

область которой состоит из второго материала. Относительный выигрыш по весу для оптимальной сферы по сравнению с данной «однородной» составил  $(1 - F_*/F^*) \cdot 100\% = 15,8\%$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Оптимизация многослойных структур при прохождении волн // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 6.
2. Бабе Г. Д., Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимизация многослойных конструкций, подверженных периодическим температурным воздействиям // ДАН СССР.— 1983.— Т. 269, № 2.
3. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров.— Новосибирск: Наука, 1987.
4. Алехин В. В. Оптимизация слоистых тел при ограничении на основную частоту собственных колебаний // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 66.
5. Алехин В. В., Каниболотский М. А. Оптимизация массы слоистой сферы из конечного набора материалов // Механика композит. материалов.— 1986.— № 2.
6. Аптуков В. Н., Белоусов В. Л., Каниболотский М. А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композит. материалов.— 1986.— № 2.
7. Аннин Б. Д., Алехин В. В. Синтез слоистых композитов // VI Междунар. симп. о композиционных металлических материалах.— Высоки Татры — Стара Лесна, ЧССР, 1986.— Т. 1.
8. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1977.
9. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.
10. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: механические системы и конструкции.— М.: Мир, 1983.

Поступила 25/VII 1988 г.

УДК 539.376

### ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. Ю. Цвелодуб  
(Новосибирск)

В [1—6] исследовались некоторые обратные задачи, связанные с нахождением внешних воздействий, необходимых для получения в условиях ползучести за заданное время  $t_*$  требуемой остаточной формы тела или пластины с учетом упругой разгрузки в момент  $t - t_*$ . При этом предполагалось, что неизвестные внешние воздействия принадлежат определенному классу, например, в [2, 4, 5] рассматривались релаксационные задачи, когда в течение времени  $t_*$  неизвестные перемещения точек поверхности тела (неизвестные прогибы пластины) оставались фиксированными, в [1, 2] считались постоянными во времени внешние нагрузки и т. п.

В данной работе исследуется класс обратных задач о нахождении внешних нагрузок таких, которые бы обеспечивали заданную остаточную форму тела (пластины) в любой текущий момент времени. Для случая малых деформаций доказывается теорема единственности решения. Дана вариационная формулировка этих задач, основанная на нахождении стационарного значения некоторого функционала; при этом одновременно варьируются скорости перемещений и напряжений как текущих, так и остаточных (после упругой разгрузки). На конкретном примере сопоставляется решение задачи в точной постановке с решением, полученным с использованием указанного смешанного вариационного принципа.

1. Рассмотрим равномерно прогретое тело объема  $v$  с поверхностью  $S$ , определяющие уравнения деформирования которого запишем как

$$(1.1) \quad \varepsilon_{kl} = a_{klmn} \sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^c \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где  $\varepsilon_{kl}$ ,  $\varepsilon_{kl}^c$ ,  $\sigma_{kl}$ ,  $a_{klmn} = a_{mnhl}$  — компоненты тензоров полных деформаций, деформаций ползучести, напряжений и упругих податливостей соответственно; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Деформации считаются малыми, так что компоненты  $\varepsilon_{kl}$  выражаются через компоненты вектора перемещений  $u_k$  известными соотношениями Коши.

Для скоростей деформаций ползучести  $\eta_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^c$  (точка означает дифференцирование по времени  $t$ ) примем общие зависимости Ю. Н. Работнова [7], которые хорошо описывают процесс ползучести металлов и при изотермическом деформировании имеют вид

$$(1.2) \quad \eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}, q_i) \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3, i = 1, 2, \dots, r).$$

Здесь  $q_i$  — набор структурных параметров, изменение которых во времени отражается кинетическими уравнениями

$$(1.3) \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\sigma_{mn}, \varepsilon_{mn}^c, q_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, r, m, n = 1, 2, 3).$$

Предполагаем, что рассматриваемая среда удовлетворяет постулату устойчивости, который при изотермическом процессе ползучести формулируется следующим образом [8]: для любых двух путей в пространстве напряжений  $\sigma_{kl}^{(1)} = \sigma_{kl}^{(1)}(t)$  и  $\sigma_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}^{(2)}(t)$  и соответствующих им путей в пространстве скоростей деформаций ползучести  $\eta_{kl}^{(1)} = \eta_{kl}^{(1)}(t)$  и  $\eta_{kl}^{(2)} = \eta_{kl}^{(2)}(t)$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) для любого момента времени  $t > 0$  выполняется неравенство

$$(1.4) \quad \int_0^t \Delta\sigma_{kl} \Delta\eta_{kl} dt \geq 0,$$

где  $\Delta\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)}$ ,  $\Delta\eta_{kl} = \eta_{kl}^{(1)} - \eta_{kl}^{(2)}$  при условии  $q_i^{(1)} = q_i^{(2)}$  и  $\varepsilon_{kl}^{c(1)} = \varepsilon_{kl}^{c(2)}$  для  $t = 0$  (в тех случаях, когда правые части (1.3) не содержат  $\varepsilon_{mn}^c$ , условие  $\varepsilon_{kl}^{c(1)} = \varepsilon_{kl}^{c(2)}$  при  $t = 0$  необязательно). Считается, что знак равенства в (1.4) возможен для сжимаемой при ползучести среды ( $\eta_{kk} \neq 0$ ) только при  $\Delta\sigma_{kl}(t) = 0$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) для любого  $t > 0$ , а для несжимаемой ( $\eta_{kk} = 0$ ) — только при  $\Delta\sigma_{kl} = \Delta p(t)\delta_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) для  $t > 0$  ( $\delta_{kl}$  — компоненты единичного тензора).

Условие (1.4) накладывает определенные ограничения на уравнения ползучести (1.2), (1.3). Для основных классов сред (нелинейно-вязких, упрочняющихся, разупрочняющихся, сред с деформационной анизотропией и т. п.) эти ограничения установлены в [8].

Сформулируем обратную задачу теории ползучести: какие внешние нагрузки  $p_k = p_k(t)$  нужно прикладывать к поверхности  $S$  тела так, чтобы в любой текущий момент  $t > 0$  оно имело заданные остаточные перемещения  $\tilde{u}_k = \tilde{u}_k(t)$  ( $\tilde{u}_k = 0$  при  $t = 0$ ) ( $k = 1, 2, 3$ ) точек поверхности, т. е. те перемещения, которые остались бы на  $S$  после мгновенного снятия текущих внешних нагрузок и упругой разгрузки? Считается, что при  $t < 0$  тело находилось в недеформированном состоянии (или в более общем случае: при  $t = 0$  в теле заданы распределения деформаций ползучести  $\varepsilon_{kl}^c$  и значений параметров  $q_i$ ).

Докажем, что если решение этой задачи для тела с определяющими уравнениями (1.1) — (1.3) и ограничением (1.4) существует, то для сжимаемого при ползучести тела оно будет единственным, а для несжимаемого внешние нагрузки  $p_k$  определяются с точностью до произвольного гидростатического давления.

Для доказательства предположим, что существуют два решения данной задачи, удовлетворяющие одним и тем же граничным и начальным условиям; соответствующие им разности обозначим с помощью символа  $\Delta$ .

Так как  $\Delta\tilde{u}_k = 0$  на  $S$  при любом  $t > 0$ , то из известного уравнения виртуальных работ получим

$$(1.5) \quad \int_v \Delta\sigma_{kl} \Delta\tilde{\varepsilon}_{kl} dv = 0;$$

$$(1.6) \quad \tilde{\varepsilon}_{kl} = a_{klmn} \rho_{mn} + \varepsilon_{kl}^c \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ ,  $\rho_{kl}$  — поля остаточных деформаций и остаточных напряжений, причем  $\rho_{kl} = 0$  при  $t = 0$  (когда при  $t = 0$  в теле задано распределение

$\varepsilon_{kl}^e$ , напряжения  $\rho_{kl}$  находятся однозначно, т. е.  $\Delta\rho_{kl} = 0$  при  $t = 0$ ).

Поле напряжений при любом  $t > 0$  представим в виде [1, 2]  $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^e + \rho_{kl}$  ( $\sigma_{kl}^e$  — компоненты напряжений, отвечающих решению упругой задачи при текущих значениях внешних нагрузок). Вследствие самоуравновешенности напряжений  $\rho_{kl}$  имеет место равенство [1, 2]  $\int_v a_{klmn} \Delta \dot{\rho}_{mn} \Delta \sigma_{kl}^e dv = 0$ , с использованием которого и уравнений (1.1) из (1.5) найдем

$$(1.7) \quad \int_v (a_{klmn} \Delta \dot{\rho}_{mn} \Delta \rho_{kl} + \Delta \sigma_{kl} \Delta \eta_{kl}) dv = 0.$$

Интегрируя (1.7) по времени от нуля до текущего момента  $t$  и учитывая, что  $\Delta\rho_{kl} = 0$  при  $t = 0$ , получим

$$\int_v \left[ \frac{1}{2} a_{klmn} \Delta \rho_{mn}(t) \Delta \rho_{kl}(t) + \int_0^t \Delta \sigma_{kl} \Delta \eta_{kl} dt \right] dv = 0,$$

что в силу свойств упругого потенциала и постулата (1.4) возможно только при  $\Delta\rho_{kl} = 0$  и  $\Delta\sigma_{kl} = 0$  (для сжимаемого при ползучести тела) либо при  $\Delta\sigma_{kl} = \Delta p \delta_{kl}$  (для несжимаемого тела) ( $k, l = 1, 2, 3$ ) на любой момент  $t > 0$ . Причем из уравнений равновесия следует, что  $\Delta p$  не зависит от координат точек тела и может быть функцией только времени  $t$ . Отсюда вытекает, что в первом случае внешние нагрузки  $p_k$  определяются однозначно, а во втором — с точностью до произвольного гидростатического давления. Утверждение доказано.

Заметим, что с использованием результатов, полученных в [2], можно доказать теорему единственности решения аналогичной обратной задачи изгиба пластин при малых прогибах; при этом необходимо найти внешние нагрузки, обеспечивающие в любой момент времени заданные остаточные прогибы при соответствующих граничных условиях.

2. Основные уравнения исследуемого класса задач включают: определяющие соотношения (1.1)—(1.3), (1.6); соотношения Коши для текущих  $\varepsilon_{kl}$  и остаточных  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$  деформаций, уравнения равновесия для текущих  $\sigma_{kl}$  и остаточных  $\rho_{kl}$  напряжений, граничные условия для остаточных напряжений  $\rho_{kl}$  и остаточных перемещений  $\tilde{u}_k$ , начальные условия для  $\varepsilon_{kl}^e$  и  $q_i$ . Не выписывая эти уравнения в общем случае, в качестве простейшего примера рассмотрим задачу о чистом изгибе балки прямоугольного сечения единичной ширины с высотой  $h$ . Требуется найти изгибающий момент  $M = M(t)$ , который обеспечивает заданную остаточную кривизну  $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(t)$ . При  $t < 0$  балка находилась в недеформированном состоянии, т. е.  $\tilde{\kappa} = 0$  при  $t = 0$ .

Предположим, что материал балки подчиняется степенному закону ползучести. Тогда из (1.1), (1.6) с использованием общепринятой гипотезы плоских сечений [7] для скоростей текущих и остаточных деформаций получим ( $-h/2 \leq y \leq h/2$ )

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\kappa} y = \dot{\sigma}/E + B\sigma^n;$$

$$(2.2) \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = \dot{\tilde{\kappa}} y = \dot{\rho}/E + B\rho^n,$$

где  $\kappa, \tilde{\kappa}$  — текущая и остаточная кривизна;  $E$  — модуль Юнга;  $B$  и  $n$  — константы ползучести.

Остаточные напряжения  $\rho$  являются самоуравновешенными, им соответствует нулевой изгибающий момент, т. е. при любом  $t > 0$

$$(2.3) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \rho y dy = 2 \int_0^{h/2} \rho y dy = 0.$$

Определим  $\sigma_0$  — напряжение при  $t = 0$ . Из (2.1) следует, что  $\sigma_0 = E\kappa_0 y$ ; подставляя это значение в равенство (2.2) при  $t = 0$ , умножая последнее на  $y$  и интегрируя по  $y$  от нуля до  $h/2$ , с учетом (2.3) имеем  $\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \kappa_0 = \frac{B(E\kappa_0)^n \left(\frac{h}{2}\right)^{n+2}}{n+2}$ , откуда  $\sigma_0 = \left[\frac{n+2}{3B} \left(\frac{h}{2}\right)^{1-n} \kappa_0\right]^{1/n} y$  ( $\kappa_0$  — скорость остаточной кривизны при  $t = 0$ ).

Введем безразмерные величины:  $\xi = 2y/h$ ,  $\psi = h\kappa/2$ ,  $\tilde{\psi} = h\tilde{\kappa}/2$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma/p_0$ ,  $\tau = BEp_0^{n-1}t$  ( $p_0 > 0$  — характерное напряжение). Тогда для безразмерного напряжения при  $t = 0$  получим  $\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{p_0} \left[\frac{n+2}{3} Ep_0^{n-1} \times \times \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} \Big|_{\tau=0}\right]^{1/n} \xi$ . Константу  $p_0$  выберем из условия  $\max \bar{\sigma}_0 = 1$ , т. е.  $\bar{\sigma}_0 = \xi$  и  $p_0 = E\tilde{\psi}_0(n+2)/3$  (здесь и далее точка означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ ). Из (2.1)–(2.3) находим для безразмерных величин (черту над  $\sigma$  и  $\rho$  опустим)

$$(2.1') \quad \frac{3}{n+2} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_0} \xi = \dot{\sigma} + \sigma^n;$$

$$(2.2') \quad \frac{3}{n+2} \frac{\dot{\tilde{\psi}}}{\dot{\tilde{\psi}}_0} \xi = \dot{\rho} + \rho^n;$$

$$(2.3') \quad \int_0^1 \rho \xi d\xi = 0.$$

Из (2.1'), (2.2') и начальных условий вытекает

$$(2.4) \quad \sigma(\xi, \tau) = \rho(\xi, \tau) + \alpha(\tau)\xi, \quad \alpha(\tau) = \frac{3}{n+2} \frac{\psi - \tilde{\psi}}{\dot{\psi}_0}.$$

Умножая (2.2') на  $\xi$ , интегрируя по  $\xi$  от нуля до 1 и учитывая (2.3'), имеем  $\frac{1}{n+2} \frac{\dot{\tilde{\psi}}}{\dot{\tilde{\psi}}_0} = \int_0^1 \sigma^n \xi d\xi$ . Подставляя в это соотношение значение  $\sigma$  из (2.4), найдем

$$(2.5) \quad \frac{1}{n+2} \frac{\dot{\tilde{\psi}}}{\dot{\tilde{\psi}}_0} = \int_0^1 (\rho + \alpha\xi)^n \xi d\xi,$$

а затем (2.4) в (2.2') и дифференцируя (2.5) по  $\tau$ , придем к системе уравнений для нахождения функций  $\rho = \rho(\xi, \tau)$  и  $\alpha = \alpha(\tau)$ :

$$(2.6) \quad \dot{\rho} = \frac{3}{n+2} \frac{\dot{\tilde{\psi}}}{\dot{\tilde{\psi}}_0} \xi - f^n \quad (f = \rho + \alpha\xi),$$

$$\dot{\alpha} = \left[ \frac{1}{n(n+2)} \frac{\dot{\tilde{\psi}}}{\dot{\tilde{\psi}}_0} - \int_0^1 \dot{\rho} f^{n-1} \xi d\xi \right] / \int_0^1 f^{n-1} \xi^2 d\xi.$$

При выводе второго уравнения (2.6) учтено, что  $\alpha$  не зависит от  $\xi$ . Начальные условия для системы (2.6) имеют вид

$$(2.7) \quad \rho(\xi, 0) = 0, \quad \alpha(0) = 1.$$

Заметим, что (2.5) и второе равенство (2.6) эквивалентны в силу (2.7).

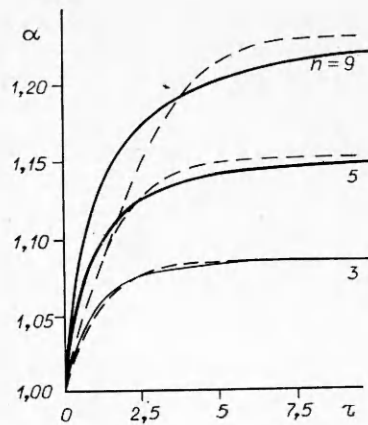
Численное интегрирование системы (2.6) с условиями (2.7) не вызывает затруднений. Например, для случая, когда остаточная кривизна нарастает с постоянной скоростью, т. е.  $\dot{\tilde{\psi}} = \dot{\tilde{\psi}}_0 = \text{const}$ , (2.6) после не-

сложных преобразований запишем как

$$(2.8) \quad \dot{\rho} = \frac{3}{n+2} \xi - f^n \quad (f = \rho + \alpha \xi),$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{3}{n+2} + \left( \int_0^1 f^{2n-1} \xi d\xi \right) / \int_0^1 f^{n-1} \xi^2 d\xi.$$

Процедура счета состояла в следующем. Отрезок  $[0,1]$  разбивался на 21 узел интегрирования, так что шаг по  $\xi$  равнялся 0,05. Первое уравнение (2.8) записывалось в этих узлах, т. е. при различных значениях  $\xi$ . Полученная система совместно со вторым уравнением (2.8) и начальными условиями (2.7) интегрировалась методом Рунге — Кутца. При этом интегралы, входящие в (2.8), заменялись конечными суммами по формуле Симпсона с использованием тех же узлов, т. е. шаг интегрирования  $\Delta \xi = 0,05$ . Шаг интегрирования  $\Delta \tau$  по безразмерному времени варьировался и результаты расчета сравнивались при различных значениях  $\Delta \tau$ ; в итоге выбран начальный шаг  $\Delta \tau = 0,1$ , который через 10 шагов был увеличен в 10 раз. На рисунке сплошными линиями изображены графики  $\alpha = \alpha(\tau)$  при  $n = 3, 5, 9$  ( $\alpha$  характеризует изгибающий момент, так как из (2.3') и (2.4) следует, что  $\alpha = 3 \int_0^1 \sigma \xi d\xi = \frac{6}{\rho_0 h^2} M$ ). Как видно из графиков,  $\alpha$  стремится к своему предельному значению  $\alpha_\infty(n) = \frac{3n}{2n+1} \left( \frac{3}{n+2} \right)^{1/n}$  ( $\alpha_\infty(3) = 1,084$ ,  $\alpha_\infty(5) = 1,151$ ,  $\alpha_\infty(9) = 1,230$ ), которое отвечает установившемуся решению системы (2.8) при  $\tau \rightarrow \infty$ , когда  $\dot{\rho} = \dot{\alpha} = 0$ .



Установившееся распределение напряжений имеет вид

$$(2.9) \quad \rho_\infty = \left( \frac{3}{n+2} \right)^{1/n} \left( \xi^{1/n} - \frac{3n}{2n+1} \xi \right), \quad \sigma_\infty = \left( \frac{3}{n+2} \right)^{1/n} \xi^{1/n}.$$

Например, для  $n = 3$  при  $\tau \geq 5$  распределение напряжений практически совпадает с (2.9); для  $n = 5$  и 9 соответствующие значения  $\tau$  несколько больше, т. е. с ростом  $n$  время (безразмерное) перераспределения напряжений от упругого  $\sigma_0 = \xi$  до установившегося (2.9) также растет.

Текущая безразмерная кривизна  $\psi$  определяется из (2.4):

$$(2.10) \quad \psi/\psi_0 = \tau + (n+2)\alpha/3,$$

как как в данном случае  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 \tau$ . Следовательно, при достаточно большом (например,  $\tau \geq 5$  для  $n = 3$ ), когда  $\alpha \approx \alpha_\infty$ , текущая кривизна растет

той же скоростью, что и остаточная:  $\tilde{\psi} \approx \tilde{\psi}_0$ .

3. Исследуемый класс обратных задач допускает вариационную формулировку. Рассмотрим функционал

$$(3.1) \quad J = \int_v \left[ \tilde{\epsilon}_{kl} \dot{\sigma}_{kl} + \epsilon_{kl} \dot{\rho}_{kl} - a_{klmn} \dot{\rho}_{kl} \dot{\sigma}_{mn} - \eta_{kl} (\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\rho}_{kl}) \right] dv - \int_S \dot{p}_k (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k*}) dS,$$

где  $\tilde{\epsilon}_{kl} = (1/2)(\tilde{u}_{k,l} + \tilde{u}_{l,k})$ ,  $\epsilon_{kl} = (1/2)(u_{k,l} + u_{l,k})$  — компоненты остаточных и текущих деформаций (нижний индекс после запятой означает астенную производную по соответствующей декартовой координате);  $\eta_{kl}$  — компоненты скоростей деформаций ползучести, которые определяются

согласно (1.2);  $p_k$  — компоненты внешней нагрузки;  $\tilde{u}_{k*}$  — заданные остаточные перемещения на  $S$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ).

Будем варьировать функционал (3.1), считая независимыми переменными  $\sigma_{kl}, \rho_{kl}, u_k$  и  $\dot{u}_k$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ). Проводя обычные в подобных случаях выкладки (см., например, [7, с. 634—637]), из (3.1) получим

$$\delta J = \int_v [(\dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} - a_{klmn}\dot{\rho}_{mn} - \eta_{kl})\delta\dot{\sigma}_{kl} + (\dot{\epsilon}_{kl} - a_{klmn}\dot{\sigma}_{mn} - \eta_{kl})\delta\dot{\rho}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl,l}\delta\dot{u}_k - \dot{\rho}_{kl,l}\delta\dot{u}_k] dv + \int_S [(\dot{\sigma}_{kl}n_l - \dot{p}_k)\delta\dot{u}_k + \dot{\rho}_{kl}n_l\delta\dot{u}_k - (\dot{u}_k - \dot{u}_{k*})\delta\dot{p}_k] dS$$

( $n_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — компоненты единичного вектора внешней к  $S$  нормали)

Ввиду независимости вариаций  $\delta\dot{\sigma}_{kl}, \delta\dot{\rho}_{kl}, \delta\dot{u}_k$  и  $\delta\dot{u}_k$  в объеме  $v$  и  $\delta\dot{u}_k, \delta\dot{u}_k, \delta\dot{p}_k$  на поверхности  $S$  из равенства  $\delta J = 0$  следует

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} = a_{klmn}\dot{\rho}_{mn} + \eta_{kl}, \quad \dot{\epsilon}_{kl} = a_{klmn}\dot{\sigma}_{mn} + \eta_{kl}, \quad \dot{\sigma}_{kl,l} = \dot{\rho}_{kl,l} = 0 \text{ в объеме } v$$

$$\dot{\sigma}_{kl}n_l \delta\dot{p}_k = \dot{p}_k, \quad \dot{\rho}_{kl}n_l = 0, \quad \dot{u}_k = \dot{u}_{k*} \text{ на поверхности } S \text{ (} k, l = 1, 2, 3 \text{)}$$

Таким образом, условиями стационарности функционала (3.1) являются записанные в скоростях физические связи (1.1) и (1.6), включающие и уравнения упругой разгрузки, уравнения равновесия и граничные условия для текущих и остаточных напряжений, также записанные в скоростях.

Сформулированный вариационный принцип аналогичен смешанному вариационному принципу для прямых задач теории ползучести [7] только в отличие от последнего в (3.1) варьируется двойной набор переменных, характеризующих как текущее, так и остаточное (после упругой разгрузки) напряженно-деформированное состояние.

Поскольку условия стационарности функционала (3.1) эквивалентны задаче в скоростях, возникает вопрос об определении компонент напряжений  $\sigma_{kl}$  при  $t = 0$  (как отмечалось выше, компоненты  $\rho_{kl}$  при  $t = 0$  заданы либо однозначно определяются из заданного распределения  $\epsilon_{kl}^c$  при  $t = 0$ ). Заметим, что поле  $\sigma_{kl}$  при  $t = 0$  определяется однозначно, что непосредственно вытекает из (1.7), так как  $\Delta\rho_{kl} = 0$  и  $\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} \geq 0$  при  $t = 0$  вследствие (1.4).

Предположим, как это обычно принято [7], что связи (1.2) потенциальны, т. е. существует функция  $\Phi = \Phi(\sigma_{kl}, q_i)$  такая, что  $\eta_{kl} = \partial\Phi / \partial\sigma_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ). Тогда для нахождения начальных напряжений  $\sigma_{kl}$  можно поступить следующим образом. Из уравнения виртуальных работ (1.6) получим

$$\int_S \sigma_{kl_0} n_l \dot{\tilde{u}}_{k_0} dS = \int_v \sigma_{kl_0} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl_0} dv = \int_v \sigma_{kl_0} (a_{klmn}\dot{\rho}_{mno} + \eta_{kl_0}) dv = \int_v \sigma_{kl_0} \eta_{kl_0} dv,$$

где учтено, что  $\int_v a_{klmn}\dot{\rho}_{mno}\sigma_{kl_0} dv = 0$  [1, 2]. Легко видеть, что эти равенства будут верны и для таких вариаций  $\delta\sigma_{kl_0}$ , которые удовлетворяют уравнениям равновесия, а соответствующие им вариации  $\delta\epsilon_{kl_0}^e = a_{klmn}\delta\sigma_{mno}$  — уравнениям совместности деформаций, т. е.  $\delta\sigma_{kl_0}$  должны быть вариациями некоторого упругого решения. Тогда

$$\int_S \delta\sigma_{kl_0} n_l \dot{\tilde{u}}_{k_0} dS = \int_v \delta\sigma_{kl_0} \eta_{kl_0} dv = \delta \int_v \Phi(\sigma_{kl_0}, q_{i_0}) dv$$

( $q_{i_0}$  — заданные значения параметров  $q_i$  при  $t = 0$ ).

Поскольку, согласно (1.4), функция  $\Phi = \Phi(\sigma_{kl_0})$  будет выпуклой можно показать, что среди всех упругих полей напряжений истинное на

чальное напряженное состояние  $\sigma_{k10}$  доставляет минимум функционалу

$$(3.2) \quad J_0 = \int_V \Phi(\sigma_{k10}) dv - \int_S \sigma_{k10} n_i \dot{u}_{k0} dS$$

( $\dot{u}_{k0}$  — заданные скорости остаточных перемещений точек поверхности при  $t = 0$ ).

Таким образом, решение исследуемой обратной задачи теории ползучести эквивалентно нахождению стационарного значения функционала (3.1), при этом начальное поле напряжений  $\sigma_{k10}$  при сделанных выше оговорках минимизирует функционал (3.2). Это открывает возможности для построения приближенных решений задач данного класса.

В качестве примера рассмотрим ту же задачу об изгибе балки, что и в п. 2. В этом случае, как нетрудно показать, функционалы (3.1) и (3.2) имеют вид

$$(3.1') \quad J = \int_0^{h/2} \left[ \dot{\varepsilon} \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon} \dot{\rho} - \frac{1}{E} \dot{\rho} \dot{\sigma} - B \sigma^n (\dot{\sigma} + \dot{\rho}) \right] dy;$$

$$(3.2') \quad J_0 = \int_0^{h/2} \left( \frac{B}{n+1} \sigma_0^{n+1} - \dot{\varkappa}_0 \sigma_0 y \right) dy.$$

Задаваясь линейным по  $y$  распределением начальных напряжений  $\sigma_0$ , что отвечает упругому решению, и минимизируя (3.2'), найдем  $\sigma_0 = \left[ \frac{n+2}{3B} \left( \frac{h}{2} \right)^{1-n} \dot{\varkappa}_0 \right]^{1/n} y$ , это совпадает с аналогичным полем в п. 2. Пользуясь гипотезой плоских сечений и вводя те же безразмерные величины, что и в п. 2, из (3.1') получим, что с точностью до постоянного множителя

$$(3.3) \quad J = \int_0^1 \left\{ \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_0} \dot{\xi} \dot{\sigma} + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_0} \dot{\xi} \dot{\rho} - \frac{n+2}{3} [\dot{\rho} \dot{\sigma} + \sigma^n (\dot{\sigma} + \dot{\rho})] \right\} d\xi$$

( $\sigma, \rho$  — безразмерные напряжения). Легко видеть, что условия стационарности (3.3), где независимыми переменными являются  $\dot{\psi}, \dot{\sigma}$  и  $\dot{\rho}$ , совпадают с соотношениями (2.1')—(2.3').

Пусть, как и прежде, остаточная кривизна нарастает с постоянной скоростью, т. е.  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ . Зададимся распределением напряжений в виде комбинации упругого ( $\sigma = \xi, \rho = 0$ ) и установившегося (2.9) с сохранением равенства (2.4):

$$(3.4) \quad \sigma = (\alpha + \gamma) \xi + \beta \xi^{1/n}, \quad \rho = \gamma \xi + \beta \xi^{1/n},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — неизвестные функции времени:

$$(3.5) \quad \alpha(0) = 1, \quad \gamma(0) = \beta(0) = 0.$$

Заметим, что при  $\tau \rightarrow \infty$   $\alpha = -\gamma = \frac{3n}{2n+1} \left( \frac{3}{n+2} \right)^{1/n}$ ,  $\beta = \left( \frac{3}{n+2} \right)^{1/n}$ , как это следует из (2.9).

Подставляя (3.4) в (3.3) и учитывая, что  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ , имеем

$$\begin{aligned} J &= \frac{\dot{\alpha} + \dot{\gamma}}{3} + \frac{n}{2n+1} \dot{\beta} + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_0} \left( \frac{\dot{\gamma}}{3} + \frac{n}{2n+1} \dot{\beta} \right) - \\ &- \frac{n+2}{3} \left[ \frac{\dot{\gamma}(\dot{\alpha} + \dot{\gamma})}{3} + \frac{n}{2n+1} \dot{\beta} (\dot{\alpha} + 2\dot{\gamma}) + \frac{n}{n+2} \dot{\beta}^2 \right] - \\ &- \frac{n+2}{3} \int_0^1 [(\alpha + \gamma) \xi + \beta \xi^{1/n}]^n [(\dot{\alpha} + 2\dot{\gamma}) \xi + 2\dot{\beta} \xi^{1/n}] d\xi. \end{aligned}$$



Приравнивая нулю вариацию  $\delta J$ , вычисленную в предположении, что независимо варьируются  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$  и  $\dot{\psi}$ , т. е. полагая  $\partial J/\partial \dot{\alpha} = \partial J/\partial \dot{\beta} = \partial J/\partial \dot{\gamma} = \partial J/\partial \dot{\psi} = 0$ , приходим к системе уравнений, которая после несложных преобразований примет вид

$$(3.6) \quad \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_0} = 1 + \frac{n+2}{3} \dot{\alpha}, \quad \dot{\gamma} = -\frac{3n}{2n+1} \dot{\beta}, \quad (n+2) \int_0^1 [(\alpha + \gamma) \xi + \beta \xi^{1/n}]^n \xi d\xi = 1,$$

$$\frac{n}{2n+1} - \frac{n(n-1)^2}{3(2n+1)^2} \dot{\beta} - \frac{n+2}{3} \int_0^1 [(\alpha + \gamma) \xi + \beta \xi^{1/n}]^n \xi^{1/n} d\xi = 0.$$

Согласно (3.5), первое из соотношений (3.6) эквивалентно (2.10), а второе — равенству  $\gamma = -3n\beta/(2n+1)$ , подставляя которое в оставшиеся два соотношения (3.6) и дифференцируя по  $\tau$  третье, получим систему уравнений относительно функций  $\alpha = \alpha(\tau)$  и  $\beta = \beta(\tau)$ :

$$(3.7) \quad \dot{\beta} = \frac{3(2n+1)^2}{n(n-1)^2} \left( \frac{n}{2n+1} - \frac{n+2}{3} \int_0^1 f_1^n \xi^{1/n} d\xi \right),$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} \left[ \int_0^1 \left( \frac{3n}{2n+1} \xi - \xi^{1/n} \right) f_1^{n-1} \xi d\xi \right] / \int_0^1 f_1^{n-1} \xi^2 d\xi$$

$$\left( f_1 = \alpha \xi + \beta \left( \xi^{1/n} - \frac{3n}{2n+1} \xi \right) \right).$$

Система (3.7) с начальными условиями (3.5) интегрировалась тем же методом и с тем же шагом  $\Delta\tau$ , что и система (2.8). На рисунке штриховыми линиями изображены графики  $\alpha = \alpha(\tau)$  при  $n = 3, 5, 9$ . (В силу равенства  $\gamma = -3n\beta/(2n+1)$  выполнено условие (2.3'), следовательно,  $\alpha$  имеет тот же смысл, что и в п. 2, т. е. характеризует изгибающий момент, поскольку  $\alpha = 3 \int_0^1 \sigma \xi d\xi$ .) Как видно из графиков, различие между значениями  $\alpha$ ,

отвечающими решению задачи в точной постановке и полученными с использованием смешанного вариационного принципа, небольшое, хотя и увеличивается с ростом  $n$ . Различие в эпюрах напряжений  $\sigma$  и  $\rho$  более заметно. Причем для решения, соответствующего системе (3.7), характерно более быстрое перераспределение напряжений от упругого до установившегося (2.9). Эти эпюры здесь не приводятся, так как нас интересует только  $\alpha$ , поскольку именно она характеризует искомое внешнее воздействие.

4. Как уже отмечалось выше, рассматриваемый класс обратных задач может быть распространен и на случай изгиба пластин при ползучести, когда прогибы много меньше толщины пластины. В частности, при обычных граничных условиях [2] может быть доказана теорема единственности решения задачи о нахождении внешних нагрузок, обеспечивающих заданный остаточный прогиб  $\tilde{w} = \tilde{w}(x_1, x_2, t)$ , если определяющие уравнения материала пластины имеют вид (1.1)–(1.3) с ограничением (1.4) и при  $t = 0$  заданы распределения деформаций ползучести  $\epsilon_{kl}^c$  и значений  $q_i$ . Доказательство повторяет приведенное в п. 1 с использованием уравнений виртуальных работ, полученного в [2].

Этот же класс задач допускает вариационную формулировку. Например, можно показать, что условия стационарности функционала (3.1), где второй интеграл надо опустить, а в первом распространить интегрирование по всему объему пластины, сведутся к следующим, записанным в скоростях равенствам: соотношениям (1.1), (1.6), уравнению равновесия

для моментов  $\tilde{M}_{kl}$ , отвечающих остаточным напряжениям ( $\tilde{M}_{kl, kl} = 0$ ),



к граничным условиям, соответствующим свободному от нагрузок контуру пластины после разгрузки.

Сложнее обстоит дело с геометрически нелинейными задачами, когда прогибы пластины могут значительно превышать ее толщину. Такого рода задачи встречаются в обработке материалов давлением в режиме ползучести, когда речь идет о получении заданных остаточных прогибов, которые и определяют в основном остаточную форму пластины [6]. В этом случае уже не удастся доказать теорему единственности, т. е. по заданным остаточным прогибам и граничным условиям, вообще говоря, нельзя однозначно восстановить внешние нагрузки. (Подобная ситуация имеет место и в прямых геометрически нелинейных задачах теории ползучести [7].) Тем не менее при некоторых ограничениях и эта обратная задача допускает вариационную формулировку, которую рассмотрим ниже.

Пусть пластина занимает область  $S$  плоскости  $x_1 O x_2$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ . Задача состоит в нахождении внешних сил, необходимых для получения текущего остаточного прогиба  $\tilde{w} = \tilde{w}(x_1, x_2, t)$ ,  $\tilde{w}(x_1, x_2, 0) = 0$ . Предположим, что эти внешние нагрузки невелики, так что упругое «аспружинивание» [2, 6]  $w_* = w - \tilde{w}$  много меньше  $\tilde{w}$ . Тогда для текущих и остаточных деформаций имеем [2]

$$4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{kl} = (1/2)(u_{k,l} + u_{l,k}) + (1/2)(\tilde{w} + w_*)_{,k}(\tilde{w} + w_*)_{,l} - \\ - z(\tilde{w} + w_*)_{,kl} \approx (1/2)(u_{k,l} + u_{l,k}) + (1/2)(\tilde{w}_{,k}\tilde{w}_{,l} + \tilde{w}_{,k}w_{*,l} + \\ + \tilde{w}_{,l}w_{*,k}) - z(\tilde{w} + w_*)_{,kl}, \quad \tilde{\varepsilon}_{kl} = (1/2)(\tilde{u}_{k,l} + \tilde{u}_{l,k}) + \\ + (1/2)\tilde{w}_{,k}\tilde{w}_{,l} - z\tilde{w}_{,kl} \quad (k, l = 1, 2) \end{aligned}$$

$\tilde{u}_k$ ,  $\tilde{u}_k$  — компоненты текущих и остаточных перемещений в плоскости пластины).

Заметим, что предположение  $|w_*| \ll |\tilde{w}|$  неверно при малых значениях  $t$ . Однако в силу малости внешних сил основной вклад в деформацию дают давать изгибные деформации, а нелинейными членами в (4.1) при малых  $t$  можно пренебречь, т. е.

$$(\tilde{w} + w_*)_{,k}(\tilde{w} + w_*)_{,l} \approx \tilde{w}_{,k}\tilde{w}_{,l} + \tilde{w}_{,k}w_{*,l} + \tilde{w}_{,l}w_{*,k} \approx 0.$$

Предположим, что на контуре  $\Gamma$  заданы остаточные перемещения  $u_k^*$ . Тогда функционал, аналогичный (3.1), запишем в виде

$$2) \quad \begin{aligned} J = \int_{-h/2}^{h/2} \int_S [\dot{\varepsilon}_{kl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\varepsilon}_{kl}\dot{\rho}_{kl} + \rho_{kl}\dot{w}_{,k}\dot{w}_{,l} - a_{klmn}\dot{\rho}_{kl}\dot{\sigma}_{mn} - \\ - \eta_{kl}(\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\rho}_{kl})] dx_1 dx_2 dz - \int_{\Gamma} \dot{p}_k (\dot{u}_k - \dot{u}_{k*}) ds, \end{aligned}$$

$h$  — толщина пластины;  $s$  — длина дуги контура  $\Gamma$ ;  $\varepsilon_{kl}$  и  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$  определены в (4.1). В (4.2) суммирование по повторяющимся индексам ведется от 1 до 2.

В функционале (4.2) независимо варьируются  $\dot{\sigma}_{kl}$ ,  $\dot{\rho}_{kl}$ ,  $\dot{u}_k$ ,  $\dot{u}_{k*}$  и  $\dot{w}_*$ . Взяв функциональную выкладку, аналогичные изложенным в [2, 5], приведем окончательное выражение

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{-h/2}^{h/2} \int_S [(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - a_{klmn}\dot{\rho}_{mn} - \eta_{kl})\delta\dot{\sigma}_{kl} + (\dot{\varepsilon}_{kl} - a_{klmn}\dot{\sigma}_{mn} - \eta_{kl}) \times \\ \times \delta\dot{\rho}_{kl}] dx_1 dx_2 dz - \int_S \{ \dot{N}_{kl,l}\delta\dot{u}_k + \dot{N}_{kl,i}\delta\dot{u}_k + [(\dot{N}_{kl,i}\tilde{w}_{,k}) \cdot + \\ + (\dot{N}_{kl}\tilde{w}_{,kl} + \dot{M}_{kl,kl}) \cdot] \delta\dot{w}_* \} dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} \{ (\dot{N}_{kl}n_l - \dot{p}_k) \delta\dot{u}_k + \dot{N}_{kl}n_l\delta\dot{u}_k + \\ + [(\dot{N}_{kl}n_l\tilde{w}_{,k}) \cdot + \dot{Q} + \partial\dot{H}/\partial s] \delta\dot{w}_* - \dot{G}\delta\dot{w}_*/\partial n - (\dot{u}_k - \dot{u}_{k*}) \delta\dot{p}_k \} ds. \end{aligned}$$

Здесь  $N_{kl}$  — мембранные усилия, отвечающие полю  $\sigma_{kl}$ ;  $\tilde{N}_{kl}$  и  $\tilde{M}_{kl}$  — мембранные усилия и моменты, соответствующие полю  $\rho_{kl}$ ;  $\tilde{Q} = \tilde{M}_{kl}n_l$ ,  $\tilde{H} = \tilde{M}_{kl}n_k t_l$ ;  $\tilde{G} = \tilde{M}_{kl}n_k n_l$ ;  $n_k, t_k$  ( $k = 1, 2$ ) — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру  $\Gamma$ .

Следовательно, равенство  $\delta J = 0$  эквивалентно физическим уравнениям (1.1) и (1.6) в скоростях, уравнениям равновесия для текущих остаточных величин

$$(4.3) \quad \dot{N}_{kl,l} = \dot{\tilde{N}}_{kl,l} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{N}_{kl} \tilde{w}_{,kl} + \tilde{M}_{kl,k l})' = 0;$$

граничным условиям на  $\Gamma$

$$(4.4) \quad \dot{N}_{kl} n_l = \dot{\tilde{N}}_{kl} n_l = 0, \quad \dot{Q} + \partial \dot{H} / \partial s = \dot{G} = 0, \quad \dot{u}_k = \dot{u}_{k*} \quad (k = 1, 2)$$

В (4.3), (4.4) использовались равенства  $\tilde{N}_{kl,l} = 0$  и  $\tilde{N}_{kl} n_l = 0$  на  $\Gamma$  при  $t = 0$ . В частности, из граничных условий вытекает, что после разгрузки контур  $\Gamma$  полностью свободен от внешних нагрузок.

Если остаточные перемещения  $\tilde{u}_k$  не заданы на  $\Gamma$ , то в (4.2) надо опустить интеграл по  $\Gamma$ . В этом случае равенство  $\delta J = 0$  эквивалентно тем же соотношениям (1.1), (1.6) в скоростях и уравнениям равновесия (4.3), а в граничных условиях (4.4) надо убрать последнее, а первое изменить на  $\dot{N}_{kl} n_l = 0$ .

Нахождение начального поля напряжений  $\sigma_{kl0}$ , как и в п. 3, сводит к минимизации функционала типа (3.2) при условии существования потенциал ползучести  $\Phi = \Phi(\sigma_{kl}, q_i)$ . При этом, как уже отмечалось выше, считаем, что при  $t = 0$  нагрузки малы и основными будут деформации изгиба, т. е. деформациями срединной плоскости пластины пренебрегаем. Повторяя ход рассуждений п. 3 и используя уравнение виртуальных работ из [2], легко показать, что среди всех возможных упругих полей напряжений истинное начальное напряженное состояние  $\sigma_{kl0}$  минимизирует функционал

$$(4.5) \quad J_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_S \Phi(\sigma_{kl0}) dx_1 dx_2 dz - \int_S \dot{w}_0 q_0 dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} [(Q_0 + \partial H_0 / \partial s) \dot{w}_0 - G_0 \partial \dot{w}_0 / \partial n] ds,$$

где  $q_0 = -M_{kl0,k l}$ ;  $Q_0, H_0, G_0$  выражаются через  $M_{kl0}$  соотношениями, приведенными выше;  $M_{kl0}$  — моменты, отвечающие полю  $\sigma_{kl0}$ ;  $\dot{w}_0$  — заданная начальная скорость изменения остаточного прогиба. При выводе (4.5) использовались равенства  $\dot{Q} + \partial \dot{H} / \partial s = \dot{G} = 0$  на  $\Gamma$  при  $t = 0$ , которые, в частности, входят в (4.4) и соответствуют свободному от нагрузок контуру после разгрузки.

Таким образом, рассмотренный класс обратных задач теории ползучести о нахождении внешних нагрузок, которые обеспечивают заданную остаточную форму тела или пластины, допускает вариационную формулировку как в геометрически линейной, так и (при дополнительных предположениях о малости внешних нагрузок) нелинейной постановке. Это является основой для построения алгоритмов численного решения подобных задач, которые относятся к задачам обработки материалов давлением в режиме ползучести.

Автор благодарит И. В. Сухорукова за проведенные вычисления на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цвелодуб И. Ю. Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела. Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГи СО АН СССР. — 1984. — Вып. 1.
2. Цвелодуб И. Ю. Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести. Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 5.

3. Цвелодуб И. Ю. Обратная задача о деформировании мембраны в условиях ползучести // ПМТФ.— 1985.— № 5.
4. Цвелодуб И. Ю. Об одной обратной задаче теории ползучести // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1987.— № 3.
5. Цвелодуб И. Ю. Об одной обратной задаче изгиба пластин при ползучести // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР.— 1987.— Вып. 80.
6. Цвелодуб И. Ю. Об оптимальных путях деформирования в условиях ползучести. Некоторые приложения к задачам обработки материалов давлением // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 6.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
8. Цвелодуб И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1987.

Поступила 12/VII 1988 г.

УДК 533.6.011 : 533.231.4

### ВЛИЯНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА НА РАДИАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗРЫВА ВВ В ВОЗДУХЕ

*В. Б. Рождественский, Б. Д. Христофоров, В. Л. Юрьев*  
(Москва)

В [1] теоретически показано, что граница раздела между продуктами взрыва ПВ и газом за фронтом ударной волны (УВ) размывается, когда плотность ПВ существенно выше плотности газа, из-за развития неустойчивости Рэля — Тейлора. В [2] исследовано ее влияние на параметры ионизированного газа в экспериментах с цилиндрическим взрывом. Показано, что из-за перемешивания ПВ и нагретого газа а фронтом УВ его электропроводность может снижаться на два порядка. Из-за большой оптической прозрачности воздуха в УВ при низких температурах [3, 4] его перемешивание с непрозрачными ПВ может существенно изменить оптические и радиационные характеристики взрыва. В связи с этим проведены экспериментальные исследования радиационных характеристик взрыва в воздухе сферических зарядов ВВ различного состава ПВ.

Опыты проводились во взрывной камере объемом около 100 м<sup>3</sup> с прессованными зарядами тэна плотностью 1,6 г/см<sup>3</sup> и массой 2,8 и 11 г, ТГ 50×50 плотностью 1,45 г/см<sup>3</sup> и массой 11 г. Детонатором служила галая навеска азиды свинца, помещенная в центре заряда. ПВ тэна газобразны из-за положительного кислородного баланса ВВ, а у ТГ 50×50 ни содержат твердый углерод [5].

Развитие светящейся области взрыва фотографировалось высокоскоростной камерой СФР-2М в варианте лупы времени. При взрыве тэна также проводилась фотографическая регистрация в параллельном пучке проходящего света теневым методом. Для измерения излучаемой взрывом энергии в функции времени применялись пироэлектрические датчики равномерной спектральной чувствительностью в диапазоне от 0,04 до 1 мкм [6]. Погрешность таких измерений около 10%. На рис. 1, а — приведены фотографии развития взрывов тэна массой 2,8 г, тэна и ТГ 0×50 массой 11 г соответственно. Время между кадрами на рис. 1, б, в — 6 мкс. На теневой фотографии (рис. 1, а) отчетливо видны границы непрозрачной области, занятой ПВ, а светящаяся собственным светом область неоднородна, причем свечение дольше происходит по краям кадра, где больше толщина сжатого в УВ газа. Поэтому на снимке (рис. 1, б) варианте лупы времени светящаяся область быстро принимает форму ольца. При взрыве ТГ 50×50 (рис. 1, в) источник излучения в отличие от взрыва тэна имеет форму круга.

Различие в характере свечения взрывов тэна и ТГ 50×50 указывает на то, что последний ближе к черному излучателю. Перемешивание ПВ воздухом за фронтом УВ, начинающееся вследствие неустойчивости Рэля — Тейлора, фактически является единственным процессом, который может приводить к отмеченному эффекту. Согласно [7], температура ПВ меньше, чем воздуха в УВ. Поэтому при перемешивании температу-