

УДК 532.5

ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Ильин, Б. Л. Смородин

Пермский государственный университет, 614990 Пермь

E-mails: ilin1@psu.ru, smorodin@psu.ru

Изучена конечно-амплитудная эволюция электроконвективных структур слабопроводящей жидкости, в которой действует электрокондуктивный механизм зарядообразования. Жидкость находится в постоянном электрическом поле горизонтально расположенного конденсатора и подогревается снизу, время релаксации заряда значительно меньше характерного гидродинамического времени. Рассмотрено взаимодействие электрокондуктивной и термогравитационной конвекций. Для исследования эволюции надкритических структур используется прямое численное моделирование, основанное на методе конечных разностей. Выполнен анализ бифуркаций, приводящих к образованию стационарных и волновых течений жидкости. Определены и изучены нелинейные режимы стационарной конвекции и бегущих волн, имеющих различный пространственно-временной характер.

Ключевые слова: электроконвекция, слабопроводящая жидкость, электрокондуктивная неустойчивость, нелинейные режимы.

Введение. Электрическое поле может оказывать существенное влияние на конвективные движения слабопроводящих жидкостей вследствие проявления специфической электроконвективной неустойчивости [1, 2]. При исследовании слабопроводящих жидкостей в электрических полях представляет интерес изучение возможности управления поведением этих жидкостей и влияния их на протекание токов и теплоперенос в высоковольтных устройствах. В данной работе рассматривается взаимодействие термогравитационной неустойчивости [3] и электрокондуктивной — одного из видов электрической неустойчивости, связанной с образованием заряда вследствие различия электропроводности жидкости вблизи горячего и холодного электродов [4]. Как известно, в случае электрокондуктивной неустойчивости конвекция в постоянном электрическом поле возникает вследствие возбуждения колебаний [5, 6]. При этом частота нейтральных колебаний жидкого диэлектрика зависит от его электрофизических свойств. С использованием методов маломодового анализа исследованы нелинейные режимы электроконвекции в переменном электрическом поле горизонтально расположенного конденсатора в случае слабопроводящей жидкости [7] и идеального жидкого диэлектрика [8]. При этом обнаружены различные режимы регулярных и хаотических колебаний.

В данной работе представлены результаты прямого численного моделирования динамики нелинейных электроконвективных структур, возникающих в результате монотонной или колебательной неустойчивости слабопроводящей жидкости в постоянном поле.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, находящейся в постоянном вертикальном электрическом

поле \mathbf{E} и поле силы тяжести \mathbf{g} . Ось x направлена вдоль нижней границы слоя, ось z — перпендикулярно границам слоя. Положение идеально тепло- и электропроводящих пластин конденсатора, нагретых до разной температуры: $T(0) = \Theta$, $T(h) = 0$, соответствует координатам $z = 0, h$ (h — толщина слоя; T — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения; Θ — характерная разность температур). Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу. Потенциал поля верхней границы $\varphi(h) = 0$, потенциал поля нижней границы $\varphi(0) = U$.

Поведение слабопроводящей жидкости в электрическом поле будем изучать в рамках электрогидродинамического приближения [6]. При небольшом различии температур на границах слоя неоднородность электропроводности линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T)$ ($\beta_\sigma > 0$ — температурный коэффициент электропроводности). В этом случае конвекция может возникать вследствие действия электрокондуктивной неустойчивости, что обуславливает накопление объемного электрического заряда, который взаимодействует с внешним электрическим полем и может приводить жидкость в движение (даже в условиях невесомости).

В общем виде выражение для электрической силы, действующей на единицу объема слабопроводящей жидкости, имеет вид

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right). \quad (1)$$

Движение жидкости может вызвать только первая часть силы (первое слагаемое в (1)) — сила Кулона, зависящая от свободного объемного заряда. Вторая (диэлектрофоретическая) часть (второе слагаемое в выражении (1)), связанная с неоднородностью диэлектрической проницаемости ε , несущественна. Использование такого подхода оправдано физическими свойствами используемых в экспериментах жидкостей, электропроводность которых зависит от температуры значительно сильнее, чем диэлектрическая проницаемость. Третья часть силы (третье слагаемое в (1)) переопределяет гидростатическое давление. Кроме того, предположим, что максимальная разность потенциалов на пластинах конденсатора не превышает критического значения U_* , начиная с которого влияние инжекции на движение жидкости существенно [2]. Исследуем электроконвекцию в рамках приближения Буссинеска, считая, что ее возникновение вызвано пространственной неоднородностью плотности ρ и электропроводности σ жидкости. В уравнении теплопроводности будем пренебрегать вязкой диссипацией и джоулевым нагревом [6].

Задача решается в безразмерных переменных, нормированных следующим образом: время t отнесено к величине $\rho_0 h^2 / \eta$, расстояние r — к h , скорость v — к χ / h , температура T — к Θ , потенциал φ — к U , напряженность поля E — к U/h , давление p — к $\eta \chi / h^2$, плотность заряда ρ_e — к $\varepsilon U / h^2$. Здесь ρ_0 — плотность покоящейся жидкости; η — динамическая вязкость; χ — температуропроводность.

Условие $\beta_\sigma \ll 1$ позволяет использовать безындукционное приближение. При таком подходе из рассмотрения исключается электрическое поле, возникающее при перераспределении заряда в жидкости в процессе электроконвективных движений, малое по сравнению с внешним электрическим полем.

Систему уравнений электроконвекции слабопроводящей жидкости запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{R}_\sigma \rho_e \boldsymbol{\gamma} + \text{R} T \boldsymbol{\gamma}, \\ \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T &= \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho_e + \rho_e + \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$R = \frac{\rho_0 g \beta \Theta h^3}{\eta \chi}, \quad R_\sigma = \frac{\beta_\sigma \Theta \varepsilon U^2}{\eta \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho_0}, \quad \text{Pr}_e = \frac{\varepsilon \eta}{h^2 \rho_0 \sigma_0},$$

где R , R_σ — тепловое и электрическое числа Рэлея соответственно; Pr , Pr_e — тепловое и электрическое числа Прандтля соответственно; β — коэффициент теплового расширения жидкости; γ — единичный вектор, направленный вверх.

В случае твердых идеально тепло- и электропроводящих обкладок конденсатора граничные условия имеют вид

$$z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 1, \quad \varphi = 1, \quad z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0. \quad (3)$$

Будем рассматривать периодические вдоль оси x решения с периодом $L = 2\pi/k$, в которых скорость, температура и плотность заряда зависят только от двух координат: вертикальной и горизонтальной (k — волновое число критических возмущений). В плоскости (x, z) введем функцию тока ψ и вихрь скорости Φ :

$$v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \Phi = \Delta \psi.$$

Рассмотрим случай мгновенной релаксации электрического заряда ($\text{Pr}_e = 0$), который реализуется, когда время релаксации электрического заряда значительно меньше характерного гидродинамического времени. В данном случае система уравнений электротермической конвекции слабопроводящей жидкости (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + R_\sigma \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + R \frac{\partial T}{\partial x} + \Delta \Phi, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \Delta T \right), \quad \rho_e = -\frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия (3), записанные в терминах функции тока, имеют вид

$$z = 0: \quad \psi = 0, \quad \psi' = 0, \quad T = 1, \quad z = 1: \quad \psi = 0, \quad \psi' = 0, \quad T = 0. \quad (5)$$

Для периодических вдоль горизонтальной оси x решений на вертикальных границах все функции, характеризующие нелинейное движение, удовлетворяют условиям $f(x+L, z, t) = f(x, z, t)$. Для численного решения задачи (4), (5) применялся метод дробных шагов, уравнение Пуассона решалось методом последовательной верхней релаксации, условия, налагаемые на вихрь скорости, записывались с использованием формулы Тома [9].

В начальном состоянии для вихря скорости в двух точках ячейки задавались значения завихренности, соответствующие вращению жидкости в противоположных направлениях, а для функции тока, температуры и плотности заряда принимались равновесные распределения. Для построения решений с новым набором параметров использовался метод продолжения по параметру. В случае стационарных режимов решение получалось методом установления. Для выявления существования бегущих в слое волн определялась эволюция значений максимальной функции тока в ячейке и функции тока в некоторой точке внутри слоя.

2. Стационарные и волновые режимы электроконвекции. На рис. 1 приведена зависимость критического значения электрического числа Рэлея R_σ от теплового числа Рэлея R . Данные для монотонной моды взяты из работы [6], данные для колебательной моды при $\text{Pr} = 1$ получены в расчете методом Рунге — Кутты. С увеличением числа Рэлея критическое значение электрического числа Рэлея R_σ , соответствующее колебательной неустойчивости (1), уменьшается, а критическое значение R_σ , соответствующее монотонной моде неустойчивости (2), увеличивается. Область устойчивости находится между кривыми и осями координат. Согласно линейной теории в случае $R = 2500$ электрическое поле

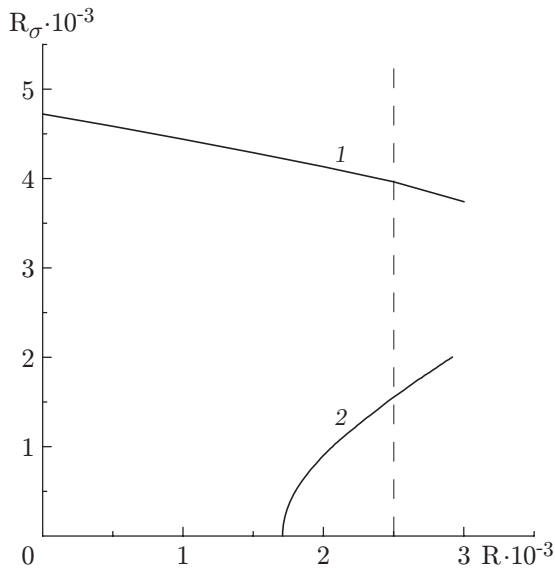


Рис. 1

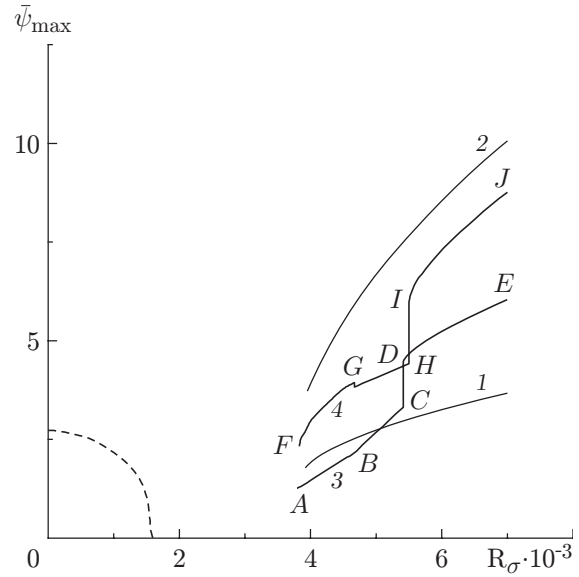


Рис. 2

Рис. 1. Области устойчивости на плоскости параметров (R, R_σ) при $Pr = 1$:

1 — граница области колебательной неустойчивости, 2 — граница области монотонной неустойчивости

Рис. 2. Режимы электроконвекции при $Pr = 1, R = 2500$:

штриховая линия — монотонный режим; 1, 2 — $L_0 = 1,54$ (1 — волна, бегущая вправо; 2 — волна, бегущая влево); 3, 4 — $L = 3,08$ (3 — волна, бегущая вправо; 4 — волна, бегущая влево)

подавляет монотонный режим конвекции при $R_\sigma = 1550,3$ и в жидкости устанавливается равновесное состояние, при этом критическое волновое число $k = 2,48$ ($L_0 = 2,53$). С увеличением напряженности электрического поля (при $R_\sigma = 3962,5$) в жидкости возникает неустойчивость и появляется колебательный режим конвекции с волновым числом $k = 4,08$ ($L_0 = 1,54$) и частотой $\nu = 6,39$.

Расчеты нелинейных электроконвективных движений, устанавливающихся в горизонтальном слое, проведены при значениях $Pr = 1, R = 2500$ (штриховая линия на рис. 1) для ячеек с размером вдоль оси x $L_0 = 2\pi/k$ и $L = 2L_0$ (k — волновое число критических возмущений, определяемых по линейной теории). В расчетах использовалась прямоугольная сетка 41×21 . В проверочных расчетах на сетке 81×41 получены интегральные характеристики, отличающиеся от найденных на сетке 41×21 не более чем на 10 %, при этом структура течений не изменилась. Для монотонного режима выбирался размер расчетной ячейки $L_0 = 2,53$, для колебательного режима рассматривалась ячейка длиной $L_0 = 1,54$ или $L = 2L_0 = 3,08$.

Прежде всего, при различных значениях электрического числа Рэлея были проведены вычисления с начальными условиями в виде двух вихрей в ячейке. При этом в соответствии с предсказаниями линейной теории обнаружены стационарный и волновой режимы. Затем определялись области существования этих режимов в пространстве параметров. В качестве переменной, характеризующей конвективные режимы, использовалось среднее за период значение максимальной функции тока $\bar{\psi}_{\max}$.

На рис. 2 представлена зависимость $\bar{\psi}_{\max}$ от электрического числа Рэлея, характеризующая стационарные и волновые режимы, устанавливающиеся в слое слабопроводящей жидкости. В отсутствие электрического поля ($R_\sigma = 0$) при закритическом нагреве

в слое имеет место стационарная термогравитационная конвекция, интенсивность которой с ростом напряженности электрического поля уменьшается (максимальная функция тока уменьшается (штриховая линия на рис. 2)). Функция тока обращается в нуль при $R_\sigma = 1560$ (это значение получено экстраполяцией зависимости ψ_{\max}^2 на равновесные значения). В некотором интервале $R_\sigma > 1560$ жидкость находится в состоянии равновесия. Это свидетельствует о бифуркации стационарных течений относительно положения равновесия при уменьшении электрического поля. Пороговое значение R_σ , при котором возникает монотонный режим, отличается от значения $R_\sigma = 1550,3$, полученного с использованием линейной теории, на 0,7 %.

Для ячейки L_0 вблизи порога колебательной конвекции при $R_\sigma = 3950$ (согласно линейной теории при $R_\sigma = 3962,5$) имеет место длительный переходный процесс. При этом частота колебаний функции тока $\nu = 6,22$ в любой фиксированной точке конвективной ячейки отличается от значения $\nu = 6,39$, полученного с использованием линейной теории, на 2,7 %. По завершении переходного процесса устанавливается двухвихревое движение с другой (меньшей) частотой. Обнаружено, что установившимся колебаниям соответствуют бегущие волны (кривые 1–4 на рис. 2). Пространственная структура волн, распространяющихся в разных направлениях (кривые 1, 2 или кривые 3, 4), зеркально симметрична относительно вертикальной плоскости, поэтому кривым 2, 4 на рис. 2 соответствует также абсолютное значение отрицательной функции тока для бегущей вправо волны (кривые 1, 3).

Волны, которым на рис. 2 соответствуют кривые 1, 2, имеют постоянную амплитуду. Вследствие действия сил Кулона зеркальная симметрия каждого вихря относительно вертикальной плоскости нарушена. Кроме того, интенсивность соседних вихрей, вращающихся по часовой стрелке и против нее, неодинакова, что соответствует трансляционно-симметричным режимам, воспроизводящимся при сдвиге этих вихрей вдоль слоя на длину L_0 .

На рис. 3 представлены изолинии функции тока для режима, которому на рис. 2 соответствует кривая 1, при $R_\sigma = 4000$. Со временем изолинии смещаются вправо. С увеличением электрического числа Рэлея увеличивается интенсивность движения: растут функция тока, безразмерный теплоперенос и другие интегральные характеристики. Частота колебаний также увеличивается, достигая значения $\nu = 6,1$ при $R_\sigma = 7000$.

В ячейке L помимо трансляционно-симметричных режимов обнаружены режимы с более сложным пространственно-временным поведением — асимметричные волны (кривые 3, 4 на рис. 2).

При уменьшении электрического числа Рэлея первый режим (кривая 1 на рис. 2) существует до значения $R_\sigma = 3922$, при этом частота колебаний функции тока в фиксиро-

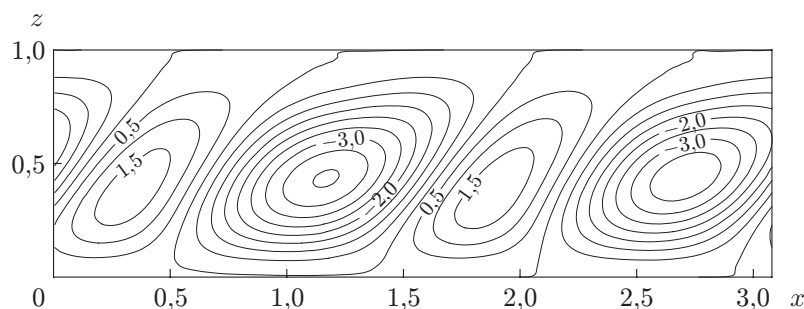


Рис. 3. Поле функции тока для трансляционно-симметричного режима (кривая 1 на рис. 2) при $R_\sigma = 4000$

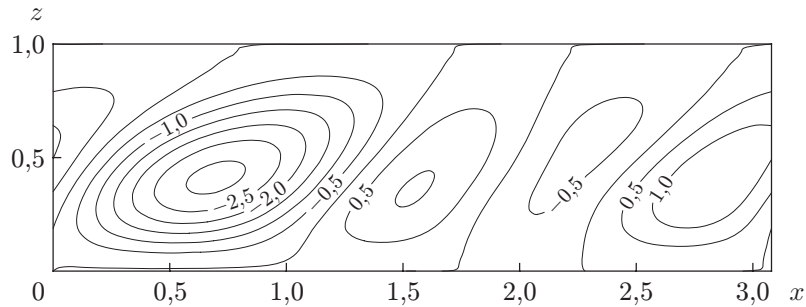


Рис. 4. Поле функции тока для трансляционно-асимметричного режима (кривая 3 на рис. 2) при $R_\sigma = 4000$

ванной точке ячейки равна $\nu = 5,18$. При $R_\sigma < 3922$ по окончании длительного переходного процесса происходит выход на режим, которому соответствует кривая 3 на рис. 2. Асимметричные режимы характеризуются тем, что на длине L ячейки вихри не воспроизводятся дважды. В качестве примера на рис. 4 приведены изолинии функции тока для третьего режима (кривая 3 на рис. 2) при $R_\sigma = 4000$. Видны два вихря различной интенсивности, вращающиеся по часовой стрелке, и два вихря, вращающиеся против часовой стрелки. Данному режиму соответствует бегущая вправо волна. Методом продолжения по параметру обнаружено, что область существования третьего режима в пространстве параметров ограничена снизу значением $R_\sigma = 3796$, при котором среднее за период значение максимальной функции тока равно $\bar{\psi}_{\max} = 1,26$.

При $R_\sigma < 3796$ колебания функции тока затухают, она обращается в нуль, при этом устанавливается равновесное состояние, что свидетельствует о жестком характере (бифуркация Хопфа) возникновения конвекции. Пороговое значение R_σ , при котором возникает колебательный режим, отличается от значения $R_\sigma = 3962,5$, полученного с использованием линейной теории, на 4 %.

Вычисления показали, что при уменьшении электрического числа Рэлея режим, которому соответствует бегущая влево волна (кривая 2 на рис. 2), существует до значения $R_\sigma = 3954$, при этом частота колебаний функции тока $\nu = 5,21$. При $R_\sigma < 3954$ по завершении переходного процесса волновое движение выходит на четвертый режим (кривая 4 на рис. 2). На верхней границе исследуемого интервала ($R_\sigma = 7000$) частота колебаний функции тока, соответствующая кривой 2 на рис. 2, равна $\nu = 6,06$. Методом продолжения по параметру обнаружено, что область существования четвертого режима в пространстве параметров ограничена снизу значением $R_\sigma = 3830$. При $R_\sigma < 3830$ устанавливается равновесное состояние.

Небольшое различие значений R_σ , характеризующих бегущие в противоположных направлениях волны, обусловлено, по-видимому, конкретной реализацией численного алгоритма моделирования.

Для асимметричных режимов в зависимости от значения электрического числа Рэлея R_σ существуют движения трех типов, имеющие различный пространственно-временной характер.

Движение первого типа представляет собой амплитудно-модулированную бегущую волну (участки AB , FG кривых 3, 4 на рис. 2). Особенностью этого режима является то, что при фиксированном значении электрического числа Рэлея R_σ , соответствующем участкам AB , FG , общее число вихрей и структура полей в слое с течением времени не меняются. Вихри смещаются вправо или влево, при этом изменяется лишь их интенсивность — вихри “дышат”. Изменение структуры полей функции тока для движений

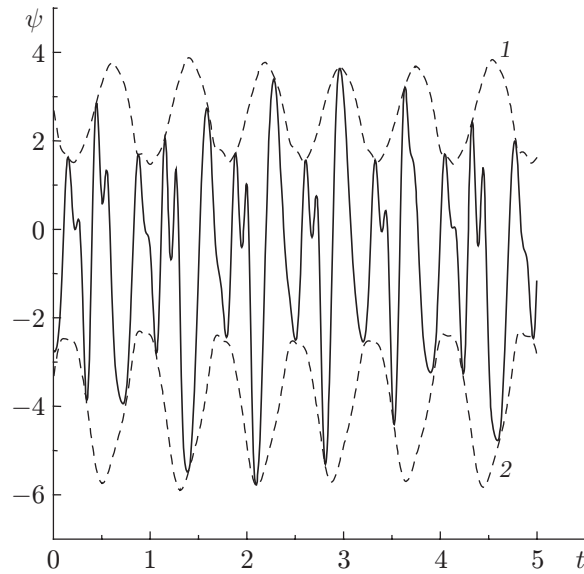


Рис. 5. Зависимость $\psi(t)$ при $R_\sigma = 5000$:

сплошная линия — амплитудно-модулированная бегущая волна (участок BC кривой 3 на рис. 2); штриховые линии — значения функции тока (1 — максимальные, 2 — минимальные)

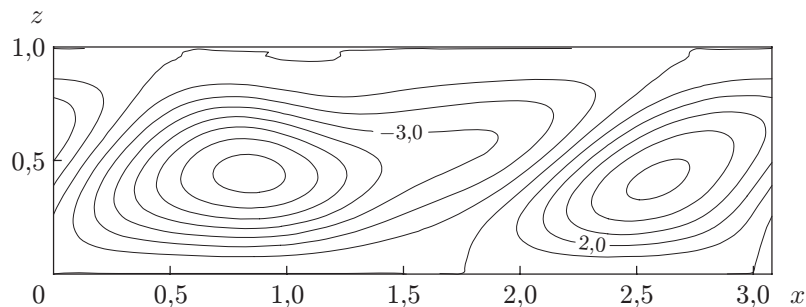


Рис. 6. Поле функции тока для третьего режима при $R_\sigma = 6000$ (участок DE кривой 3 на рис. 2)

этого типа обусловлено увеличением значения R_σ . В качестве примера рассмотрим эволюцию амплитудно-модулированной волны, которой соответствует кривая 3 на рис. 2. При $R_\sigma = 3796$ в слое существует четыре вихря: два почти симметричных небольших положительных вихря (вращающихся против часовой стрелки) и два больших отрицательных вихря (вращающихся по часовой стрелке). При $R_\sigma = 3900$ один из отрицательных вихрей начинает уменьшаться, а при $R_\sigma = 4500$ окружающие его положительные вихри сливаются, в результате чего в слое остается три вихря.

Движение второго типа на участках BC , GH (кривые 3, 4 на рис. 2) имеет более сложный пространственно-временной характер: это амплитудно-модулированная бегущая волна с изменяющейся с течением времени структурой полей (при движении происходит переход от двухвихревой структуры к четырехвихревой). На рис. 5 показана эволюция функции тока в фиксированной точке ($x = L/4$, $z = 1/2$), а также максимальные и минимальные значения функции тока в ячейке при $R_\sigma = 5000$.

На участках DE , IJ кривых 3, 4 на рис. 2 реализуется волновое движение третьего типа: в слое распространяется волна с постоянной амплитудой. Поле функции тока представлено на рис. 6. Видны два вихря: положительный и вытянутый в направлении

оси x отрицательный, структура поля с течением времени не меняется, при этом вихри смещаются вправо. Между участками BC и DE на рис. 2 переход происходит жестко, кроме того, обнаружен гистерезисный переход: при движении в пространстве параметров слева направо переход на верхний участок происходит при $R_\sigma = 5444$, а при движении в противоположном направлении переход с верхнего участка на нижний происходит при $R_\sigma = 5414$.

Закключение. В работе исследованы нелинейные электроконвективные движения слабопроводящей жидкости, в которой действует электрокондуктивный механизм неустойчивости, в постоянном электрическом поле горизонтально расположенного конденсатора при подогреве снизу.

В результате эволюции колебаний в слое устанавливаются бегущие волны. В ячейке L_0 обнаружены две бегущие волны, которые дважды воспроизводятся в ячейке $L = 2L_0$, — трансляционно-симметричные режимы. Кроме того, в ячейке L существует еще два асимметричных колебательных режима. Помимо бегущих волн с постоянной амплитудой обнаружены амплитудно-модулированные бегущие волны с неизменной или перепадающей структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Castellanos A., Atten P., Velarde M. G.** Oscillatory and steady convection in dielectric liquid layers subjected to unipolar injection and temperature gradient // *Phys. Fluids*. 1984. V. 27, N 7. P. 1607–1615.
2. **Остроумов Г. А.** Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979.
3. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуковицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.
4. **Gross M. J., Porter J. E.** Electrically induced convection in dielectric liquids // *Nature*. 1966. V. 212, N 5068. P. 1343–1345.
5. **Turnbull R. J.** Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. 2. Experimental results // *Phys. Fluids*. 1968. V. 11, N 12. P. 2597–2603.
6. **Болога М. К.** Электроконвекция и теплообмен / М. К. Болога, Ф. П. Гросу, И. А. Кожухарь. Кишинев: Штиинца, 1977.
7. **Ильин В. А., Смородин Б. Л.** Нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 8. С. 81–87.
8. **Ильин В. А., Смородин Б. Л.** Периодические и хаотические режимы электроконвекции жидкого диэлектрика в горизонтальном конденсаторе // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31, вып. 10. С. 57–63.
9. **Тарунин Е. Л.** Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1990.

Поступила в редакцию 16/VII 2007 г.