

УДК 533; 517.958

ОДНОРОДНЫЙ ОСОБЫЙ ВИХРЬ

А. А. Черевко, А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Дано аналитическое описание сферически частично инвариантного решения уравнений газовой динамики при наличии дополнительной симметрии — однородного особого вихря. Решение задавалось обобщенным потенциалом — вспомогательной функцией, удовлетворяющей неоднородному уравнению Шварца. Доказано, что часть факторсистемы однородного особого вихря в лагранжевом представлении, определяющая кинематику частицы газа, является системой линейных уравнений с потенциалом, задаваемым решением уравнения Шварца. Для частных значений показателя адиабаты, равных 1, $4/3$, $5/3$, получены представления решения уравнения Шварца в терминах уравнений меньшего порядка. Описано изотермическое движение газа в однородном особом вихре. Показано, что возможно существование периодической геометрической конфигурации траекторий, однако плотность газа при этом имеет сингулярность. Физически определенное решение существует на интервалах времени, не содержащих точек сингулярности. Приведены примеры движений, полученные реализацией на компьютере аналитических формул.

Ключевые слова: сферически частично инвариантные решения, однородный особый вихрь, уравнение Шварца, периодические конфигурации.

Введение. Точные решения в гидро- и газодинамике, порожденные группой вращений, представляют большой интерес в силу их высокой симметрии. Классические сферически симметричные решения и их приложения к решению конкретных газодинамических задач описаны во многих монографиях и учебниках (см., например, [1–3]).

В [4] Л. В. Овсянников открыл новый класс решений, порождаемых группой вращений $SO(3)$, названный им особым вихрем (ОВ). Эти решения относятся к регулярным частично инвариантным решениям (РЕЧИР) уравнений газовой динамики (или гидродинамики). Часть функций, а именно радиальная и модуль касательной компоненты скорости, а также все термодинамические параметры (давление, плотность и энтропия) являются сферически симметричными, т. е. представляют собой инварианты группы вращений в пространстве независимых переменных и скоростей $\mathbb{R}^6(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Однако вектор скорости в отличие от сферически симметричных решений имеет ненулевую касательную компоненту, и угол отклонения ее от меридиана — величина $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$ — является функцией всех независимых переменных. На языке группового анализа дифференциальных уравнений ω называется лишней функцией [5]. Таким образом, ОВ представляет собой РЕЧИР дефекта 1 и ранга 2 — инвариантными независимыми переменными являются время t и модуль радиуса вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В [4] было доказано существование решений такого вида, получены некоторые свойства и построен ряд примеров. В качестве одной из главных задач дальнейшего исследования решений такого типа была выделена задача описания радиального движения газа, т. е. анализ инвариантной системы полной фактор-

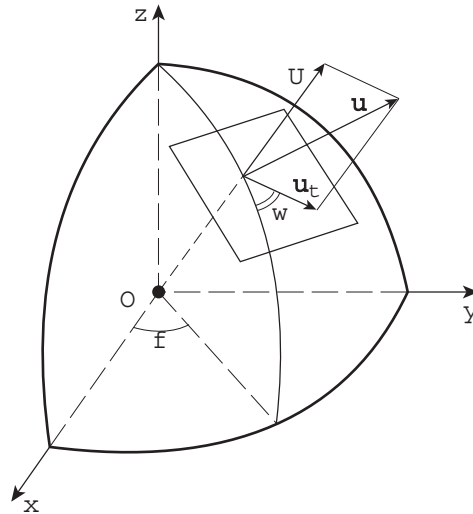


Рис. 1. Представление вектора скорости в особом вихре

системы. Изучение ОВ было продолжено в [6], где доказано специальное свойство матрицы Якоби векторного поля скоростей ОВ и исследованы две инвариантные подмодели ОВ, т. е. решения, обладающие дополнительной, помимо группы вращений, симметрией. ОВ представляет собой содержательный класс физически интересных решений, его анализ достаточно сложен.

Данная работа продолжает аналитическое исследование однородного особого вихря (ООВ) — ОВ, обладающего дополнительной симметрией относительно некоторой группы растяжений.

Определяющим свойством РЕЧИР является возможность их описания в терминах решения ключевого уравнения для вспомогательной функции — своеобразного аналога потенциала решения [7]. Все параметры решения определяются через эту функцию и ее производные. Для ООВ ключевое уравнение является неоднородным уравнением Шварца (УШ).

1. Модель особого вихря [4]. Для описания модели ОВ вводятся сферические координаты (r, θ, φ) , кроме того, используются полярные координаты (H, ω) для касательной компоненты скорости $\mathbf{u}_\tau = (V, W)$,

$$V = H \cos \omega, \quad W = H \sin \omega. \quad (1.1)$$

В (1.1) $H = |\mathbf{u}_\tau| = \sqrt{V^2 + W^2}$; ω — угол, образуемый вектором \mathbf{u}_τ с меридианом (рис. 1).

ОВ является регулярным частично инвариантным решением типа (2,1) уравнений газовой динамики (УГД) со следующим представлением решения:

$$\begin{aligned} U &= U(t, r), & H &= H(t, r), \\ \rho &= \rho(t, r), & p &= p(t, r), & \omega &= \omega(t, r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Инвариантными независимыми переменными являются r, t , инвариантными функциями — термодинамические переменные ρ, p, S , радиальная компонента скорости U и модуль касательной компоненты H . Лишней функцией, зависящей от всех независимых переменных, является угол ω . При исследовании ОВ предполагается, что $H \neq 0$, иначе ОВ превращается в классическое сферически симметричное решение.

Согласно общей схеме [5] уравнения газовой динамики на РЕЧИР (1.2) распадаются на две подсистемы: инвариантную

$$\begin{aligned} D_0 U + \rho^{-1} p_r &= r^{-1} H^2, \\ D_0(rH) &= 0, \quad D_0 S = 0, \quad p = f(\rho, S), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $D_0 = \partial_t + U \partial_r$, функция f задает уравнение состояния газа, и переопределенную систему для лишней функции

$$\begin{aligned} k \sin \theta D_0 \omega + \sin \theta \cos \omega \omega_\theta + \sin \omega \omega_\varphi &= -\cos \theta \sin \omega, \\ \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi &= \cos \theta \cos \omega + h \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.4)$$

в которой введены следующие инвариантные функции:

$$k = r/H, \quad h = k(D_0 \ln \rho + r^{-2}(r^2 U)_r). \quad (1.5)$$

Условия совместности системы (1.4) выписываются в терминах (1.5)

$$k D_0 h = h^2 + 1 \quad (1.6)$$

и дополняют инвариантную подсистему (1.3) до замкнутой.

Система (1.4) проинтегрирована в [4] в конечном виде на решениях системы (1.3), (1.6). Ее общее решение задается соотношением

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad (1.7)$$

где F — произвольная гладкая функция; ξ — инвариантная лагранжева переменная

$$D_0 \xi = 0; \quad (1.8)$$

величина η имеет вид

$$\eta = \cos \tau \sin \theta \cos \omega - \sin \tau \cos \theta, \quad (1.9)$$

а ζ задается неявно соотношением

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin(\zeta + \varphi) = \cos \tau \cos \theta \cos \omega + \sin \tau \sin \theta. \quad (1.10)$$

Функция τ определяется формулой $h = \operatorname{tg} \tau$ так, что $k D_0 \tau = 1$.

Основной задачей является исследование системы (1.3), (1.5), (1.6), описывающей радиальное движение газа.

Матрица Якоби векторного поля скоростей ОВ

$$J = (\nabla_i u_j), \quad (1.11)$$

вычисленная в сферических координатах так, что ∇_i — ковариантные производные по r , θ , φ , имеет алгебраические инварианты и собственные значения, зависящие только от инвариантных переменных t , r . Отсюда следует, что ОВ порождается специальными начальными данными, в которых матрица Якоби (1.11), вычисленная при $t = 0$, имеет алгебраические инварианты и собственные значения, зависящие только от r , в то время как начальные компоненты скорости $V_0 = V|_{t=0}$ и $W_0 = W|_{t=0}$ зависят, вообще говоря, от всех независимых переменных r , θ , φ .

2. Однородный особый вихрь [6]. Модель ОВ допускает некоторую группу симметрии. Можно строить ее инвариантные решения по этой группе. Рассмотрим инвариантную подмодель, порождаемую алгеброй $L_4 = \langle so(3), K \rangle$, где оператор растяжения K имеет вид

$$K = r \partial_r + U \partial_U + H \partial_H + \alpha \rho \partial_\rho + (\alpha + 2) p \partial_p \quad (2.1)$$

с произвольным вещественным параметром α . Эта алгебра L_4 задает РЕЧИР типа (1,1), инвариантной независимой переменной является время t . Соответствующую подмодель можно строить двумя способами: за один шаг, как РЕЧИР типа (1,1) уравнений газовой динамики, либо в два шага, рассматривая K -инвариантную подмодель ОВ. Результат бу-

дет одним и тем же, в этом случае лемма ЛОТ (Ли — Овсянников — Тальшев) [8] об эквивалентности многошагового и одношагового алгоритмов построения решений распространяется и на частично инвариантные решения [6].

Представление L_4 — РЕЧИР, определяемое (2.1), имеет вид

$$\begin{aligned} U &= A(t)r, & H &= C(t)r, & \rho &= r^\alpha R(t), \\ p &= r^{\alpha+2}P(t), & c^2 &= \gamma r^2 B(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $c^2 = \gamma p/\rho$ — квадрат скорости звука. Все функции A, B, C, P, R в (2.2) выражаются через вспомогательную функцию $h = h(t)$ — своеобразный потенциал решения — и ее производные по формулам

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{|h'|}{1+h^2} \right)', & B &= B_0(1+h^2)^{-\gamma} |h'|^{(3\gamma-1)/2}, \\ C &= (1+h^2)^{-1} h', & R &= R_0(1+h^2)^{-(\alpha+2)/2} |h'|^{(\alpha+3)/2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\gamma \geq 1$ — показатель адиабаты; $B_0, R_0 > 0$ — постоянные; $B = R^{-1}P$.

Функция h удовлетворяет неоднородному уравнению Шварца

$$\{h\} \equiv \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 = \beta_0 \frac{|h'|^{(3\gamma-1)/2}}{(1+h^2)^\gamma}, \quad (2.4)$$

где

$$\beta_0 = 2(\alpha + 2)B_0. \quad (2.5)$$

В дальнейшем наряду с h будет использоваться функция τ , связанная с ней соотношением

$$h = \operatorname{tg} \tau, \quad \tau = \operatorname{arctg} h. \quad (2.6)$$

Представление (2.3) в терминах τ принимает вид

$$\begin{aligned} A &= -\tau''/(2\tau'), & B &= B_0 |\cos \tau|^{1-\gamma} |\tau'|^{(3\gamma-1)/2}, \\ C &= \tau', & R &= R_0 |\cos \tau|^{-1} |\tau'|^{(\alpha+3)/2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнение Шварца (2.4) при замене (2.6) вновь переходит в уравнение Шварца, но с преобразованной правой частью

$$\{\tau\} = \beta_0 |\tau'|^{(3\gamma-1)/2} / |\cos \tau|^{\gamma-1} - 2\tau'^2. \quad (2.8)$$

Алгебраические инварианты k_i и собственные значения λ_i ($i = 1, 2, 3$) матрицы Якоби (1.11) векторного поля скоростей в ООВ зависят только от времени и представляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= 3A - hC, & k_2 &= 3A^2 - 2hAC + C^2, & k_3 &= A^3 - hA^2C + C^2A - hC^3, \\ \lambda_1 &= A - hC, & \lambda_{2,3} &= A \pm iC. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Любопытно отметить, что согласно (2.9) матрица J имеет комплексно-сопряженные собственные значения.

Таким образом, исследование ООВ свелось к исследованию решения неоднородного УШ (2.4). Ниже (см. п. 7) приведем ряд случаев, когда удастся эффективно провести его интегрирование, но вначале опишем кинематику ООВ.

3. Уравнения ООВ в лагранжевых координатах. Из формул (2.2) для ООВ следует, что

$$\rho^{-1} \nabla p = (\alpha + 2) B \mathbf{x}. \quad (3.1)$$

Подставляя представление (3.1) в уравнения импульсов УГД в лагранжевом описании, получим систему линейных обыкновенных уравнений

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + q(t)\mathbf{x} = 0 \tag{3.2}$$

с потенциалом

$$q(t) = (\alpha + 2)B(t). \tag{3.3}$$

Система (3.2) дополняется начальными данными

$$\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \tag{3.4}$$

определяющими начальные распределение газа и поле скоростей (\mathbf{x}_0 — лагранжевы координаты частиц газа). Из специального свойства матрицы Якоби J_0 для ООВ, описанного в пп. 1, 2, следует, что ее алгебраические инварианты и собственные значения (2.9) при $t = 0$ являются постоянными.

Система (3.2) дополняется уравнениями неразрывности и энергии, которые выполнены в силу представления решения (2.2) и уравнения (2.4). Действительно, в силу (2.9) в этих уравнениях $\operatorname{div} \mathbf{u} = k_1(t)$, и они интегрируются, давая представление (2.2) [6].

Лемма 1. *Кинематика ООВ описывается системой линейных уравнений (3.2) с начальными данными (3.4). Потенциал (3.3) и термодинамические параметры решения определяются представлением (2.2) и уравнением (2.4).*

Отметим аналогию с ООВ в идеальной жидкости [9].

4. Интеграл уравнений (3.2).

Лемма 2. *Система (3.2) имеет интеграл*

$$\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{x}_0 \times \mathbf{u}_0. \tag{4.1}$$

Движение каждой частицы газа в ООВ происходит в плоскости Π , задаваемой вектором \mathbf{M}_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим производную вектора \mathbf{M}_0 в силу уравнений (4.1)

$$\frac{d\mathbf{M}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x} \times \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -q(t)\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0. \tag{4.2}$$

Имеется очевидная аналогия с интегралом площадей в классической механике частицы [10]. Подчеркнем, что каждая частица движется в своей плоскости, происходит расслоение пространства событий на такие плоскости.

5. Редукция уравнений движения к уравнению Ермакова. Отмеченная аналогия с классической механикой может быть развита и дальше. Но в отличие от классической механики для газовой динамики получается описание движения отдельной частицы газа. В дальнейшем необходимо описание согласованного движения сплошной среды, состоящей из ансамбля таких частиц. Кроме того, описание решения не сводится только к системе (2.2) — термодинамика среды задается представлением (2.3).

Вращением в пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$ приведем плоскость Π движения выбранной частицы газа к виду $z = 0$. Тогда интеграл (4.1) принимает вид

$$\Pi: \quad z = 0, \quad xy' - yx' = l_0, \tag{5.1}$$

где (x, y) — декартовы координаты в плоскости Π ; $l_0 = l_0(\mathbf{x})$ — функция лагранжевых координат.

Подчеркнем, что (4.1) имеет вид (5.1) лишь для одной выбранной частицы газа.

Перейдем в плоскости Π к полярным координатам

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi. \quad (5.2)$$

Заметим, что r совпадает с величиной $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (инвариантность относительно вращения). Тогда уравнения системы (3.2) сводятся к следующим:

$$r'' - r\psi'^2 + qr = 0, \quad r\psi'' + 2r'\psi' = 0. \quad (5.3)$$

Второе уравнение (5.3) интегрируется, давая

$$r^2\psi' = l_0. \quad (5.4)$$

Это интеграл площадей из классической механики [10]. Подстановка ψ' из (5.4) в первое уравнение (5.3) приводит к уравнению Ермакова [11]

$$r'' + q(t)r = l_0^2/r^3 \quad (5.5)$$

с потенциалом (3.3).

Лемма 3. *Кинематика ООВ в плоскости движения частицы газа, задаваемой уравнением $z = 0$, описывается уравнениями (5.4) и (5.5).*

Этот результат является непосредственным следствием механической аналогии. Менее очевидно следующее утверждение.

Лемма 4. *Система уравнений (5.4), (5.5) эквивалентна уравнению Шварца (2.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим r из (5.4). Имеем (предположив, что $l_0 > 0, \psi' > 0$)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{l_0} (\psi')^{-1/2}, & r' &= -\sqrt{l_0} (\psi')^{-3/2} \psi'' / 2, \\ r'' &= -\sqrt{l_0} ((\psi')^{-3/2} \psi''' - 3(\psi')^{-5/2} \psi''^2 / 2) / 2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляем r'' из (5.6) и r из (5.4) в (5.5). После упрощения получим

$$\{\psi\} = 2q(t) - 2\psi'^2. \quad (5.7)$$

Сопоставляя формулу (3.3) для $q(t)$ и представление (2.7) для $B(t)$, приходим к УШ (2.8) для функции ψ .

Следствие. *Вспомогательная функция τ , определенная формулой (2.6), имеет непосредственный физический смысл: она совпадает с полярным углом, описывающим движение частицы газа в плоскости $z = 0$.*

Отсюда следует важный вывод. Уравнение Шварца (2.8) непосредственно описывает кинематику частицы газа.

Для описания движения газа в ООВ нужно уметь интегрировать УШ (2.8). Подобных результатов имеется немного [12, 13], приведем некоторые новые (см. п. 7).

6. Уравнения траекторий. Проинтегрируем уравнения траекторий в ООВ для движений газа, в которых $\omega_\varphi = 0$. Тогда остается только первый из интегралов (1.9), (1.10). Формула общего решения (1.7) принимает вид

$$\cos \omega = \frac{F(\xi)}{\cos \tau \sin \theta} + \operatorname{tg} \tau \operatorname{ctg} \theta, \quad (6.1)$$

где $\xi = r^2 \tau'$ — лагранжева координата (1.8) в ООВ; F — произвольная функция. Уравнения траекторий имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2} (\ln \tau')' r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \tau' \cos \omega, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau' \sin \omega}{\sin \theta}. \quad (6.2)$$

Первое уравнение (6.2) дает интеграл площадей (3.4) или, в других терминах, представление для лагранжевой координаты ξ . Подставляя во второе уравнение (6.2) выражение (6.1), получим линейное уравнение относительно величины $\psi = \cos \theta$

$$\frac{d\psi}{d\tau} + \psi \operatorname{tg} \tau + \frac{F}{\cos \tau} = 0,$$

общее решение которого можно записать в виде

$$\begin{aligned} \cos \theta &= A_0 \cos \delta, \\ \delta &= \tau + \alpha_0, \quad A_0 = \sqrt{k_0^2 + F^2}, \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}(F/k_0), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где k_0 — константа интегрирования. Из (6.3) следует неравенство

$$0 \leq A_0 \leq 1.$$

Переписывая третье уравнение (6.2) в виде

$$d\varphi = \frac{\sin \omega}{\sin \theta} d\tau$$

и подставляя в него значение

$$\sin \omega = \sqrt{1 - A_0^2} / \sin \theta,$$

полученное из (6.1) с учетом (6.3), приходим к интегралу

$$\varphi = \sqrt{1 - A_0^2} \int \frac{d\tau}{\sin^2 \theta} = \sqrt{1 - A_0^2} \int \frac{d\delta}{1 - A_0^2 \cos^2 \delta},$$

который берется в следующем виде

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \delta / \sqrt{1 - A_0^2}). \tag{6.4}$$

В представлениях декартовых координат через сферические можно упростить выражения $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ для угла φ , задаваемого (6.4). Окончательные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{1 - A_0^2 \cos^2 \delta} \left(\frac{1 - A_0^2}{1 - A_0^2 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)^{1/2}, \quad y = r \sqrt{1 - A_0^2 \cos^2 \delta} \frac{\operatorname{tg} \delta}{(1 - A_0^2 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{1/2}}, \\ z &= r A_0 \cos \delta, \quad \delta = \tau + \alpha_0, \quad 0 \leq A_0 \leq 1. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Функция $\tau = \tau(t)$ является решением УШ (2.8).

7. Интегрирование УШ для частных значений γ . Рассмотрим изотермический газ, для которого $\gamma = 1$. В этом случае $p = S\rho$, скорость звука $c^2 = S$ сохраняется вдоль траектории. Уравнение (2.8) принимает вид

$$\{\tau\} = \beta_0 \tau' - 2\tau'^2, \tag{7.1}$$

где β_0 задана формулой (2.5). Обозначим $\tau' = X$, тогда числитель левой части (7.1) имеет представление

$$2X X'' - 3X'^2 = \frac{X^4}{X'} \left(\frac{X'^2}{X^3} \right)'$$

Уравнение (7.1) преобразуется к виду

$$\left(\frac{X'^2}{X^3} \right)' = \frac{2X'}{X} (\beta_0 - 2X)$$

и интегрируется один раз. Получается *ключевое уравнение* для $X = X(t)$

$$X'^2 = X^3(\beta_0 \ln X^2 - 4X + C), \quad (7.2)$$

где C — произвольная постоянная.

Пусть $\gamma = 4/3$. Тогда уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{2h'h''' - 3h''^2}{2h'^2} = \frac{\beta_0|h'|^{3/2}}{(1+h^2)^{4/3}}. \quad (7.3)$$

Порядок уравнения (7.3) понижается введением новой функции $X = X(h)$ так, что $h' = X(h)$ (далее в п. 7 штрих означает дифференцирование по h). Подставив X в (7.3), получим

$$2XX'' - X'^2 = 2\beta_0|X|^{3/2}/(1+h^2)^{4/3}. \quad (7.4)$$

Левая часть уравнения (7.4) преобразуется к виду

$$\frac{X^2}{X'} \left(\frac{X'^2}{X} \right)' = 2\beta_0 \frac{|X|^{3/2}}{(1+h^2)^{4/3}}. \quad (7.5)$$

После введения новой функции

$$Z = X'/\sqrt{|X|} \quad (7.6)$$

уравнение (7.5) переписывается следующим образом:

$$(Z^2)' = 2\beta_0 Z/(1+h^2)^{4/3}. \quad (7.7)$$

После раскрытия производной в левой части и упрощения оно принимает вид

$$\frac{dZ}{dh} = \frac{\beta_0}{(1+h^2)^{4/3}}$$

и интегрируется два раза. Первое интегрирование (7.7) приводит к уравнению

$$Z = \beta_0(\Phi_1(h) + C_1), \quad (7.8)$$

где $(\Phi_1)'_h = (1+h^2)^{-4/3}$; C_1 — константа интегрирования. Согласно (7.6) имеем

$$Z = 2 \frac{d}{dh} \sqrt{|X|}, \quad (7.9)$$

следовательно, можно проинтегрировать (7.8) еще один раз. Учитывая (7.9), получим

$$\sqrt{|X|} = \beta_0(\Phi_2(h) + C_1h + C_2)/2, \quad (7.10)$$

где $(\Phi_2)'_h = \Phi_1$; C_2 — константа интегрирования. Чтобы освободиться от корня и знака модуля, возведем (7.10) в четвертую степень. Получим *ключевое уравнение*

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = \alpha_0^4 (\Phi_2(h) + C_1h + C_2)^4, \quad \alpha_0 = \frac{\beta_0}{2}. \quad (7.11)$$

Функции Φ_1 и Φ_2 представляются через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; x)$ [14] по следующим формулам:

$$\Phi_1(h) = \int \frac{dh}{(1+h^2)^{4/3}} = \frac{3h}{2(1+h^2)^{1/3}} - \frac{1}{2} h\Phi(h),$$

$$\Phi_2(h) = (-3 + 12(1+h^2)^{2/3} - 4h^2\Phi(h))/8,$$

где $\Phi(h) = {}_2F_1(1/2, 1/3; 2/3; -h^2)$.

Пусть $\gamma = 5/3$. Качественное описание движения газа в ООВ для этого случая дано в [6], где показано, что УШ (2.4) распадается на нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и линейное уравнение второго порядка. Процедуру редукции УШ к описанной паре уравнений можно упростить. Опишем это сведение.

Уравнение (2.4) является автономным, замена $h' = X(h)$ понижает его порядок

$$2XX'' - X'^2 = 2\beta_0 X^2 / (1 + h^2)^{5/3}. \quad (7.12)$$

Еще одна замена

$$|X| = Z^2 \quad (7.13)$$

приводит (7.12) к линейному уравнению второго порядка относительно функции $Z = Z(h)$

$$\frac{d^2 Z}{dh^2} - \frac{\beta_0 Z}{2(1 + h^2)^{5/3}} = 0. \quad (7.14)$$

Чтобы избавиться от знака модуля в соотношении (7.13), его можно возвести в квадрат, записав в виде

$$h'^2 = Z^4(h). \quad (7.15)$$

Таким образом, УШ (2.4) эквивалентно паре: линейное уравнение второго порядка (7.14) и уравнение первого порядка (7.15).

Естественно поставить вопрос о связи между интегрируемостью УШ (2.4) (или (2.8)) при перечисленных частных значениях показателя γ и наличием у него нетривиальной группы симметрии. Этот вопрос был исследован А. А. Черевко, который доказал, что УШ (2.4) при $\gamma = 1$ и $5/3$ допускает нетривиальную группу касательных преобразований. Эта группа ответственна за описанные процедуры интегрирования. Однако для $\gamma = 4/3$ расширения группы симметрии уравнения (2.4) не обнаружено, природа интегрирования в этом случае остается непонятой.

8. Анализ изотермических движений газа ($\gamma = 1$). В изотермическом случае, как видно из п. 7, ключевое уравнение (7.2), к которому сводится УШ (2.8), имеет особенно простой вид. Однако анализ движения не является тривиальным. Полученное решение имеет аналогию с известным периодическим решением Седова с линейным полем скоростей при наличии сингулярности [1]. Анализ решения основан на теории Л. В. Овсянникова периодических движений газа [15].

В ООВ при $\gamma = 1$ возможно существование периодической кинематической конфигурации в плоскости, определяемой начальными данными. Но из представления (2.7) следует наличие сингулярности в решении — коллапса плотности. С физической точки зрения имеет смысл рассматривать решение на интервалах, не содержащих точек сингулярности.

Запишем ключевое уравнение (7.2), описывающее изотермическое движение газа, в виде

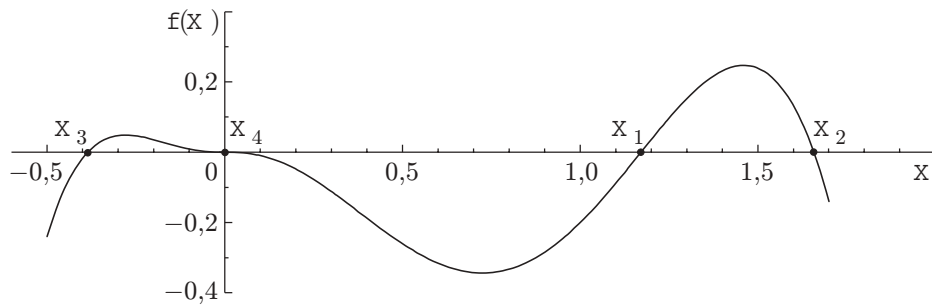
$$X'^2 = f(X), \quad (8.1)$$

где

$$f(X) = X^3 \Phi(X), \quad \Phi(X) = \beta_0 \ln X^2 - 4X + C. \quad (8.2)$$

График функции $f(X)$ имеет следующий вид (рис. 2). Имеется “шапочка” графика, порожденная корнями X_1 и X_2 уравнения $\Phi(X) = 0$. В общем случае она имеет место, если выполнены следующие условия:

- а) существуют X_1, X_2 такие, что $f(X_1) = f(X_2) = 0$;
- б) $f'(X_1) > 0, f'(X_2) < 0$;
- в) функция $f(X)$ имеет максимум в точке $X^* \in (X_1, X_2)$, т. е. $f'(X^*) = 0, f''(X^*) < 0$.

Рис. 2. График функции $f(X)$ ($\beta_0 = 2,8$; $C = 3,8$)

Эти условия обеспечиваются, в свою очередь, достаточными условиями существования “шапочки” [8]. А именно: если функция f зависит еще и от параметра λ : $f = f(X, \lambda)$ (в нашем случае это может быть как C , так и β_0) и существует точка $M(X_0, \lambda_0)$, в которой 1) $f(M) = 0$, $f_X(M) = 0$, 2) $f'_\lambda(M) > 0$, $f_{XX}(M) < 0$, то “шапочка” существует для $\lambda > \lambda_0$, где λ достаточно близко к λ_0 .

Наличие “шапочки” графика гарантирует существование периодического решения уравнения (8.1) [15].

Докажем, что условия 1), 2) выполнены для функции f вида (8.2). Из 1) имеем

$$X_0 = \beta_0/2, \quad C_0 = 2\beta_0(1 + \ln 2 - \ln \beta_0). \quad (8.3)$$

Далее, используя (8.3), получим

$$f'_C(M) = X_0^3 = \beta_0^3/8, \quad f_{XX}(M) = -2\beta_0/X_0^2 = -8/\beta_0. \quad (8.4)$$

Лемма 5. *Достаточные условия существования “шапочки” для функции (8.2) выполнены, если*

$$\beta_0 > 0 \quad \text{и} \quad C_0 = 2\beta_0(1 + \ln 2/\beta_0). \quad (8.5)$$

Согласно [15] при выполнении условий 1), 2) уравнение (8.1) имеет периодическое решение $X = X(t)$ с периодом

$$\Pi = 2 \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\sqrt{f(X)}}. \quad (8.6)$$

Формулы, описывающие асимптотическое представление решения и периода, имеют вид

$$X_\varepsilon(t) = X_0 - a \cos bt + O(\varepsilon^2); \quad (8.7)$$

$$\Pi_\varepsilon = 2\pi/b + O(\varepsilon). \quad (8.8)$$

Здесь $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ — малый параметр, а значения a и b вычисляются по значению функции f в точке M , заданной условиями 1) и 2):

$$a^2 = 2f'_\lambda(M)/|f_{XX}(M)|, \quad 2b^2 = |f_{XX}(M)|. \quad (8.9)$$

Подставляя в (8.9) значения из (8.4), получим

$$a = \beta_0^2/4\sqrt{2}, \quad b = 2/\sqrt{\beta_0}. \quad (8.10)$$

Тогда предельный период, вычисленный из (8.8), согласно (8.10) равен

$$\Pi = \pi\sqrt{\beta_0}.$$

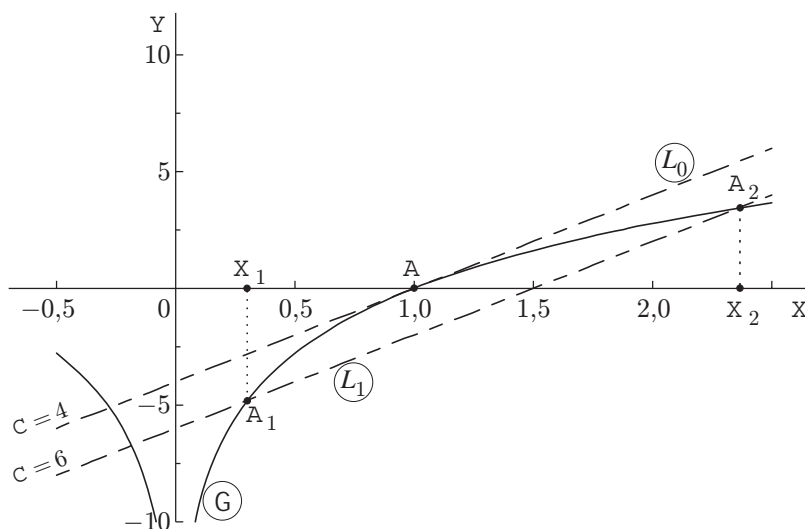


Рис. 3. Схема порождения предельного периода ($\beta_0 = 2$)

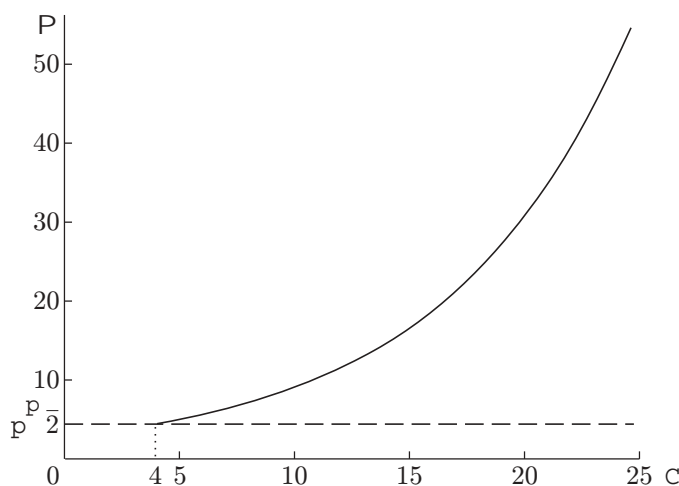


Рис. 4. График зависимости $\Pi = \Pi(C)$ ($\beta_0 = 2$)

Ситуация с предельным периодом иллюстрируется следующим рассуждением. Рассмотрим рис. 3, на котором изображены кривая Γ — график функции $Y = 2\beta_0 \ln X$ и прямые $Y = 4X - C$ для двух разных значений параметра C .

Прямая L_0 касается кривой Γ в точке A , прямая L_1 пересекает ее в точках A_1 и A_2 . Проекция точек A_i на ось X определяют значения X_i — корни уравнения $f(X) = 0$, определяющие “шапочку”. Следовательно, в пределе, при приближении секущей к касательной $L_1 \rightarrow L_0$ и при $A_i \rightarrow A$ получаем предельное периодическое движение с периодом Π .

Численный расчет зависимости периода Π от параметра C показывает монотонное возрастание функции $\Pi = \Pi(C)$, почти экспоненциального вида. На рис. 4 приведен график этой зависимости для небольших C .

9. Преобразование эквивалентности уравнения (8.1). Уравнение (8.1) допускает преобразование эквивалентности

$$X = a\bar{X}, \quad t = \bar{t}/a, \tag{9.1}$$

при котором константы β_0 и C преобразуются следующим образом:

$$\bar{\beta}_0 = \beta_0/a, \quad \bar{C} = (C + \beta_0 \ln a^2)/a. \tag{9.2}$$

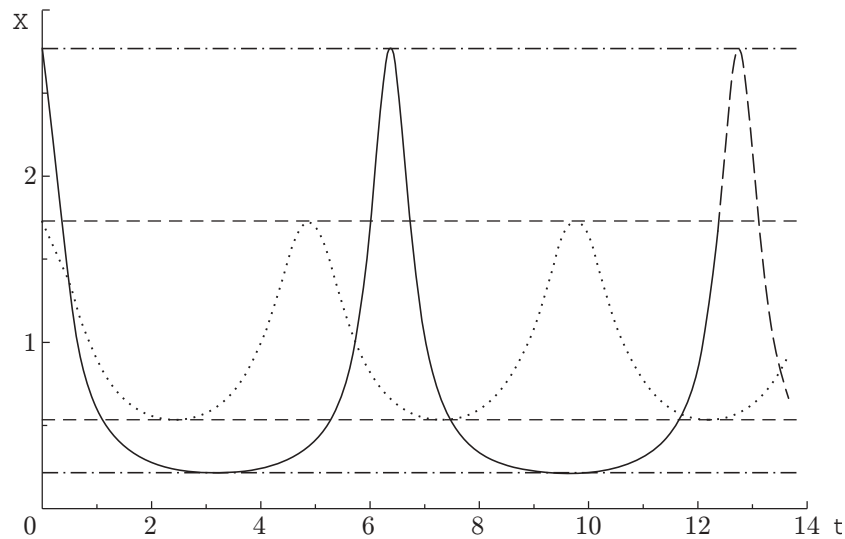


Рис. 5. График $X = X(t)$ для разных значений C ($\beta_0 = 2$)

Поэтому достаточно изучить зависимость поведения траекторий $X = X(t)$ только от одного из параметров — β_0 или C , поскольку преобразованием (9.1) можно, согласно формулам (9.2), зафиксировать один из них. Оказывается удобным положить $\beta_0 = 2$ и использовать зависимость решения только от C . Это соглашение будет выполнено в дальнейшем.

10. Замыкание траекторий решения $X = X(t)$. Рассмотрим решение $X = X(t)$ в плоскости $\Pi : z = 0$, так что применимы лемма 4 и следствие из нее: уравнение (8.1) описывает кинематику частицы газа. Введем полярные координаты (r, ψ) в плоскости Π , тогда траектория определяется тремя соотношениями

$$X_t^2 = X^3(\beta_0 \ln X^2 - (4X - C)); \quad (10.1)$$

$$r^2 X = r_0^2 X_0; \quad (10.2)$$

$$\psi_t = X(t). \quad (10.3)$$

Лемма 6. *Интегральные кривые, соответствующие решениям (10.1)–(10.3) расположены в кольце $r \in [r_1, r_2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X \in [X_1, X_2]$, согласно интегралу (10.2) r меняется в замкнутом интервале $[r_1, r_2]$.

На рис. 5 представлены графики решения $X = X(t)$ для различных значений параметра C (сплошная кривая — $C = 7,0$; пунктирная кривая — $C = 4,7$). С возрастанием C значение X_1 убывает до нуля, а X_2 неограниченно возрастает. При этом максимум функции $f(X)$ увеличивается, т. е. функция $X(t)$ с ростом t возрастает, а потом убывает быстрее, что влечет заострение направленных вверх пиков функции $X(t)$ и их сужение.

Функция $\psi = \psi(t)$ согласно (10.3) имеет вид ступенчатой кривой. Величина

$$\Psi = \int_{t_1}^{t_2} X(t) dt \quad (10.4)$$

определяет возрастание угла ψ за время $\Pi = t_2 - t_1$, равное периоду $X(t)$. Заметим, что величина Ψ инвариантна относительно преобразования эквивалентности (9.1). Для существования периодических решений $X = X(t)$ необходимо, чтобы траектория частицы

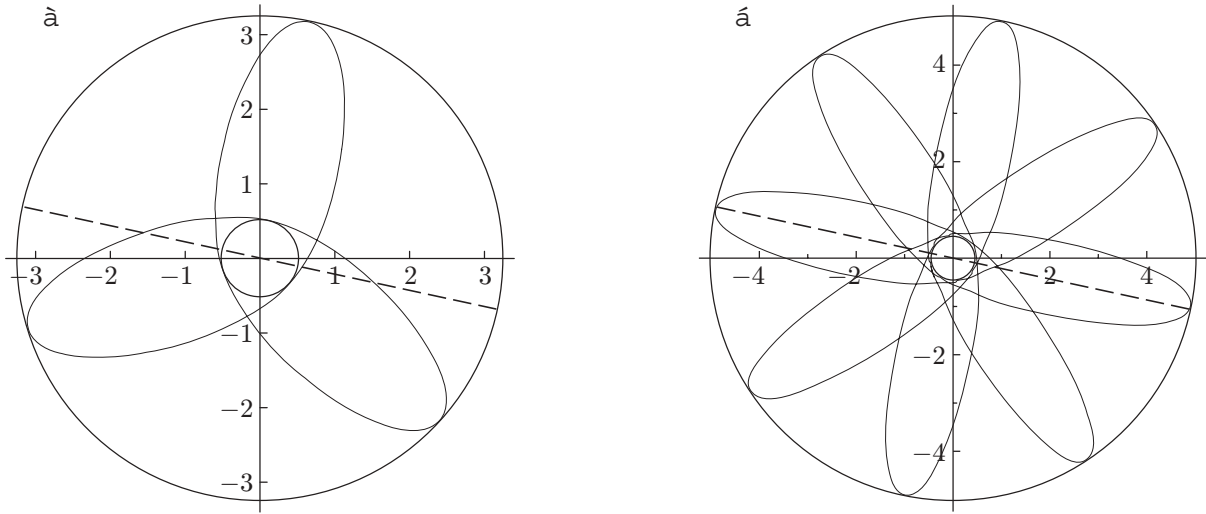


Рис. 6. Вид траектории для различных значений q :
 $a - q = 2/3$; $b - q = 5/8$

замыкалась, возможно после нескольких оборотов вокруг центра. Следовательно, условие существования замкнутых траекторий имеет вид

$$\Psi = 2\pi q, \quad q = n/m \in \mathbb{Q}. \tag{10.5}$$

Число оборотов определяется числителем дроби n , знаменатель m определяет число точек, в которых траектория выходит на внешнюю (внутреннюю) предельную окружность (лемма 6), т. е. определяет число “лепестков” на траектории. Численный расчет показывает, что величина $\Psi = \Psi(C)$ ограничена сверху и снизу, по крайней мере на некотором промежутке

$$\pi \leq \Psi \leq \pi\sqrt{2}. \tag{10.6}$$

Оценка (10.6) определяет возможный выбор параметра C и, соответственно, числа $q \in \mathbb{Q}$ в (10.5). На рис. 6 изображены траектории для двух различных значений q , причем на штриховых линиях, согласно (2.7), при некоторых начальных данных достигается коллапс плотности.

На рис. 7 для конфигурации траекторий, представленной на рис. 6, a , даны графики изменения радиуса (сплошная кривая), плотности (штриховая кривая), радиальной (штрихпунктирная кривая) и окружной (пунктирная кривая) скоростей частицы газа, рассчитанные согласно формулам (2.2), (2.3) и уравнению (8.1).

Согласно лемме 2 движение каждой частицы происходит в своей плоскости. Для двух частиц и $q = 2/3$ возможная пространственная конфигурация траекторий дана на рис. 8.

11. Режим газовой струи. Решение ключевого уравнения (8.1) на интервале $X \in [X_3, X_4 = 0]$ (см. рис. 2) порождает движение типа газовой струи. Уравнение $f(X) = 0$ имеет корень $X_4 = 0$ кратности три, следовательно, согласно формуле решения уравнения (8.1)

$$t = \pm \int_{X_3}^{X_0} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}, \quad X \rightarrow X_4, \tag{11.1}$$

переход из состояния X_3 в X_4 совершается за бесконечное время. Действительно, несобственный интеграл в правой части (11.1) имеет особенность вида $\xi^{-3/2}$ при $\xi \rightarrow 0$ в

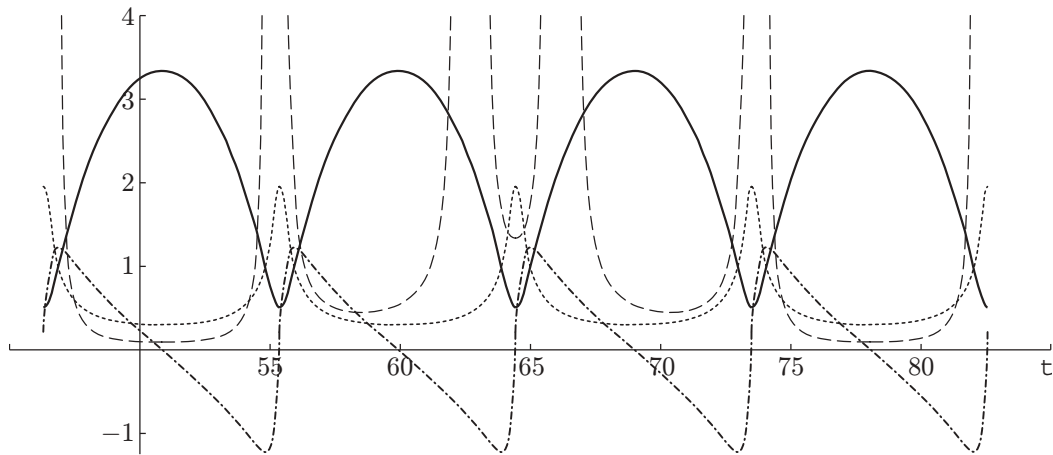


Рис. 7. Изменение радиуса, плотности, окружной и радиальной скоростей вдоль траектории в случае $q = 2/3$

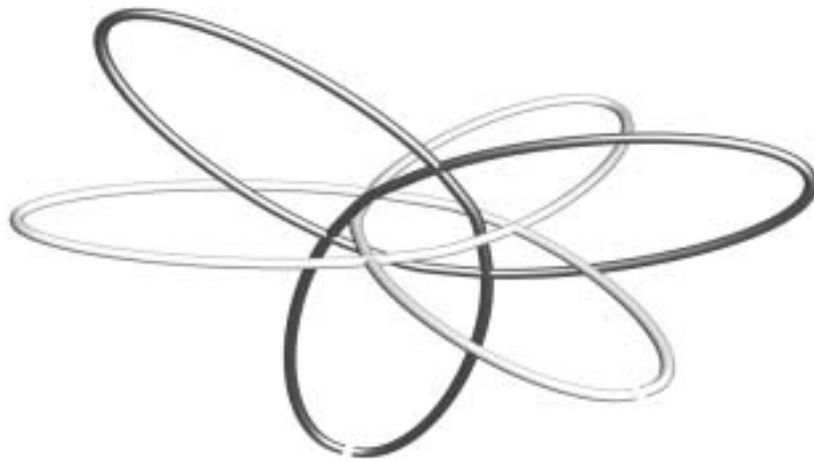


Рис. 8. Пространственная конфигурация траекторий для двух частиц в случае $q = 2/3$

точке X_4 и является расходящимся. Физически это решение соответствует переходу частицы газа из состояния с конечным $X_3 = \psi'_3$ в состояние с $X_4 = \psi'_4 = 0$ так, что согласно интегралу (10.2) имеем: $\psi_4 \rightarrow \psi_{40} = \text{const}$ и $r_4 \rightarrow \infty$. Решение моделирует истечение струи газа на бесконечность либо, наоборот, ее приход издалека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
3. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
4. Овсянников Л. В. Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Чупахин А. П. Инвариантные подмодели особого вихря // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 3. С. 390–405.
7. Чупахин А. П. Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препр. / Ин-т гидродинамики СО РАН; № 1-99).

8. **Овсянников Л. В.** Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 6. С. 740–742.
9. **Чупахин А. П.** Гидродинамика с квадратичным давлением // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 27–36; № 2. С. 22–28.
10. **Уиттекер Э.** Аналитическая динамика. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
11. **Rogers C., Ames W.** Nonlinear boundary value problems in science and engineering. N. Y.: Acad. Press, 1989.
12. **Голубев В. В.** Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1941.
13. **Зеликин М. М.** Однородные пространства и уравнение Рикатти в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
14. **Кратцер А., Франц В.** Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
15. **Овсянников Л. В.** О периодических движениях газа // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 4. С. 567–577.

Поступила в редакцию 24/X 2003 г.
