

## РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБЕ С ОДНИМ ОТКРЫТЫМ КОНЦОМ В РЕЖИМЕ СЛАБОРАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Р. Г. Галиуллин, Э. Р. Галиуллина, Е. И. Пермяков\*

Казанский государственный университет, 420008 Казань

\* Казанский государственный педагогический университет, 420021 Казань

Построена аналитическая теория резонансных колебаний газа в трубе с одним открытым концом. Течение газа в трубе предполагается турбулентным. Строится модель течения газа вблизи открытого конца трубы, позволяющая получить граничное условие, не содержащее эмпирических параметров. Теоретические результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными других авторов.

Одной из интереснейших проблем гидродинамической акустики является теория резонансных колебаний газа в трубах-резонаторах. Обычно в эксперименте колебания газа большой интенсивности возбуждаются поршнем, который по гармоническому закону колеблется на одном конце трубы [1–4]. Особый интерес с точки зрения практического использования представляют собой трубы-резонаторы с одним открытым концом. Колебания в таких системах сопровождаются рядом интересных эффектов: на открытом конце трубы образуется пульсирующая струя [5], в трубе устанавливается неоднородное температурное поле [6] и т. д.

Количественная теория явления пока не завершена. Это связано со сложностью граничного условия на открытом конце трубы [7, 8] и слабой изученностью закономерностей осциллирующего турбулентного течения в трубе [9]. Недавно удалось построить аналитическую модель процессов на открытом конце трубы и с ее помощью определить граничное условие [10]. Модели внутритрубной турбулентности, впервые предложенные в [11, 12], позволяют описать экспериментальные результаты, однако имеют существенные недостатки: а) не учитывают теплообмен между стенкой трубы и газом, б) опираются на предположение о квазистационарном режиме турбулентности, в) не рассматривают дисперсию в турбулентной среде.

В настоящей работе делается попытка построить свободную от указанных недостатков модель резонансных колебаний газа в открытой с одного конца трубе в турбулентном режиме течения.

Колебания в цилиндрической трубе длиной  $L$  и радиусом  $R$ , возбуждаемые гармонически колеблющимся поршнем с амплитудой смещения  $l_0 \ll L$ , характеризуются следующими безразмерными параметрами [7–9, 13]:

$$\varepsilon = \frac{V}{\omega L}, \quad H = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad \text{Sh} = \frac{\omega R}{V}, \quad M_p = \frac{\omega l_0}{c_0}, \quad \text{Re}_\omega = \frac{V^2}{\omega \nu}.$$

Здесь  $V$  — амплитуда колебаний скорости в пучности скорости (для первого резонанса — на открытом конце трубы);  $\omega$  — циклическая частота колебаний;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $c_0$  — скорость звука в невозмущенном газе. Так как  $l_0 \ll L$ , то при колебаниях вблизи основной резонансной частоты  $\omega_0 = \pi c_0 / (2L)$  [13]  $M_p \ll 1$ . Обычно в

эксперименте  $H \gg 1$  (влияние акустического погранслоя на ядро течения мало) и  $Sh \leq 1$ . Условие  $Sh \leq 1$  приводит в случае длинной трубы ( $L/R \gg 1$ ) к  $\varepsilon \ll 1$ , т. е. задачу можно решать методами теории возмущений [13]. Критерий  $Re_\omega$  позволяет судить о режиме турбулентности: если  $10^5 \leq Re_\omega \leq 6 \cdot 10^5$ , то имеет место режим слаборазвитой турбулентности [9]. Такой режим интересен потому, что основная масса экспериментов проводилась именно в этих условиях [1–4].

Неизоэнтропические колебания газа в трубе можно описать уравнениями [14]

$$\frac{\partial(\rho u)_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)_s + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\tau}{R} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u_s \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \rho \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{2(\alpha - 1)}{R} q = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $p$ ,  $u$  — плотность, давление и скорость;  $\tau$  и  $q$  — касательное напряжение и тепловой поток на стенке трубы;  $\alpha = c_p/c_v$ ;  $t$  — время;  $x$  — продольная координата (закрытому концу трубы соответствует  $x = 0$ , а открытому  $x = L$ ); индекс  $s$  означает, что величина усреднена по сечению трубы. В первом (акустическом) приближении из (1) получим

$$\rho_0 \frac{\partial u_{1s}}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{2\tau_1}{R}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} = \frac{2(\alpha - 1)}{R} q_1. \quad (2)$$

Здесь индекс 1 означает первое приближение, а 0 относится к величинам для невозмущенного газа. Для решения системы (2) нужно оценить  $\tau_1$  и  $q_1$ .

Прежде всего учтем, что уравнения Рейнольдса, записанные вблизи стенки трубы, с учетом граничного условия  $u(R) = 0$ , приводят к связи

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_1) \Big|_{r=R},$$

откуда следует, что, так как  $p$  не зависит от  $r$ , зависимость  $\tau_1$  от  $x$  и времени подобна зависимости от  $x$  градиента давления. С другой стороны, уравнения Рейнольдса, записанные на оси трубы с учетом условия симметрии

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_1) \Big|_{r=0} = 0,$$

дают

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{r=0} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0,$$

т. е. зависимость градиента давления от  $x$  подобна зависимости скорости. Суммируя изложенное выше, можно утверждать, что в (2)

$$\tau_1 \propto u_1(x, t + \phi). \quad (3)$$

Справедливость (3) подтверждается экспериментом [9].

Связь между амплитудой касательного напряжения на стенке  $\tau_{1m}$  и амплитудой колебаний скорости на оси трубы в случае однородного распределения скорости по длине трубы такова [9]:

$$\tau_{1m} = \frac{1}{2} \rho_0 f_w (u_{1m})^2. \quad (4)$$

В случае слаборазвитой турбулентности коэффициент трения на стенке  $f_w \approx 0,005$  [9]. Для того чтобы согласовать (3) и (4), положим

$$\tau_1(x, t) = \rho_0 \beta_0 u_1(x, t + \phi), \quad \beta_0 = \frac{\bar{V} \bar{f}_w}{2} \int_0^L \frac{u_{1m}(x)}{V} dx, \quad (5)$$

где коэффициент  $\beta_0$  учитывает тот факт, что при резонансных колебаниях газа в трубе амплитуда колебаний скорости  $u_{1m}$  зависит от  $x$ .

Прежде чем использовать (5) в (2), необходимо перейти от скорости на оси трубы  $u_1$  к осредненной по сечению скорости  $u_{1s}$  и учесть сдвиг фазы между колебаниями  $\tau_1$  на стенке и  $u_1$  на оси. В режиме слаборазвитой турбулентности профиль амплитуды колебаний скорости однороден всюду, за исключением слоя толщиной  $\delta_1$ , где распределение амплитуды колебаний скорости универсально, т. е.

$$\frac{u_{1m}}{u^*} = 2,5 \ln \left( \frac{R-r}{\nu} u^* \right) + 5. \quad (6)$$

Здесь  $u^* = (\tau_{1m}/\rho_0)^{1/2}$  — динамическая скорость;  $r$  — радиальная координата [9]. Толщина слоя  $\delta_1$ , как это следует из экспериментальных данных [9], может быть найдена по формуле

$$\frac{\delta_1}{R} = \frac{0,0154}{Sh}. \quad (7)$$

Используя (6), (7), имеем

$$u_{1s} = u_{1m} B, \quad B = 1 - (C \ln Re_\omega + D)/Sh, \quad (8)$$

где  $C \approx -0,00385$ ;  $D \approx 0,0546$ .

Для сдвига фазы  $\phi$  между  $\tau_1$  на стенке и  $u_1$  на оси трубы из данных [9] получим эмпирическую формулу

$$\phi = 0,838 - 0,891(Re_\omega \cdot 10^{-6}). \quad (9)$$

Учитывая (8), (9), запишем

$$\tau_1 = \rho_0 \beta \exp(i\phi) u_{1s}, \quad \beta = \beta_0/B. \quad (10)$$

Для оценки  $q_1$  положим

$$q_1 = -\beta_T p_1. \quad (11)$$

Толщины динамического и теплового пограничных слоев можно подсчитать по формулам

$$\delta_1 = \sqrt{2\mu_e/\rho_0\omega}, \quad \delta_{T1} = \sqrt{2\lambda_e/\rho_0 c_p \omega} \quad (12)$$

(индекс  $e$  означает эффективное значение). Так как  $\delta_1 \ll R$ ,  $\delta_{T1} \ll R$ , то в определениях

$$q_1 = \lambda_e \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_w, \quad \tau_1 = -\mu_e \left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_w$$

производные по  $r$  можно заменить отношениями приращений. Тогда из (10), (11) и условий на стенке трубы  $u_1(R) = 0$ ,  $T_1(R) = 0$  следует

$$\frac{\lambda_e T_{1m}}{\delta_{T1}} \approx \beta_T p_1, \quad \frac{\mu_e}{\delta_1} \approx \rho_0 \beta \exp(i\phi). \quad (13)$$

За пределами пограничного слоя, как это легко показать,  $p_1 \approx \rho_0 c_p T_{1m}$ . Тогда из (12), (13) получим

$$\beta_T = \beta \exp(i\phi) / \sqrt{Pr_t}. \quad (14)$$

В пограничном слое стационарных турбулентных течений турбулентное число Прандтля  $Pr_t \sim 0,9$  [15]. Будем считать это значение приемлемым и в нашем случае.

Перейдем в (2) к безразмерным переменным, полагая  $\bar{p}_1 = p_1/\rho_0 c_0^2$ ,  $\bar{u}_{1s} = u_{1s}/c_0$ . Тогда с учетом (10), (11), (14) запишем

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \bar{u}_{1s}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} = -a \bar{u}_{1s}, \quad \frac{1}{c_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_{1s}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{Pr_t}} a \bar{p}_1, \quad a = \frac{2\beta \exp(i\phi)}{Rc_0}. \quad (15)$$

Решения системы (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= r_1 \cos(kx + \alpha_1 + i\gamma_1) \exp[i(\omega t + \psi_1)], \\ \bar{u}_{1s} &= -ir_1 \mu_1 \sin(kx + \alpha_1 + i\gamma_1) \exp[i(\omega t + \varphi + \psi_1)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $r_1, \alpha_1, \gamma_1, \psi_1$  — действительные постоянные интегрирования;  $\mu_1 = |k/(k_0 - ia)|$ ;  $k_0 = \omega/c_0$ ;  $\varphi = \arg[k/(k_0 - ia)]$ ;

$$k^2 = k_0^2 \left[ 1 - i \frac{a}{k_0} \left( 1 + \frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{Pr_t}} \right) - \frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{Pr_t}} \frac{a^2}{k_0^2} \right]. \quad (17)$$

Так как  $a/k_0 \ll 1$ , то последним слагаемым в (17) можно пренебречь, т. е.

$$k \approx k_0 - ib, \quad b = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{Pr_t}} \right) = b_1 + ib_2, \quad (18)$$

где  $b_1 = (\beta/Rc_0)(1 + (\varepsilon - 1)/\sqrt{Pr_t}) \cos \phi$ ;  $b_2 = (\beta/Rc_0)(1 + (\varepsilon - 1)/\sqrt{Pr_t}) \sin \phi$ . Таким образом,  $k \approx k_0 + b_2 - ib_1$ ,  $b_1$  представляет собой поглощение,  $b_2$  — дисперсию.

Обратимся к граничным условиям. На конце, закрытом поршнем  $x = 0$ , должна быть задана скорость поршня

$$\bar{u}_{1s}(0, t) = -M_p \exp(i\omega t). \quad (19)$$

Рассмотрим течение на открытом конце ( $x = L$ ) трубы, снабженной бесконечным фланцем (рис. 1, а). Пусть на некотором расстоянии от выходного сечения внутри трубы (сечение  $AA'$ ) скорость меняется по закону

$$u = V \cos \omega t. \quad (20)$$

Примем модель [16, 17], предполагающую струйное истечение ( $u \geq 0$ ) и сферическое втекание ( $u \leq 0$ ) в сток, расположенный в точке  $O$ . Истекающий из трубы газ заключен в объем тела с образующими  $BE$  и  $BE'$ . Так как вблизи открытого конца (на расстояниях  $x < 6R$  [5]) слой смешения струи не успевает существенно развиться, площадь поперечного сечения струи остается практически неизменной и равной площади сечения трубы

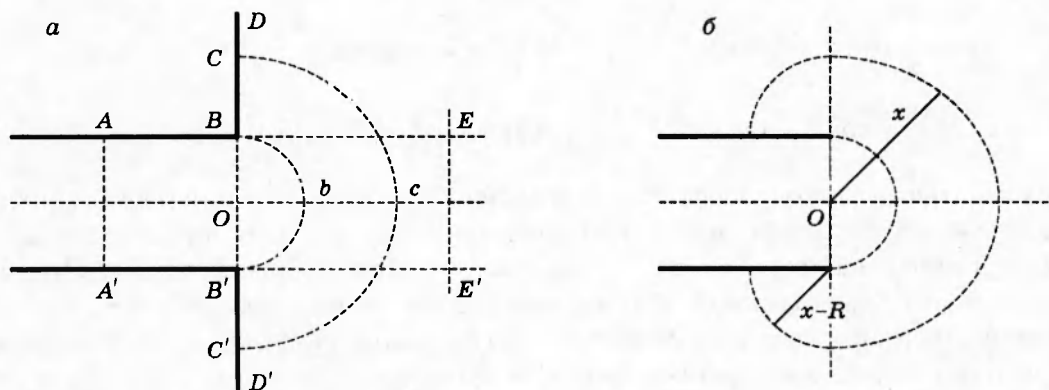


Рис. 1

$S_0$ . Тогда скорость газа также не зависит от  $x$ . Втекание в трубу происходит через полусферы  $BbB'$ ,  $CcC'$  и т. д. Роль вязких потерь в процессе всасывания незначительна [18]. Таким образом, можно принять, что втекание газа потенциально, а полусферы являются изотопами. Количество газа, пересекающего полусферы, остается неизменным, поэтому для полусферы произвольного радиуса  $x$  справедливо соотношение

$$u(x, t) = \Phi(x)u_{BbB'}(t) \quad (\Phi(x) = R^2/x^2) \quad (21)$$

( $u_{BbB'}(t)$  — скорость в точках полусферы  $BbB'$ , проведенной через кромки трубы ( $x = R$ )). В случае трубы без фланца (рис. 1, б)  $\Phi(x) = R^2/[x^2 + (x - R)^2 + (\pi/2)R(x - R)]$ .

Рассмотрим истечение через сечение  $BB'$  и всасывание через полусферу  $BbB'$ . В силу закона сохранения массы количество выбрасываемого через  $BB'$  газа должно компенсироваться его возвратом через  $BbB'$ , т. е.

$$S_0 \int_0^{t_1} u_{1s}(t) dt + S \int_{t_1}^T u_{BbB'}(t) dt = 0 \quad (22)$$

( $S = 2\pi R^2$ ). Так как  $S > S_0$ , то для выполнения (22) необходимо, чтобы длительность истечения  $t_1$  была больше длительности всасывания. Это возможно, если скорость содержит постоянную составляющую. Полагая, что последняя пропорциональна амплитуде колебаний скорости  $V$ , приходим к выражению [17]  $u = V(m_0 + \cos \omega t)$ ,  $x = R$ , где параметр  $m_0$  должен быть определен из условия (22).

Длительность истечения  $t_1$  находим из условия  $u = 0$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_{1s}(t) &= BV(m_0 + \cos \omega t), & -(\pi/2 + \theta) \leq \omega t \leq (\pi/2 + \theta), \\ u_{BbB'}(t) &= V(m_0 + \cos \omega t), & (\pi/2 + \theta) \leq \omega t \leq (3\pi/2 - \theta) \end{aligned} \quad (23)$$

( $\theta = \arcsin m_0$ ). Подставляя (23) в (22), получим

$$(B + 2)\pi m_0 + 2(B - 2)[m_0 \arcsin m_0 + \sin(\arccos m_0)] = 0. \quad (24)$$

Расчет показывает, что в условиях эксперимента [3]  $B \approx 0,93$ , тогда из (24) следует  $m_0 \approx 0,239$ .

Рассмотрим колебания частиц, пересекающих, например, сечение  $EE'$  (рис. 1, а), считая движение потенциальным. При истечении скорость определяется выражением (23), а при всасывании — выражением (21), в соответствии с которым она быстро убывает с ростом  $x$ . Разлагая  $u(t)$  в ряд Фурье, имеем

$$\begin{aligned} \bar{u} &= M_E \left\{ \left( \frac{m_0}{2 + a_0} \right) + \left( \frac{m_0}{2 - a_0} \right) \Phi(x) + \left[ \left( \frac{1}{2} + a_1 \right) + \left( \frac{1}{2} - a_1 \right) \Phi(x) \right] \cos \omega t + a_2 [1 - \Phi(x)] \cos 2\omega t + \dots \right\}, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} (m_0 \theta + \cos \theta), & a_1 &= \frac{1}{\pi} \left( \theta + 2m_0 \cos \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right), \\ a_2 &= \frac{1}{\pi} \left( \cos \theta - m_0 \sin 2\theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta \right), & M_E &= \frac{V}{c_0}, & \bar{u} &= \frac{u}{c_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

Анализ показывает, что существенные изменения  $\bar{u}$  при изменении расстояния  $x$ , более быстрые в случае трубы без фланца, заканчиваются при  $x \approx 3R$ . Начиная с  $x \approx 5R$ , состав колебаний перестает зависеть от  $x$  и геометрии открытого конца трубы. При  $x > 6R$  вязкость становится существенной. Эволюция пульсирующей струи подробно рассмотрена в [5]. Обозначим через  $\bar{u}_\infty$  скорость на достаточно большом расстоянии от открытого конца трубы, на котором еще можно пренебречь эффектами вязкости (пусть это справедливо для сечения  $EE'$ ). Тогда, полагая в (25)  $x \rightarrow \infty$ , запишем

$$\bar{u}_\infty = M_E [(m_0/2 + a_0) + (1/2 + a_1) \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots]. \quad (26)$$

Для потенциального течения, скорость в котором описывается выражением (25), можно использовать интеграл Лагранжа — Коши:

$$\frac{p}{\rho_0} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t), \tag{27}$$

где, согласно оценке, третий член имеет порядок  $Sh$ , т. е. им можно пренебречь. Применяя (27) к двум сечениям (например,  $AA'$  и  $EE'$ , рис. 1,а) и предполагая, что давление в сечении  $EE'$  равно атмосферному, а скорость определяется выражениями (20) и (27), после простых преобразований получим

$$\bar{p}_1(L, t) = m \bar{u}_{1s}^0 \bar{u}_{1s}(L, t), \quad m = m_1/B^2, \quad m_1 = (1/2 + a_1)(m_0/2 + a_0 + a_2/2) \tag{28}$$

( $\bar{u}_{1s}^0$  — амплитуда колебаний скорости, усредненной по сечению трубы, на открытом конце трубы). В условиях эксперимента [3]  $m_1 \approx 0,361$ .

Условие (28) нелинейное, как и в работах [3, 6–8, 11], но в отличие от использованных там вариантов оно выведено из модели течения вблизи открытого конца трубы без каких-либо полуэмпирических соображений.

Подставляя решения (16) в (19) и (28), получим систему уравнений для определения неизвестных констант:

$$\begin{aligned} r_1 \mu_1 \sin \alpha_1 \operatorname{ch} \gamma_1 &= \bar{M}_p \cos(\varphi + \psi_1), & r_1 \mu_1 \cos \alpha_1 \operatorname{sh} \gamma_1 &= -M_p \sin(\varphi + \psi_1), \\ \cos z \operatorname{ch} w &= m r_1 \mu_1^2 \sqrt{\sin^2 z + \operatorname{sh}^2 w} (\cos z \operatorname{sh} w \cos \varphi + \sin z \operatorname{ch} w \sin \varphi), \\ \sin z \operatorname{sh} w &= m r_1 \eta_1^2 \sqrt{\sin^2 z + \operatorname{sh}^2 w} (\sin z \operatorname{ch} w \cos \varphi - \cos z \operatorname{sh} w \sin \varphi). \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь  $z = (k_0 + b_2)L + \alpha_1$ ;  $w = \gamma_1 - b_1L$ . Система (29) легко решается при допущениях  $r_1 \ll 1$ ,  $\operatorname{sh} w \sim r_1$ ,  $\operatorname{ch} w \sim 1$ ,  $\mu_1 \sim 1$ , откуда  $\varphi_1 \ll 1$ . Выпишем решение в виде

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - (k_0 + b_2)L, \quad \gamma_1 = m r_1 + b_1L, \quad \sin(\varphi + \psi_1) = -\frac{r_1(m r_1 + b_1L) \sin(k_0 + b_2)L}{M_p}, \tag{30}$$

$$r_1 \sqrt{\cos^2(k_0 + b_2)L + (m r_1 + b_1L)^2 \sin^2(k_0 + b_2)L} = M_p,$$

откуда следует, что резонанс в системе наступает при  $(k_0 + b_2)L = \pi/2$ , т. е. имеет место сдвиг резонансной частоты, для которого из формул (5), (10) и (18) получим

$$\frac{\pi/2 - k_0L}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} b_2 \bar{L} = \frac{2}{\pi} \frac{f_w r_1}{3B} \frac{L}{R} \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{Pr_t}} \right) \sin \phi. \tag{31}$$

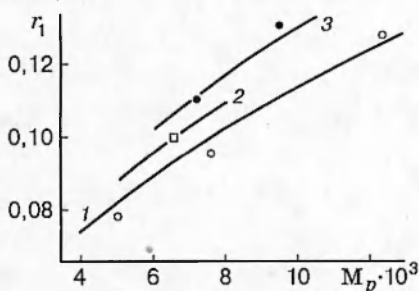


Рис. 2

$M_p \cdot 10^3$	$L/R$	$\Delta\omega/\omega_0$	
		Теория	Эксперимент
5	171	0,020	0,025
7,6	171	0,022	0,033
12,35	171	0,023	0,030
6,6	129	0,021	0,027
7,2	89	0,022	0,023
9,5	89	0,022	0,027

В условиях резонанса из (30) вытекает

$$r_1 = M_p^{1/2} \left[ m + \frac{f_w}{3B} \frac{L}{R} \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{Pr_t}} \right) \cos \phi \right]^{-1/2}, \quad (32)$$

где опять учтены (5), (10) и (18).

На рис. 2 изображены экспериментальные данные [3] (точки) и результаты расчета по (32) (линии). Видно, что совпадение данных вполне удовлетворительное: отклонение точек от зависимости (32) не превышает 5%. Расслоение данных обусловлено, как это следует из (32), изменением отношения  $L/R$  (кривые 1–3 соответствуют  $L/R = 171, 129, 89$ ).

Обсудим сдвиг резонансной частоты  $\Delta\omega/\omega_0$ , для которого получена формула (31). Прежде чем сравнивать значения, вычисленные из (31), с экспериментальными, нужно учесть так называемую концевую поправку к длине трубы, вызванную инерцией потока вблизи открытого конца [3], т. е. заменить в (31)  $L$  на  $L + \Delta R$ , где  $\Delta \sim 1$  [3]. Тогда для сдвига резонансной частоты запишем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2}{\pi} \frac{f_w r_1}{3B} \frac{L}{R} \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{Pr_t}} \right) \sin \phi + \Delta \frac{R}{L}.$$

Максимальное отклонение расчетных результатов от экспериментальных составляет 33% (см. таблицу).

Таким образом, можно утверждать, что предложенная в настоящей работе модель хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зарипов Р. Г. Нелинейные колебания газа в открытой трубе // Акуст. журн. 1977. Т. 23, № 3. С. 378–383.
2. Галиуллин Р. Г., Халимов Г. Г. Исследование колебаний газа в открытых трубах // Инж.-физ. журн. 1979. Т. 37, № 6. С. 1043–1050.
3. Stuhltrager E., Thoman H. Oscillations of a gas in an open-ended tube near resonance // ZAMP. 1986. V. 37. P. 155–175.
4. Репин В. Б., Новиков Ю. Н., Дементьев А. П. Экспериментальное исследование нелинейных колебаний газа в открытой трубе // Нестационарные задачи механики. Вып. 22. Казань: Изд-во КФТИ КФАН СССР, 1989. С. 103–110.
5. Галиуллин Р. Г., Пермьяков Е. И. Течение и теплообмен в нестационарной струе, генерируемой колебаниями газа большой амплитуды // Инж.-физ. журн. 1990. Т. 58, № 5. С. 747–752.
6. Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г. Термоакустический эффект в резонансной полуоткрытой трубе // Инж.-физ. журн. 1982. Т. 43, № 4. С. 615–623.
7. Keller J. J. Resonant oscillations in open tubes // ZAMP. 1977. V. 28. P. 237–263.
8. Chester W. Resonant oscillations of a gas in an open-ended tube // Proc. Roy. Soc. London. 1981. V. A377. P. 449–467.
9. Jensen B. L., Sumer B. M., Fredsoe J. Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1989. V. 206. P. 265–297.
10. Галиуллин Р. Г., Галиуллина Э. Р., Пермьяков Е. И. Граничное условие при резонансных колебаниях газа в полуоткрытой трубе // Внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика, диагностика: Тез. докл. на VII науч.-техн. семинаре, 24–25 мая 1995. Казань: Изд-во КВАКИУ, 1995. С. 75–77.

11. Галиуллин Р. Г., Пермяков Е. И. Влияние турбулентности на колебания газа большой амплитуды в полуоткрытой трубе // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 1. С. 25–28.
12. Галиуллин Р. Г., Пермяков Е. И. Резонансные колебания газа в закрытой трубе в случае турбулизации течения // Акуст. журн. 1993. Т. 39, № 5. С. 946–949.
13. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
14. Галицейский Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977.
15. Рейнольдс А. Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979.
16. Van Wijngaarden L. On the oscillations near and at resonance in open pipes // J. Eng. Math. 1968. V. 2. P. 225–240.
17. Галиуллин Р. Г., Пермяков Е. И. Нелинейные субгармонические колебания газа в полуоткрытой трубе // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 4. С. 733–735.
18. Hersch A. S., Rogers T. Fluid mechanical model of the acoustic impedance of small orifices // AIAA J. 1975. V. 495. P. 1–10.

*Поступила в редакцию 17/X 1996 г.*

---