ПМТФ, № 3, 1964

ОБ ОБЛАСТЯХ ПРИМЕНИМОСТИ РАЗЛИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА[1]

В. Б. Баранов

(Москва)

Коэффициенты переноса для полностью ионизованного газа вычислялись различными авторами из кинетической теории (см., например, [1,2]), опирающейся на уравнение Больцмана. Применимость этого уравнения для изучения поведения систем заряженных частиц нередко вызывает возражения в силу того, что оно обычно выводится в предположении о бинарности соударений частиц, в то время как кулоновские взаимодействия распространяются на расстояния, значительно превосходящие среднее расстояние между частицами, и соударения не являются бинарными. В [3] было выведено выражение для члена со столкновениями заряженных частиц, которое в дальнейшем получило название интеграла столкновений в форме Ландау, и было использовано в [2] для расчета коэффициентов переноса для плазмы. Однако вывод в [3] был также основан на предположении о бинарности соударений.

В [4] показано, что кинетическое уравнение Больцмана можно получить путем обрывания незамкнутой цепочки кинетических уравнений, полученной из уравнения Лиувилля для функции распределения f_N ($\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots \mathbf{p}_N, t$), зависящей от координат $\mathbf{q}_i$ и импульсов $\mathbf{p}_i$ всех N частиц, составляющих систему, и времени t, причем кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме Ландау было получено в предположении об однородности в пространстве и в случае отсутствия магнитного поля.

В работе, используя метод, предложенный Ю. Л. Климонтовичем[2], выписываются те ограничения, которые необходимо наложить на параметры плазмы, чтобы от уравнения Лиувилля для случайной функции числа частиц N_a ($\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, t) перейти путем осреднений к кинетическому уравнению Больцмана с интегралом столкновений в форме Ландау. Последнее было использовано в работе [2] для расчета коэффициентов переноса для плазмы, находящейся в сильном магнитном поле. На основе полученной системы неравенств в плоскости плотность — температура построена диаграмма областей, которая дает наглядное представление о возможности использования тех или иных уравнений для описания процессов в плазме, если известны параметры исследуемой системы (потенциал ионизации газа, плотность, температура, магнитное поле и т. д.). В упомянутой выше работе Ю. Л. Климонтовича показано, что для кулоновской плазмы цепочка уравнений, получающаяся в результате осреднения уравнения Лиувилля для случайной функции числа частиц N_a, эквивалентна цепочке уравнений Н. Н. Боголюбова [4].

Для случайной функции числа частиц

$$N_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ai}(t))\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{ai}(t))$$

где под знаком суммирования по всем частицам сорта a стоит произведение δ-функций Дирака, $N_a\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{p}$ — число частиц данного сорта в элементе шестимерного пространства координат $\mathbf{q}$ и импульсов $\mathbf{p}$, в случае отсутствия неупругих процессов справедливо уравнение Лиувилля.

---

[1] Из доклада на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Москва, январь 1964 г.

[2] Ю. Л. Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Докторская диссертация, Москва, 1962 г.

Для системы заряженных частиц оно записывается в виде [5-7]

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a\left(\mathbf{E}^m + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}^m\right)\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (1)$$

Здесь e_a — заряд частицы сорта a, $\mathbf{E}^m$ и $\mathbf{H}^m$ — микроскопические напряженности электрического и магнитного полей соответственно, для которых необходимо записать уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^m = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}^m}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sum_a e_a \int \mathbf{v}N_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\,d\mathbf{p}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^m = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}^m}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}^m = 0 \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^m = 4\pi\sum_a e_a \int N_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\,d\mathbf{p}$$

Система уравнений (1), (2) для случайных функций представляет замкнутую систему для описания поведения плазмы. Положим

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E} + \delta\mathbf{E}^m, \qquad \mathbf{H}^m = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}^m, \qquad N_a = \langle N_a\rangle + \delta N_a \qquad (3)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — средние электрическое и магнитное поля, как внешние, так и внутренние, удовлетворяющие осредненным уравнениям Максвелла, $\langle N_a\rangle$ — среднее статистическое значение числа частиц в единице фазового объема, совпадающее с функцией распределения, фигурирующей в уравнении Больцмана (здесь и в дальнейшем угловой скобкой будет обозначаться осреднение соответствующей величины по функции распределения, зависящей от координат и импульсов всех частиц, составляющих систему, а также от электрического и магнитного полей [8]), $\delta\mathbf{E}^m$, $\delta\mathbf{H}^m$ и δN_a — отклонения случайных величин от их среднего статистического значения.

В силу линейности уравнений Максвелла можно положить

$$\delta\mathbf{E}^m = \delta\mathbf{E}_1{}^m + \delta\mathbf{E}_2{}^m \qquad (4)$$

Здесь величина

$$\delta\mathbf{E}_1{}^m = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\sum_b\int\frac{e_b}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}\,\delta N_b(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)\,d\mathbf{q}'d\mathbf{p}' \qquad (5)$$

есть решение уравнений

$$\operatorname{rot}\delta\mathbf{E}_1{}^m = 0, \qquad \operatorname{div}\delta\mathbf{E}_1{}^m = 4\pi\sum_b e_b\int\delta N_b(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)\,d\mathbf{p}'$$

Величина $\delta\mathbf{E}_2{}^m$ в (4) представляет собой решение уравнений

$$\operatorname{rot}\delta\mathbf{E}_2{}^m = -\frac{1}{c}\frac{\partial\delta\mathbf{H}^m}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\delta\mathbf{E}_2{}^m = 0$$

Подставляя (3), (4) и (5) в (1) и осредняя полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{\partial\langle N_a\rangle}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\langle N_a\rangle}{\partial \mathbf{q}} + e_a\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)\frac{\partial\langle N_a\rangle}{\partial p} -$$

$$-\sum_b\int\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\left(\frac{e_a e_b}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\langle\delta N_a\delta N_b\rangle\,d\mathbf{q}'d\mathbf{p}' +$$

$$+ e_a\left\langle\left(\delta\mathbf{E}_2{}^m + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\delta\mathbf{H}^m\right)\frac{\partial\delta N_a}{\partial\mathbf{p}}\right\rangle = 0 \qquad (6)$$

Отсюда видно, что для того чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо записать уравнения для моментов $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle$, $\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_a \rangle$ и т. д., так как уравнения для средних величин **E** и **H** легко получить из осреднения системы уравнений (2). Чтобы получить уравнение для $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle$, вычтем из (1) уравнение (5). Тогда, с учетом (3), (4) и (5), получим

$$\frac{\partial \delta N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{p}} -$$

$$- \sum_b \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{e_a e_b}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\langle N_a \rangle \delta N_b + \delta N_a \delta N_b - \langle \delta N_a \delta N_b \rangle] d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' +$$

$$+ e_a \left(\delta \mathbf{E}_2{}^m + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{H}^m \right) \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mathbf{p}} + e_a \left(\delta \mathbf{E}_2{}^m + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{H}^m \right) \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{p}} -$$

$$- e_a \left\langle \left(\delta \mathbf{E}_2{}^m + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{H}^m \right) \frac{\partial \delta N_a}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = 0$$

Умножая это уравнение на δN_b, складывая его с аналогичным уравнением для δN_b, умноженным на δN_a, и осредняя, получим

$$\frac{\partial \langle \delta N_a \delta N_b \rangle}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'} \right) \langle \delta N_a \delta N_b \rangle + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \frac{\partial \langle \delta N_a \delta N_b \rangle}{\partial \mathbf{p}} +$$

$$+ e_b \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H} \right) \frac{\partial \langle \delta N_a \delta N_b \rangle}{\partial \mathbf{p}'} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \sum_c \int \frac{e_a e_c}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}''|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\langle N_a \rangle \langle \delta N_a \delta N_b \rangle +$$

$$+ \langle \delta N_a \delta N_b \delta N_c \rangle) d\mathbf{q}'' d\mathbf{p}'' - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'} \sum_c \int \frac{e_b e_c}{|\mathbf{q}' - \mathbf{q}''|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} (\langle N_b \rangle \langle \delta N_a \delta N_b \rangle +$$

$$+ \langle \delta N_a \delta N_b \delta N_c \rangle) d\mathbf{q}'' d\mathbf{p}'' + e_a (\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_b \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \langle \delta \mathbf{H}^m \delta N_b \rangle) \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mathbf{p}} +$$

$$+ e_b (\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_a \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \langle \delta \mathbf{H}^m \delta N_a \rangle) \frac{\partial \langle N_b \rangle}{\partial \mathbf{p}'} +$$

$$+ e_a \left\langle \left(\delta \mathbf{E}_2{}^m + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{H}^m \right) \frac{\partial \delta N_a \delta N_b}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle +$$

$$+ e_b \left\langle \left(\delta \mathbf{E}_2{}^m + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \delta \mathbf{H}^m \right) \frac{\partial \delta N_a \delta N_b}{\partial \mathbf{p}'} \right\rangle = 0 \qquad (7)$$

Таким образом, в уравнение для вторых моментов вошли моменты третьего порядка. В уравнение для моментов третьего порядка войдут моменты четвертого порядка и т. д. Получается незамкнутая цепочка уравнений. Чтобы замкнуть эту цепочку, необходимо на параметры плазмы наложить некоторые ограничения. Для простоты, что не нарушает общности, будем считать, что плазма состоит из двух сортов ионов, причем

$$T_a \approx T_b = T, \qquad |e_a| = |e_b| = e, \qquad n_a \approx n_b = n$$

Здесь T_a, T_b, n_a, n_b — температура и среднее число частиц в единице объема для соответствующего сорта частиц. Предположим, что

$$\mu = \frac{e^2}{r_d kT} \ll 1, \qquad r_d = \left(\frac{kT}{4\pi e^2 n} \right)^{1/2} \qquad (8)$$

Здесь r_d — дебаевский радиус экранирования, k — постоянная Больцмана. Умножая числитель и знаменатель (8) на $4\pi n$, получим, что условие (8) эквивалентно условию

$$\frac{1}{4\pi n r_d{}^3} \ll 1 \qquad (9)$$

т. е. внутри дебаевской сферы, в предположении (8), всегда должно быть много частиц.

Это условие дает возможность пренебречь моментами третьего порядка в уравнении (7) по сравнению с моментами второго порядка (см., так же, [4,9]) и тем самым замкнуть цепочку уравнений. Если воспользоваться некоторыми свойствами δ-функции, то можно получить формулы

$$\langle N_a \rangle = n_a^* f_a (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{10}$$

$$\langle N_a N_b \rangle = n_a^* n_b^* f_{ab} (\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}', t) + \delta_{ab} \delta (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta (\mathbf{p} - \mathbf{p}') n_a^* f_a$$

Здесь $\delta_{ab} = 1$ при $a = b$ и $\delta_{ab} = 0$ при $a \neq b$, n_a^* равно полному числу частиц сорта a в системе, деленному на объем V, занимаемый всей системой, и считается в дальнейшем постоянным числом (является лишь некоторым нормирующим множителем). Так как, кроме того,

$$\langle N_a N_b \rangle = \langle N_a \rangle \langle N_b \rangle + \langle \delta N_a \delta N_b \rangle \tag{11}$$

$$f_{ab} = f_a f_b + g_{ab} (\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$$

(здесь g_{ab} — функция корреляции, $g_{ab} \to 0$ при $|q - q'| \to \infty$), то

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle = \delta_{ab} \delta (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta (\mathbf{p} - \mathbf{p}') n_a^* f_a + n_a^* n_b^* g_{ab} (\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \tag{12}$$

Воспользовавшись предположением (8), а также соотношениями (10) — (12) и свойствами δ-функции, вместо уравнения (7) получим следующее уравнение для функции корреляции g_{ab}:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'}\right) g_{ab} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \sum_c n_c^* \int \frac{e_a e_c}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}''|} g_{bc} (\mathbf{q}', \mathbf{p}', \mathbf{q}'', \mathbf{p}'', t) d\mathbf{q}'' d\mathbf{p}'' \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'} \sum_c n_c^* \int \frac{e_b e_c}{|\mathbf{q}' - \mathbf{q}''|} g_{ac} (\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}'', t) d\mathbf{q}'' d\mathbf{p}'' \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} + \\ &\quad + e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) \frac{\partial g_{ab}}{\partial \mathbf{p}} + e_b \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H}\right) \frac{\partial g_{ab}}{\partial \mathbf{p}'} + \\ &\quad + \frac{e_a}{n_b^*} \left(\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_b \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \langle \delta \mathbf{H}^m \delta N_b \rangle\right) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} + \qquad (13) \\ &+ \frac{e_b}{n_a^*} \left(\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_a \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \langle \delta \mathbf{H}^m \delta N_a \rangle\right) \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{e_a e_b}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|}\right) \left\{\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} f_a\right\} \end{aligned}$$

Первые четыре члена слева и член справа входили в уравнение для функции корреляции в диссертации Ю. Л. Климонтовича. Остальные члены получились вследствие того, что учитывалось полное электромагнитное поле. Из сравнения в уравнении (13) члена $\mathbf{v} \partial g_{ab} / \partial \mathbf{q}$ с членом $e_a E \partial g_{ab} / \partial \mathbf{p}$ видно, что последним членом можно пренебречь, если выполнено условие

$$e_a |\mathbf{E}| r_d \ll m_a v^{\circ 2} \tag{14}$$

поскольку $|\partial g_{ab} / \partial \mathbf{q}| \sim g_{ab} / r_d$ (вследствие экранировки зарядов в плазме g_{ab} стремится к нулю при $r \to r_d$, где r — расстояние между двумя частицами). Здесь v° — тепловая скорость частицы (считаем, что порядок величины полной скорости частицы определяется ее тепловой скоростью). Из сравнения члена $\mathbf{v} \partial g_{ab} / \partial \mathbf{q}$ с членом $(e_a / c) \mathbf{v} \times \mathbf{H} \partial g_{ab} / \partial \mathbf{p}$ видно, что последним членом можно пренебречь при

$$r_d \ll r_l \qquad \left(r_l = \frac{m_a c v^\circ}{eH}\right) \tag{15}$$

где r_l — радиус ларморовской орбиты заряженной частицы. Аналогичные оценки для частиц сорта b. Оценим теперь еще некоторые члены в уравнении (13). Будем сравнивать член

$$-\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \sum_c n_c^* \int \frac{e_a e_c}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}''|} g_{bc}(\mathbf{q}', \mathbf{p}', \mathbf{q}'', \mathbf{p}'', t)\, d\mathbf{q}''\, d\mathbf{p}'' - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{e_a e_b}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}\right) f_b \right] \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e_a}{n_b^*} \langle \delta \mathbf{E}_1{}^m \delta N_b \rangle \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \qquad (16)$$

с членом

$$\frac{e_a}{n_b^*} \langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_b \rangle \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \qquad (17)$$

Предварительно выпишем уравнения Максвелла для отклонений случайных величин от их среднего статистического значения

$$\operatorname{rot} \delta \mathbf{H}^m = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{E}_1{}^m}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{E}_2{}^m}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a\, d\mathbf{p}$$

$$\operatorname{rot} \delta \mathbf{E}_2{}^m = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{H}^m}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \delta \mathbf{H}^m = 0 \qquad (18)$$

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{E}_1{}^m = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a\, d\mathbf{p}, \qquad \operatorname{div} \delta \mathbf{E}_2{}^m = 0$$

Умножая уравнения (18) на δN_b и осредняя, можно из полученных в результате уравнений определить порядки всех интересующих нас величин, если функции меняются достаточно плавно. Из четвертого уравнения (18)

$$\langle \delta \mathbf{E}_1{}^m \delta N_b \rangle \sim 4\pi e r_d \int \langle \delta N_a \delta N_b \rangle\, d\mathbf{p}$$

Из второго уравнения (18)

$$\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_b \rangle \sim \frac{v^\circ}{c} \langle \delta \mathbf{H}^m \delta N_b \rangle$$

Из первого уравнения (18)

$$\langle \delta \mathbf{H}^m \delta N_b \rangle \sim \frac{4\pi}{c} r_d e v^\circ \int \langle \delta N_a \delta N_b \rangle\, d\mathbf{p}, \quad \text{или}$$

$$\langle \delta \mathbf{E}_2{}^m \delta N_b \rangle \sim \frac{4\pi v^{\circ 2}}{c^2} r_d e \int \langle \delta N_a \delta N_b \rangle\, d\mathbf{p}$$

Используя эти оценки и взяв отношение (16) к (17), получим, что это отношение велико, и членом (17) можно пренебречь по сравнению с (16), если выполнено условие

$$v^{\circ 2} \ll c^2 \qquad (19)$$

т. е. должны считать, что газ нерелятивистский. Вместо уравнения (13), при выполнении неравенств (14), (15) и (19), будем иметь уравнение

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'}\right) g_{ab} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \sum_c n_c^* \int \frac{e_a e_c}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}''|} g_{bc} d\mathbf{q}'' d\mathbf{p}'' \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'} \sum_c n_c^* \int \frac{e_b e_c}{|\mathbf{q}'-\mathbf{q}''|} g_{ac}\, d\mathbf{q}''\, d\mathbf{p}'' \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{e_a e_b}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}\right) \left\{\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} f_a\right\} \quad (20)$$

совпадающее с уравнением, полученным Ю. Л. Климонтовичем.

Для случая пространственно однородной плазмы это уравнение ранее выписано в работе [4].

Проведя аналогичные оценки в уравнении (6) и воспользовавшись первой формулой (10) и формулой (12), вместо (6) получим (21)

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{q}} + e_a\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = \sum_b n_b{}^* \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{e_a e_b}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}\right)\frac{\partial g_{ab}}{\partial \mathbf{p}}\, d\mathbf{q}'\, d\mathbf{p}'$$

Для получения кинетического уравнения для первой функции распределения необходимо решить уравнение (20) для функции корреляции и подставить это решение в правую часть уравнения (21). Чтобы из (20) получить решение, приводящее правую часть уравнения (21) к виду интеграла столкновений в форме Ландау, необходимо, как показано в работе Ю. Л. Климонтовича (см. сноску на стр. 52), сделать еще некоторые предположения.

Пусть функция распределения f_a мало меняется за время корреляции (соответственно на длине корреляции), т. е. рассматриваются характерные времена t (длины l), много большие времени корреляции τ_k (длин корреляции r_k), за которые две частицы, находящиеся вблизи одна от другой и двигающиеся с тепловой скоростью, разойдутся на расстояние r_k, на котором эти две частицы становятся статистически независимы (не взаимодействуют между собой).

Из решения уравнения (20) для случая равновесного распределения частиц по скоростям следует, что для этого случая

$$r_k \sim r_d, \quad \tau_k \sim r_d \,/\, v^\circ = 1 \,/\, \omega_0$$

(здесь ω_0 — частота ленгмюровских колебаний), так как при

$$r \to r_d \quad (r = |\mathbf{q}-\mathbf{q}'|), \qquad f_{ab} \to f_a f_b \qquad (g_{ab} \to 0)$$

Это также следует из теории Дебая — Хюккеля для электролитов. При решении кинетических уравнений обычно всегда проводится линеаризация вокруг равновесного распределения, т. е. рассматривается малое отклонение от равновесия. Вследствие этого можно считать, что τ_k мало отличается от $r_d \,/\, v^\circ = 1 \,/\, \omega_0$, а r_k мало отличается от r_d. Таким образом, вводя характерную частоту задачи $\Omega = 1 \,/\, t$, делаем предположение

$$\frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1 \qquad (22)$$

при котором в (20) можно опустить член $\partial g_{ab} \,/\, \partial t$, так как в силу (22) начальные корреляции успевают затухнуть за рассматриваемое характерное время. Применив к уравнению (20) преобразование Фурье и сделав предположение

$$k^2 r_d{}^2 \gg 1 \qquad (23)$$

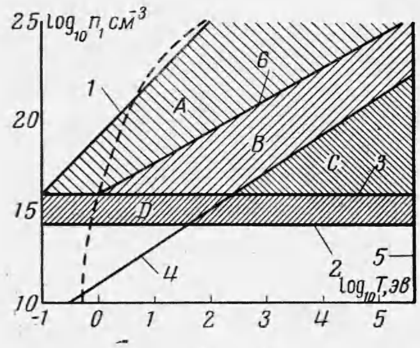
(k — величина, обратная длине волнового вектора), которое означает, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$ (см. например, [10]), в результате получим уравнение для функции корреляции, решение которого, будучи подставленное в правую часть уравнения (21), приводит к интегралу столкновений в форме Ландау. Если переходить к уравнениям сплошной среды, используя уравнение Больцмана, то необходимо рассматривать характерные времена, много большие τ° — времени установления равновесного состояния, порядок величины которого определяется порядком величины времени свободного пробега частиц и равен $r_d \,/\, \mu v^\circ$, где μ — плазменный параметр, определяемый формулой (8). Считая $l^\circ \sim v^\circ \tau^\circ$ (l° — так называемая длина установления), для перехода к сплошной среде должны предположить, что $l^\circ \ll L$ (L — характерный размер), т. е.

$$\frac{r_d}{\mu L} \ll 1 \tag{24}$$

Система неравенств (8), (14), (15), (19), (22) и (23) приводит к тому, что для описания процессов в плазме с параметрами, удовлетворяющими этим неравенствам, можно пользоваться замкнутой системой уравнений, состоящей из кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме Ландау и уравнений Максвелла для электромагнитного поля, причем функция $\langle N_a \rangle = n_a^* f_a$ соответствует первой функции распределения, обычно фигурирующей в уравнении Больцмана.

Для перехода к магнитогидродинамическим уравнениям [2] необходимо сделать предположение (24).

На диаграмме, выполненной в тех же координатах, что и известная диаграмма Кантровица и Петчека [11], изображены области, в которых выполняются те или иные неравенства. По оси абсцисс отложен десятичный логарифм температуры, выраженной в электрон-вольтах, а по оси ординат — десятичный логарифм плотности электронов. За характерную длину взята величина $L = 10$ *см*, за порядок величины электрического поля E взята величина $E \sim v^\circ H / c$, т. е. максимально возможная величина разделения зарядов при движении среды относительно магнитного поля. Ниже прямой *1* удовлетворяется неравенство (8), выше прямой *2* — неравенство (14), а выше *3* — неравенство (15) (для двух последних прямых $H = 10_э^5$, если же поле меньше, то эти неравенства в отмеченных областях и подавно удовлетворяются).



Фиг. 1

Выше *4* — условие сплошности среды (24), левее *5* — условие (19), пунктирная линия соответствует термической ионизации водорода (правее — более 50% ионизации), причем для газов с меньшим, чем у водорода, потенциалом ионизации эта линия смещается влево.

Прямая *6* соответствует $\omega_e \tau_e = 1$ (ω_e — циклотронная частота вращения электронов, τ_e — «время свободного пробега» электронов, $\tau_e \sim \tau^\circ$ для полностью ионизованного газа, $H = 10_э^4$ для этой прямой).

Область A соответствует классической магнитной гидродинамике ($\omega_e \tau_e \ll 1$). Область B соответствует магнитной гидродинамике с анизотропными свойствами переноса [12, 13]. Если будем находиться в области C, то для описания процессов в плазме нужно пользоваться кинетическим уравнением Больцмана с интегралом столкновений в форме Ландау. Область D соответствует кинетическому уравнению с интегралом столкновений, зависящим от магнитного поля [14, 15]. Неравенство (22) не отмечено на диаграмме, так как считаем его всегда выполненным.

С уменьшением магнитного поля прямые *2* и *3* сдвигаются вниз и соответственно увеличиваются области A, B и C. В области C вдали от прямой *4* можно пренебречь интегралом столкновений, так как будет выполнено условие $l^\circ \gg L$, и для описания процессов в плазме можно пользоваться уравнениями самосогласованного поля А. А. Власова [16]. Вблизи прямой *4* интеграл столкновений необходимо учитывать. Обобщение на релятивистскую плазму содержится в [8].

В заключение автор благодарит Ю. Л. Климонтовича, А. Г. Куликовского, Н. Н. Широкова за ценные советы и обсуждения.

Поступила 20 II 1964

Замечание при корректуре. Следует заметить, что предположение (23) приводит к расходимости интеграла столкновений на бесконечности. В работе [3] эта расходимость устранялась путем обрезания интеграла столкновений на расстояниях $\sim r_d$.

Таким образом, предположение (23) приводит к пренебрежению взаимодействием электронов с плазменными колебаниями, а также их влиянием на коэффициенты переноса [2].

В последнее время появилась работа [17], в которой выявлено влияние этих взаимодействий на коэффициенты переноса для полностью ионизованного газа. Показано, что в случае, когда температуры электронов и ионов сравнимы, учет взаимодействий электронов с плазменными колебаниями приводит лишь к малым поправкам в коэффициентах переноса, которыми, вообще говоря, можно пренебречь. При достаточно сильной неизотермичности плазмы эти взаимодействия играют определяющую роль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
2. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы, 1963, вып. 1.
3. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение при кулоновском взаимодействии. Ж. эксперим. и теор. физ., 1937, т. 7, стр. 203.
4. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, 1946.
5. Климонтович Ю. Л. Вторичное квантование в фазовом пространстве. Докл. АН СССР, 1954, т. 96, 43.
6. Климонтович Ю. Л. О методе вторичного квантования в фазовом пространстве. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 33, № 4.
7. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. К теории флуктуации распределения частиц в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 43, № 1.
8. Климонтович Ю. Л. Релятивистские кинетические уравнения для плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, т. 37, № 3.
9. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. Об устойчивости высших корреляционных функций в плазме. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 4.
10. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Госатомиздат, 1961.
11. Магнитная гидродинамика. ИЛ, 1958 (Сб. пер. под ред. Франк-Каменецкого Д. А.).
12. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Уравнения магнитной плазмодинамики. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 9.
13. Баранов В. Б. К выводу уравнений анизотропной магнитной гидродинамики. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
14. Беляев С. Т. Кинетика ионизованного газа в сильном магнитном поле. Физ. плазмы и пробл. управл. термоядерных реакций. Изд. АН СССР, 1958, т. III.
15. Елеонский В. М., Зырянов П. С., Силин В. П. Интеграл столкновений заряженных частиц в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 3.
16. Власов А. А. Теория многих чисел. Гостехиздат, 1950.
17. Горбунов Л. М., Силин В. П. Теория явлений переноса в неизотермической полностью ионизованной плазме. Ж. техн. физ., 1964, т. XXXIV, вып. 3.