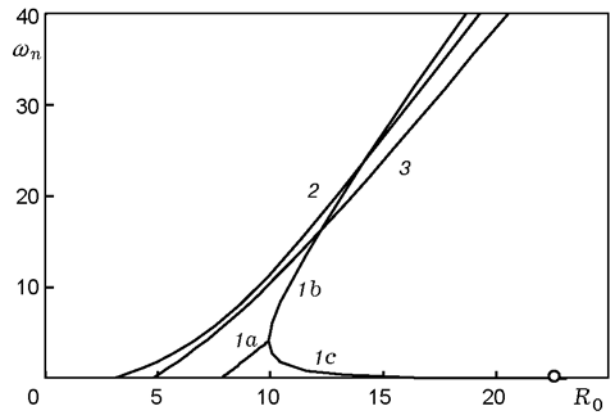


Рис. 4. Зависимость скорости роста возмущений от радиуса шарика:

1a — реальная часть инкремента ω_1 ; 1b, 1c — два различных решения уравнения (28) для инкремента первой гармоники; 2, 3 — скорости роста гармоник с номерами $n = 2, 3$ соответственно; кружок — точка бифуркации

причем чем больше начальный радиус шарика, тем на большее число частей он способен разделиться. Основанием для такого предположения может служить тот факт, что с ростом радиуса возрастает число неустойчивых гармоник. На рис. 3 приведена кривая $h(R_0)$ с точками нейтральной устойчивости для различных гармоник.

Результаты линейного анализа устойчивости позволяют высказать предположение о возможном существовании решений, описывающих движущийся шарик. Образование таких движущихся структур, по-видимому, наиболее вероятно при тех значениях теплотер, когда скорость роста первой гармоники имеет наибольшее значение. (На рис. 4 такая область существует.) В случае, когда скорость роста высших гармоник будет наибольшей, возможен распад шарика на отдельные части. Однако и в этом случае построение решений с движущимся шариком представляет интерес. Если движущийся шарик окажется неустойчивым, важно знать скорость его движения, с тем чтобы оценить расстояние, которое пройдет шарик прежде, чем распадется на отдельные части.

Появление мнимой части в инкременте для первой гармоники может, по-видимому, привести к тому, что движение шарика будет сопровождаться его вращением или пульсациями. Возможен также вариант, когда шарик будет двигаться по спиральной траектории. Для описания таких структур необходимо нелинейное исследование, выходящее за рамки линейного анализа.

Результаты, полученные в данной работе, можно распространить на случай трехмерных возмущений, зависящих от азимутального угла φ . В этом случае возмущенные величины будут пропорциональны $\exp(i m \varphi) P_n^m(\cos \Theta)$, где $P_n^m(\cos \Theta)$ — присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m . Не останавливаясь на деталях, укажем, что в этом случае скорость роста возмущений не зависит от порядка m функций Лежандра. Дисперсионное уравнение для гармоник с номером n будет иметь вид (28), поэтому все результаты анализа устойчивости осесимметричных возмущений легко перенести на трехмерный случай.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ДРЕЙФУЮЩЕГО ШАРИКА ПЛАМЕНИ

Опишем метод, позволяющий построить

решения стационарных уравнений (3)–(6) для шарика, движущегося с постоянной скоростью. Решение для движущегося шарика ($V \neq 0$) будем рассматривать как бифуркацию стационарного решения вблизи точки (h_{cr}, R_{cr}) на кривой $h(R_0)$ (см. рис. 3). Как показано в § 3, покоящийся сферический шарик вблизи этой точки становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям, которые сдвигают шарик в пространстве, сохраняя его сферическую форму. Вблизи точки бифуркации (при $h \cong h_{cr}$) скорость шарика мала ($V \ll 1$) и его форма близка к сферической ($R(\Theta) \cong R_{cr}$). В дальнейшем анализе $v = VR_{cr} = O(h - h_{cr})$ будет рассматриваться как малый параметр.

Решение задачи будем искать в виде

$$R(\Theta) = R_{cr}(1 + r_0 P_0(\cos \Theta) + r_1 P_1(\cos \Theta)) + O(v^2), \quad (36)$$

где $r_0, r_1 \approx O(v)$;

$$T_f(\Theta) = T_{f,0} + N^{-1}(\tau_0 P_0(\cos \Theta) + \tau_1 P_1(\cos \Theta)) + O(v^2), \quad (37)$$

где $\tau_0, \tau_1 \approx O(v)$. Здесь $T_{f,0} = T_{f,0}(R_{cr})$, а $P_0(\cos \Theta) = 1$, $P_1(\cos \Theta) = \cos \Theta$ — полиномы Лежандра нулевой и первой степени (см. (23)).

Заметим, что исходные уравнения (1), (2) инвариантны относительно преобразования $z \rightarrow z + \text{const}$, поэтому, например, скорость шарика и температура его поверхности не зависят от выбора начала координат. Как показано в § 3, член $r_1 R_{cr} P_1(\Theta)$ в уравнении (36) описывает сдвиг шарика вдоль оси z на величину $r_1 R_{cr}$, поэтому всегда можно выбрать такую систему координат, в которой коэффициент r_1 будет равен нулю. Радиус движущегося шарика будет отличаться от радиуса покоящегося шарика и при $r_1 = 0$ будет задаваться выражением

$$R_d = R_{cr}(1 + r_0). \quad (38)$$

Заметим, что подстановка

$$T_1 = \sigma + A(\varsigma, \Theta) \exp\left(-\frac{vr \cos \Theta}{2R_{cr}}\right) \quad (39)$$

приводит уравнение (6) к уравнению Клейна — Гордона [13] для $A(\varsigma, \Theta)$:

$$\nabla_{\varsigma, \Theta}^2 A - A = 0, \quad (40)$$

где

$$\nabla_{\zeta, \Theta}^2 = \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{\zeta^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right),$$

$$\zeta = vr/2R_{cr}.$$

Известно, что частные решения уравнения Клейна — Гордона можно записать в виде конечной суммы по полиномам Лежандра. Поэтому решение, описывающее распределение температуры в свежем газе и удовлетворяющее условию (10) при $r \rightarrow \infty$, можно записать в виде

$$T_1 = \sigma + \sum_{n=0}^m a_n A_n(\zeta) P_n(\cos \Theta) \exp(-\zeta \cos \Theta). \quad (41)$$

Функции A_n являются решениями уравнения

$$\frac{d^2 A_n}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{dA_n}{d\zeta} - \left(\frac{n(n+1)}{\zeta^2} + 1 \right) A_n = 0 \quad (42)$$

с граничным условием $A_n(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Используя тот же подход, который применялся для нахождения распределения температуры свежего газа, запишем решение уравнения (7) для концентрации недостающего компонента свежей смеси в виде

$$C_1 = 1 + \sum_{n=0}^m d_n D_n(\zeta) P_n(\cos \Theta) \exp(-\text{Le}\zeta \cos \Theta), \quad (43)$$

где

$$\frac{d^2 D_n}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{dD_n}{d\zeta} - \left(\frac{n(n+1)}{\zeta^2} + \text{Le}^2 \right) D_n = 0 \quad (44)$$

с условием $D_n(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Приведем явный вид функций A_n , D_n для $n = 0, 1$:

$$A_0 = \frac{v}{2\zeta} e^{-\zeta}, \quad A_1 = \left(\frac{v}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right) e^{-\zeta}, \quad (45)$$

$$D_0 = \frac{v}{2\zeta} e^{\text{Le}\zeta}, \quad D_1 = \left(\frac{v}{2} \right)^2 \left(\frac{\text{Le}}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right) e^{\text{Le}\zeta}. \quad (46)$$

Решение уравнения (8) для температуры продуктов горения можно получить тем же способом, что применялся для нахождения распределения концентрации и температуры свежего газа:

$$T_2 = \frac{3T_{f,0}}{4} + \sum_{n=0}^m b_n B_n(\eta) P_n(\cos \Theta) \exp(-\zeta \cos \Theta). \quad (47)$$

Здесь $\eta = \varkappa r/R_{cr}$, $\varkappa = \sqrt{4hT_{f,0}^3 R_{cr}^2 + v^2/4} = \sqrt{(1+\nu)\varkappa_{cr}^2 + v^2/4}$, $\varkappa_{cr}^2 = 4T_{f,0}^3 R_{cr}^2 h_{cr}$ (19) и

$$\nu = (h - h_{cr})/h_{cr}. \quad (48)$$

Функции A_n , B_n в выражениях (41), (47) с точностью до постоянного множителя совпадают с функциями, описанными в § 3 (формулы (25), (27)). В данном исследовании эти множители выбирались так, чтобы при $r = R_{cr}$ и соответственно при $\zeta = v/2$ функции A_n , B_n имели порядок малости $O(1)$ при $v \rightarrow 0$. Используя формулы (26), (27), можно построить эти функции для любого значения n . Приведем выражения для B_0 и B_1 :

$$B_0 = \frac{\text{sh } \eta}{\eta}, \quad B_1 = \frac{\text{ch } \eta}{\eta} - \frac{\text{sh } \eta}{\eta^2}. \quad (49)$$

Коэффициенты a_n , b_n , d_n имеют следующий порядок малости:

$$a_0, b_0, d_0 = O(1), \quad a_1, b_1, d_1 = O(v). \quad (50)$$

Заметим, что при $v \rightarrow 0$ решения (41), (43), (47) переходят соответственно в решения (16), (18) и (17), описывающие стационарный сферический шарик пламени.

5. ТОЧКА БИФУРКАЦИИ И СКОРОСТЬ ДРЕЙФА ШАРИКА ПЛАМЕНИ

Решения (41), (43), (47) содержат неопределенные коэффициенты a_n , b_n , d_n , которые можно найти из граничных условий (11)–(14) на поверхности шарика $r = R(\Theta)$. Чтобы найти связь между этими коэффициентами, необходимо записать в виде ряда по полиномам Лежандра значения T_1 , T_2 , C_1 и их производных по нормали $\partial T_1/\partial n$, $\partial T_2/\partial n$ и $\partial C_1/\partial n$ на поверхности шарика $r = R(\Theta)$. Для этого все функции, зависящие от радиальной координаты r , необходимо разложить в ряд Тейлора вблизи точки $r = R_{cr}$ и оставить только те члены в разложении, которые имеют порядок малости $O(v^2)$. Затем, используя алгебраические связи между полиномами Лежандра и степенями $\cos \Theta$ и приравнявая к нулю выражения при различных полиномах Лежандра, можно получить систему алгебраических уравнений для a_n , b_n , d_n и коэффициентов r_n , τ_n , которые задают радиус и температуру на поверхности движущегося шарика.

На первом этапе, используя (14), находим связь между d_0 , d_1 и r_0 , v :

$$d_0 = -\left(1 + r_0 + \frac{1}{2}\text{Le}|v|\right) + O(v^2),$$

$$d_1 = -\frac{1}{2}\text{Le}v + O(v^2). \quad (51)$$

Затем преобразуем левую и правую части (12) к виду

$$\frac{\partial C}{\partial n} = \frac{1}{R_{cr}} \left(1 + \frac{1}{2}\text{Le}|v| - r_0 + v\text{Le}P_1(\cos \Theta)\right) + O(v^2), \quad (52)$$

$$\exp\left(\frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{T_{f,0}}\right)\right) = \frac{1}{R_{cr}} \left(1 + \frac{N(T_f - T_{f,0})}{2T_{f,0}^2}\right) + O(v^2). \quad (53)$$

Используя выражение (37) для T_f , выразим τ_n через r_0 , v (см. приложение). В приложении приведены также выражения для коэффициентов a_n , b_n , которые можно найти из граничного условия (13). Из оставшегося граничного условия (11) получаем (см. приложение) соотношение

$$K_0v + K_1r_0 + K_2|v| + O(v^2) = 0, \quad (54)$$

$$\Phi(h_{cr}, R_{cr}) + S_1r_0 + S_2|v| + S_3\nu + O(v^2) = 0. \quad (55)$$

Выражения для коэффициентов K_n , S_n даны в приложении. В точке бифуркации $v = r_0 = \nu = 0$. Условие

$$\Phi(h_{cr}, R_{cr}) = 0 \quad (56)$$

при $v = r_0 = \nu = 0$ дает дополнительное соотношение между R_{cr} и h_{cr} , которое вместе с уравнениями (19)–(21) позволяет найти точку бифуркации. Эта точка бифуркации в точности совпадает с точкой нейтральной устойчивости первой гармоники (см. (33)). Вид коэффициента $\Phi(h_{cr}, R_{cr})$ определяется формулой (34). Учитывая (56), уравнения (54), (55) перепишем в виде

$$|V| = K_v(h - h_{cr})/h_{cr}, \quad (57)$$

$$r_0 = K_r(h - h_{cr})/h_{cr}. \quad (58)$$

Заметим, что $r_0 = (R_d - R_{cr})/R_{cr}$ есть относительное увеличение среднего радиуса движущегося шарика R_d по сравнению с радиусом неподвижного шарика в точке бифуркации R_{cr} .

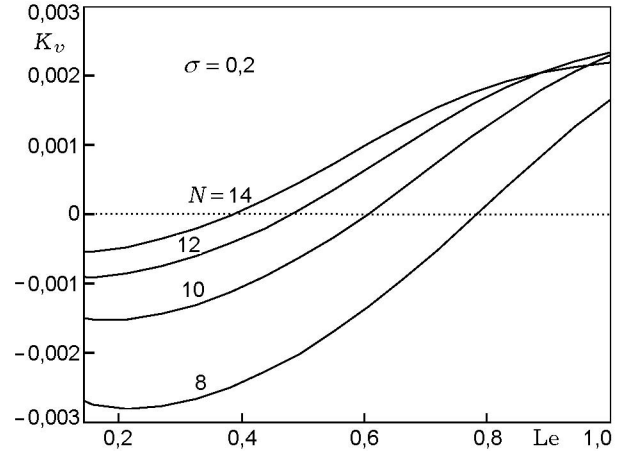


Рис. 5. Зависимость коэффициента K_v от числа Льюиса

На рис. 5, 6 приведены зависимости этих коэффициентов от числа Le при некоторых значениях безразмерной энергии активации N .

При относительно малых значениях Le коэффициент K_v отрицателен (рис. 5) и, поскольку $|V| > 0$, медленно движущийся шарик может существовать только при $h > h_{cr}$ (57). При числах Le , близких к единице, коэффициент K_v положителен и движущийся шарик может существовать лишь при $h > h_{cr}$. В этом случае соответствующее решение, вероятно, может быть инверсной бифуркацией и оно неустойчиво, поскольку по результатам численного исследования [5] движущиеся шарики были получены только при условии $d|V|/dh < 0$. При $h > h_{cr}$, согласно предсказаниям одномерной модели [11], могут существовать как стационарное решение, так и решение, описывающее движущийся шарик, для которого $V \neq 0$ при $h \rightarrow h_{cr}$. Последнее решение, однако, нельзя получить в рамках данного слабонелинейного подхода.

Коэффициент K_r всегда отрицателен (рис. 6) и при $h < h_{cr}$ радиус движущегося шарика будет больше, а при $h > h_{cr}$ меньше радиуса стационарного шарика. Последнее заключение качественно согласуется с результатами, полученными в рамках одномерной модели [11].

Обсудим теперь угловое распределение температуры на поверхности шарика. В первом приближении по параметру v это распределение описывается выражением

$$T_f = T_{f,0} + \frac{1}{N}(\tau_0 + \tau_1 \cos \Theta) + O(v^2), \quad (59)$$

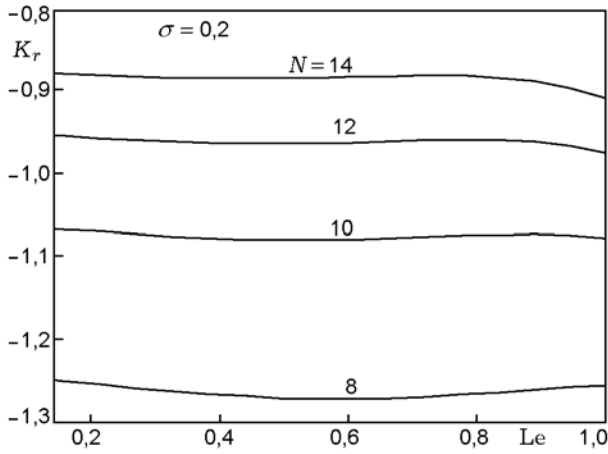


Рис. 6. Зависимость коэффициента K_r от числа Льюиса

где $\tau_1 = 2T_{f,0}^2 Le v$. Поскольку коэффициент τ_1 положителен, максимум температуры достигается при $\Theta = 0$, а минимум — при $\Theta = \pi/2$. Этот вывод совпадает с результатами работы [11].

6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Из-за ряда модельных допущений, неизбежных при аналитическом описании, важно проверить динамическую реализуемость самораспространяющихся шариков пламени посредством прямого численного эксперимента. Результат такого эксперимента приведен на рис. 7. Численное решение было получено для общепринятой диффузионно-тепловой модели с распределенной скоростью реакции (см. также (1)–(4)):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + (1 - \sigma)W - Q, \quad (60)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{Le} \nabla^2 C - W, \quad (61)$$

где

$$W = \frac{1}{2}(1 - \sigma)^2 Le^{-1} N^2 C \exp(N(1 - T^{-1})), \quad (62)$$

$$Q = h(T^4 - \sigma^4). \quad (63)$$

Уравнения (60), (61) решались в канале квадратного сечения, $0 < x < a$, $0 < y < a$, с адиабатическими граничными условиями

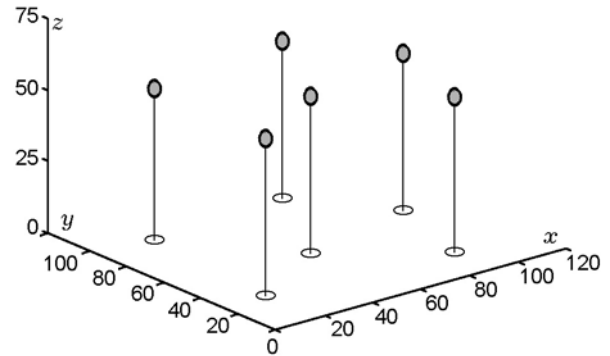


Рис. 7. Численное решение трехмерной диффузионно-тепловой модели (60)–(64), полученное для $Le = 0,5$, $N = 10$, $\sigma = 0,2$, $h = 0,16$ и $a = 100$:

показаны осевые сечения распределения скорости реакции W ; более темные области соответствуют более высоким значениям W ; кружки на плоскости xy соответствуют проекциям шариков пламени; для выбранного набора параметров средняя скорость дрейфа вдоль оси z — $V = 0,047$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a, \quad y = 0, a. \quad (64)$$

В момент, предшествующий зажиганию, $T \equiv \sigma$ и $C \equiv 1$. Использованный численный метод в значительной степени подобен описанному в работе [14]. Дрейфующие шарики были получены как продукт самораспада изначально адиабатического пламени путем постепенного увеличения параметра тепловых потерь h .

Рис. 7 соответствует вполне установившейся стадии, когда горение реализуется в виде группы шариков, дрейфующих в положительном направлении оси z . Их взаиморасположение, однако, не фиксировано и характеризуется спорадическим отрывом лидирующего шарика, его последующим распадом и формированием новых шариков, идентичных тем, которые существовали до деления. Отстающие шарики в конечном итоге гаснут из-за постепенного обеднения смеси. Общее число шариков, содержащихся в движущейся расчетной области, связанной с лидирующим шариком, в среднем остается постоянным. Приведенный пример, таким образом, свидетельствует, что самораспространяющиеся шарики пламени действительно являются динамически реализуемыми, по крайней мере, в виде группы. Вопрос существования структурно устойчивых одиночных дрейфующих шариков, однако, пока остается открытым.

Обнаруженная способность шариков к са-

мораспаду указывает на интересную возможность лавинообразного роста числа дрейфующих шариков при точечном иницировании горения (см. также [6]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важно различать самостоятельно движущиеся шарики пламени, описанные в этой статье, от дрейфующих шариков пламени, чей дрейф вызван внешними причинами, такими как, например, взаимодействие с соседними шариками, крупномасштабные неоднородности температурного поля или состава газовой смеси, действие слабых массовых сил и т. д. [15, 16].

Движущийся шарик пламени не уникальное явление. Подобные диссипативные солитоны наблюдаются и в других физико-химических системах [17–21]. По-видимому, шаровую молнию, физическая природа которой остается не до конца ясной, можно отнести к этому же классу систем [21].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Распределение концентрации недостающего компонента, описываемое уравнением (43), с точностью до членов второго порядка малости по параметру v можно записать в виде

$$C_1(r, \Theta) = 1 + \frac{R_{cr}}{r} \exp\left(-\frac{\text{Le}(|v| + v \cos \Theta)r}{2R_{cr}}\right) \times \\ \times \left(d_0 + d_1 \cos \Theta \left(\frac{\text{Le}}{2}|v| + \frac{R_{cr}}{r}\right)\right) + O(v^3), \quad (65)$$

где $d_0 = O(1)$ и $d_1 = O(v)$. Граничное условие (14) с точностью до членов $O(v^2)$ запишем в виде

$$C_1 \Big|_{r=R(\Theta)} = C_1 \Big|_{r=R_{cr}} + C_1' \Big|_{r=R_{cr}} (R - R_{cr}) + \\ + O(v^3) = 0, \quad (66)$$

где $C_1' = \partial C_1 / \partial r$.

Подставляя (65) в (66) и приравнявая к нулю выражения при свободном члене и $\cos \Theta$, получим

$$1 + d_0 \left(1 - r_0 - \frac{\text{Le}}{2}|v|\right) = 0, \\ d_1(1 - 2r_0) - \frac{1}{2}vd_0\text{Le} = 0. \quad (67)$$

Решения этой системы уравнений относительно коэффициентов d_0 и d_1 с точностью до членов $O(v^2)$ приведены в статье в виде выражения (51).

Левую часть граничного условия (12) с точностью до членов $O(v)$ запишем в виде

$$\frac{1}{\text{Le}} \frac{\partial C_1}{\partial n} \Big|_{r=R(\Theta)} = \frac{1}{\text{Le}} \left(C_1' \Big|_{r=R_{cr}} + C_1'' \Big|_{r=R_{cr}} \times \right. \\ \left. \times (R - R_{cr}) \right) + O(v^2). \quad (68)$$

Подставляя (65), (53) и (37) в граничное условие (12), получим

$$\tau_0 = T_{f,0}^2 (\text{Le}|v| - 2r_0), \quad (69)$$

$$\tau_1 = 2T_{f,0}^2 \text{Le}v. \quad (70)$$

Из граничного условия (13), приравнявая к нулю выражения при свободном члене и $\cos \Theta$, находим коэффициенты a_n (41) и b_n (47) как функции τ_n :

$$a_0 = (T_{f,0} - \sigma) \left(1 + r_0 + \frac{1}{2}|v|\right) + \frac{\tau_0}{N},$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(T_{f,0} - \sigma)(1 + 3r_0)v + \frac{1}{2N}\tau_0v + \frac{1}{N}\tau_1(1 + 2r_0),$$

$$b_0B_0 = \frac{1}{N}\tau_0 + \frac{1}{4}T_{f,0} \left(1 - \alpha_{cr}\beta_0 \left(r_0 + \frac{v}{2}\right)\right),$$

$$b_1B_1 = \frac{1}{8}T_{f,0}v \left(1 + r_0 - \alpha_{cr}\beta_1 \left(r_0 + \frac{v}{2}\right)\right) + \\ + \frac{\tau_0v}{2N} + \frac{\tau_1}{N} \left(1 - \alpha_{cr}\beta_1 \left(r_0 + \frac{v}{2}\right)\right).$$

Параметры K_n и S_n в уравнениях (54), (55) приведены ниже:

$$K_0 = \frac{1}{8}\alpha_{cr}T_{f,0}(\alpha_{cr}\beta_0)',$$

$$K_1 = 2K_0 - 2T_{f,0}^2(1 + \alpha_{cr}\beta_0)/N,$$

$$K_2 = \frac{1}{N}(1 + \alpha_{cr}\beta_0)T_{f,0}^2\text{Le} + \frac{1}{2}(T_{f,0} - 1),$$

$$S_1 = \frac{1}{8}\alpha_{cr}T_{f,0}(\alpha_{cr}(\beta_1 - \beta_0))' - \\ - \frac{1}{N}(1 + \alpha_{cr}(\beta_1 - \beta_0))T_{f,0}^2 +$$

$$+ \frac{2\text{Le}}{N} T_{f,0}^2 \left(\alpha_{cr} (\alpha_{cr} \beta_1)' - \frac{4}{N} T_{f,0} (\alpha_c \beta_1 + 2) \right),$$

$$S_2 = \frac{\text{Le}}{2N} (\alpha_{cr} (\beta_1 - \beta_0) + 1) T_{f,0}^2 -$$

$$- (\alpha_c \beta_1 + 2) \text{Le}^2 T_{f,0}^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4T_{f,0}}{N} \right) -$$

$$- \frac{1}{4} (T_{f,0} - \sigma - \text{Le}(1 - \sigma)),$$

$$S_3 = \frac{1}{16} \alpha_{cr} T_{f,0} (\alpha_{cr} (\beta_1 - \beta_0))' +$$

$$+ \frac{\text{Le}}{N} \alpha_{cr} T_{f,0}^2 (\alpha_{cr} \beta_1)'$$

Здесь $\beta_0' = d\beta_0(\alpha_{cr})/d\alpha_{cr}$, $\beta_1' = d\beta_1(\alpha_{cr})/d\alpha_{cr}$, $\beta_0(\alpha_{cr}) = d \ln B_0(\alpha_{cr})/d\alpha_{cr}$, $\beta_1(\alpha_{cr}) = d \ln B_1(\alpha_{cr})/d\alpha_{cr}$, а функции B_0 , B_1 заданы выражениями (49).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lewis B. and von Elbe G.** Combustion, Flames and Explosion of Gases. 3rd ed. Orlando FL: Academic Press, 1987.
2. **Ronney P.** Near-limit flame structures at low Lewis number // *Combust. Flame*. 1990. V. 82. P. 1–14.
3. **Buckmaster J., Joulin G., and Ronney P.** The structure and stability of nonadiabatic flame balls // *Combust. Flame*. 1990. V. 79. P. 387–392.
4. **Buckmaster J., Joulin G., and Ronney P.** The structure and stability of nonadiabatic flame balls: II. Effects of far-field losses // *Combust. Flame*. 1991. V. 84. P. 411–422.
5. **Kagan L. and Sivashinsky G.** Self-fragmentation of nonadiabatic cellular flames // *Combust. Flame*. 1997. V. 108. P. 220–226.
6. **Bockhorn H., Frolich J., and Schneider K.** An adaptive two-dimensional wavelet-vaguellette algorithm for the computation of flame balls // *Combust. Theory Modelling*. 1999. V. 3. P. 177–198.
7. **Joulin G. and Sivashinsky G.** On the dynamics of nearly-extinguished non-adiabatic cellular flames // *Combust. Sci. Technol.* 1983. V. 31. P. 75–90.
8. **Joulin G.** Shapes, velocities and propagation limits of a non-adiabatic cellular flame // *Combust. Sci. Technol.* 1986. V. 47. P. 69–79.
9. **Sinay L. and Williams F. A.** An analytic approach to the description of non-adiabatic cellular flames near extinction // *SIAM J. Appl. Math.* 1992. V. 52. P. 416–427.
10. **Sinay L. and Williams F. A.** Stability of non-adiabatic cellular flames near extinction // *Dynamics of Gaseous Combustion* / Ed. by A. I. Kuhl, J.-C. Leyer, A. A. Borisov and W. A. Sirignano. (Progress in Astronautics and Aeromechanics; V. 151). Washington, DC: AIAA, 1992.
11. **Brailovsky I. and Sivashinsky G. I.** On stationary and travelling flame balls // *Combust. Flame*. 1997. V. 110. P. 524–529.
12. **Minaev S., Kagan L., Joulin G., and Sivashinsky G.** On self-drifting flame balls // *Combust. Theory Modelling*. 2001. N. 5. P. 609–622.
13. **Schweber S. S.** Introduction to Relativistic Quantum Theory. Evanston: Row & Peterson, 1961.
14. **Kagan L. and Sivashinsky G.** Flame propagation and extinction in large-scale vortical flows // *Combust. Flame*. 2000. V. 120. P. 222–232.
15. **Buckmaster J. and Ronney P.** Flame-ball drift in the presence of a total diffusive heat flux // *Twenty-Seventh Symp. (Intern.) Combust.* Pittsburgh: The Combustion Inst., 1998. P. 2603–2610.
16. **Joulin G., Kurdumov V. N., and Linan A.** Existence conditions and drift velocities of adiabatic flame-balls in weak gravity fields // *Combust. Theory Modelling*. 1999. V. 3, N 2. P. 281–296.
17. **Joulin G., Cambrais P., and Jaouen N.** On mathematical model for a flame ball in a turbulent flow // *Workshop on Modelling of Reaction Fronts*, Lyon, April 19–22. 1999.
18. **Rednikov A. Ye., Ryazantsev Yu. S., and Velarde M. G.** Active drops and drops motions due to nonequilibrium phenomena // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 1994. V. 19. P. 95–113.
19. **Krischer K. and Mikhailov A.** Bifurcation to traveling spots in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 73, N 23. P. 3165–3168.
20. **Нестационарные структуры и диффузионный хаос** / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. М.: Наука, 1992.
21. **Kerner B. S. and Osipov V. V.** Autosolitons—a New Approach to the Problem of Self-Organisation and Turbulence. Dordrecht: Kluwer, 1994.

Поступила в редакцию 12/II 2001 г.