

УДК 532.536

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ*

Е.А. ДЕМЕХИН¹, Е.Н. КАЛАЙДИН¹, Е.М. ШАПАРЬ¹, С. КАЛЛИАДАСИС²

¹Кубанский государственный университет, Краснодар

²Факультет механики жидкости Королевского колледжа
химических технологий, Лондон

Проведен анализ устойчивости плоско-параллельного течения вязкой жидкости по наклонной плоскости на основе линеаризованных уравнений Рейнольдса для турбулентного течения. Получена зависимость критического числа Фруда и поверхностной скорости от числа Рейнольдса и угла наклона канала. Определены границы значений числа Фруда от 1,2 до 1,5, при которых происходит потеря устойчивости плоско-параллельного течения.

В исследованиях катящихся волн существует множество теоретических открытых вопросов, таких как развитие волн из малых естественных возмущений, их устойчивость. Задача о линейной неустойчивости плоского течения при турбулентном режиме течения рассматривалась только на базе упрощенных гидравлических уравнений и поэтому требует более углубленного исследования.

Применяемый ранее подход для описания турбулентного режима течения, основанный на усреднении уравнений движения и применении эмпирической формулы Шэзи [1], определяет зону неустойчивости при числах Фруда $Fr > 2$ (скорость поверхностных волн равна 1,5). Эти результаты не соответствуют экспериментальным данным [2], которые указывают на возникновение неустойчивости гораздо раньше при $Fr \approx 1$.

Задача настоящей работы — исследование устойчивости турбулентного потока в каналах к поверхностному типу возмущений на базе системы уравнений Рейнольдса с турбулентной вязкостью, а также получение критических параметров неустойчивости течения по отношению к поверхностным волнам.

Рассматривается задача о стекании пленки жидкости по наклонной плоскости (рис. 1). Двумерное течение вязкой турбулентной жидкости по наклонной плоскости под углом θ к горизонту описывается системой уравнений с граничными условиями в безразмерном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\sin \theta}{Fr^2},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS OPEN-99 (грант № 1107).

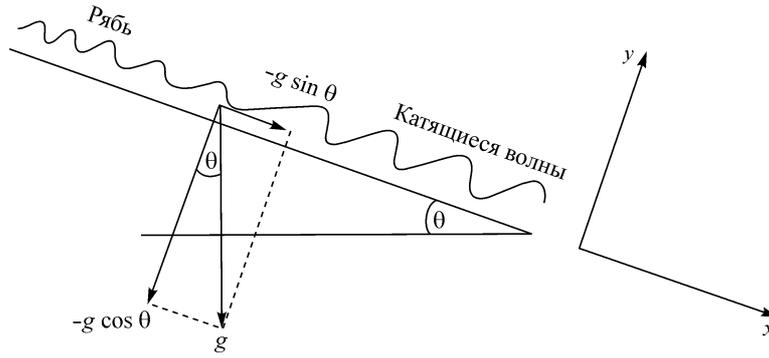


Рис. 1. Пленка жидкости, стекающая по наклонной плоскости.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\cos \theta}{Fr^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$y = h(x, t): -p + \tau_{xx} n_x^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + \tau_{yy} n_y^2 = 0,$$

$$(\tau_{xx} - \tau_{yy}) n_x n_y + \tau_{xy} (n_y^2 - n_x^2) = 0, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$y = 0: u = v = 0,$$

где u, v — компоненты вектора скорости, p — давление, τ_{ij} — компоненты тензора напряжений, $y = h(x, t)$ — функция, определяющая форму поверхности пленки. Число Фруда Fr определяется по формуле

$$Fr^2 = \frac{\tilde{U}_N^2}{\tilde{g} \tilde{h}_N} = \frac{\sin \theta}{c_f},$$

где \tilde{U}_N — скорость на поверхности плоского слоя, \tilde{g} — ускорение свободного падения, \tilde{h}_N — толщина слоя, c_f — коэффициент поверхностного трения. Число Рейнольдса определяется формулой

$$Re = \frac{\tilde{U}_N \tilde{h}_N}{\tilde{\nu}}.$$

Для напряжений Рейнольдса используется модель

$$\tau_{xy} = \left(\frac{1}{Re} + \nu_t^{ij} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = x, y,$$

где турбулентная вязкость определяется по формуле

$$\nu_t^{ij} = l^2 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|.$$

Для пути перемешивания используется формула Ван-Дрифта [3]

$$l = ky \left(1 - \exp \left[- \frac{y \operatorname{Re} \sqrt{c_f}}{A} \right] \right). \quad (2)$$

Полагая в системе (1) $\partial/\partial t = \partial/\partial x = 0$, получаем уравнение для продольной составляющей вектора скорости $U = U(y)$

$$\frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{dU}{dy} + l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = c_f (1 - y) \quad (3)$$

с краевым условием

$$y = 1: \frac{dU}{dy} = 0.$$

Решение системы (3) было найдено численно при условии нормировки скорости $U|_{y=1} = 1$.

Для исследования устойчивости найденного тривиального решения на него накладываются малые возмущения:

$$\begin{aligned} U &= U(y) + \varepsilon \hat{u}(y)E, \quad v = \varepsilon \hat{v}(y)E, \\ h &= 1 + \varepsilon \hat{h}E, \quad \tau_{xx} = \hat{\tau}_{xx}E, \quad \tau_{yy} = \hat{\tau}_{yy}E, \\ \tau_{xy} &= c_f (1 - y) + \varepsilon \hat{\tau}_{xy}E = T_{xy} + \varepsilon \hat{\tau}_{xy}, \\ E &= e^{i(\alpha x - \alpha c t)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (4) в (1) и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} i\alpha(U - c)\hat{u} + U'\hat{v} &= -i\alpha\hat{p} + i\alpha\hat{\tau}_{xx} + \hat{\tau}'_{xy}, \\ i\alpha(U - c)\hat{v} &= -\hat{p}' + i\alpha\hat{\tau}_{xy} + \hat{\tau}'_{yy}, \\ \hat{v}' + i\alpha\hat{u} &= 0, \\ y = 1: -\hat{p} + \alpha^2 W \hat{h} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{Fr}^2} \hat{h} + \hat{\tau}_{yy} &= 0, \\ \hat{\tau}_{xy} + T'_{xy}(1)\hat{h} = 0 &\Leftrightarrow \hat{\tau}_{xy} = c_f \hat{h}, \quad \hat{v} = i\alpha(U - c)\hat{h}, \\ y = 0: \hat{u} = \hat{v} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\hat{\tau}'_{xy} = d\hat{\tau}_{xy}/dy$, $\hat{\tau}'_{yy} = d\hat{\tau}_{yy}/dy$, $T'_{xy} = dT_{xy}/dy$.

Поскольку возмущения предполагаются малыми, то возмущенные граничные условия можно разложить в ряд Тейлора при $y = 1$ и пренебречь членами второго порядка малости. Таким образом краевые условия переносятся на невозмущенную границу расчетной области. В окрестности критической точки $\alpha \rightarrow 0$ сохраняются только члены первого порядка малости относительно α , и система уравнений (5) преобразуется к виду:

$$i\alpha(U - c)\hat{u} + U'\hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \hat{\tau}'_{xy},$$

$$\begin{aligned} \hat{p}' &= 0, \quad \hat{v}' + i\alpha\hat{u} = 0, \\ y = 1: \quad -\hat{p} + \frac{\cos\theta}{\text{Fr}^2}\hat{h} &= 0, \quad \hat{\tau}_{xy} = c_f\hat{h}, \quad \hat{v} = i\alpha(U-c)\hat{h}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$y = 0: \quad \hat{v} = \hat{u} = 0.$$

Из (6) следует:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xy} &= \left(\frac{1}{\text{Re}} + 2l^2U' \right) \hat{u}', \\ \hat{\tau}'_{xy} &= (4ll'U' + 2l^2U'')\hat{u}' + \left(\frac{1}{\text{Re}} + 2l^2U' \right) \hat{u}'', \end{aligned}$$

при $y = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{u}' &= c_f \text{Re} \hat{h}, \\ \hat{v} &= i\alpha(1-c)\hat{h}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varphi'' &= c_f \text{Re} \hat{h}, \\ \varphi &= (c-1)\hat{h}, \end{aligned}$$

где φ — функция тока. Таким образом, система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + 2l^2U' \right) \varphi'' \right]' &= i\alpha [\hat{p} + (U-c)\varphi' - U'\varphi], \\ y = 1: \quad \varphi'' &= c_f \text{Re}, \quad \varphi = c-1, \\ y = 0: \quad \varphi &= \varphi' = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\hat{h} = 1$ является условием нормировки системы, $\hat{p} = \cos\theta/\text{Fr}^2$, l определяется формулой (2). Решение ищем в виде:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim A(\varphi_0 + i\alpha\varphi_1 + i\alpha c\varphi_2) + i\alpha\hat{p}\varphi_*, \\ c &\sim c_0 + i\alpha c_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $A(\varphi_0 + i\alpha\varphi_1 + i\alpha c\varphi_2)$ — общее решение однородной системы (9) с $\hat{p} = 0$, а φ^* — частное решение неоднородной системы (7) с $\hat{p} \neq 0$.

После подстановки разложения (8) в выражение (7) для φ_0 получаем

$$\left(\frac{1}{\text{Re}} + 2l^2U' \right) \varphi_0'' = 1$$

или в форме

$$\varphi_0'' = \frac{\text{Re}}{1 + 2l^2 \text{Re}U'}. \quad (9)$$

Для φ_1 получается следующее уравнение

$$\left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + 2l^2U' \right) \varphi_1'' \right]' = U\varphi_0' - U'\varphi_0$$

или в разрешенной относительно старшей производной форме

$$\varphi_1'' = \frac{\operatorname{Re}(U\varphi_0 - 2 \int_0^y U' \varphi_0 dy)}{1 + 2l^2 \operatorname{Re} U'}.$$

Откуда φ_0' и φ_0 могут быть найдены интегрированием уравнения (9) для φ_0'' с использованием известных граничных условий. Неизвестные φ_1' , φ_1 также могут быть найдены интегрированием. Для φ_2 получаем уравнение

$$\left[\left(\frac{1}{\operatorname{Re}} + 2l^2 U' \right) \varphi_2'' \right]' = -\varphi_0'$$

или

$$\varphi_2'' = \frac{-\operatorname{Re} \varphi_0}{1 + 2l^2 \operatorname{Re} U'}.$$

Для φ_* —

$$\left[\left(\frac{1}{\operatorname{Re}} + 2l^2 U' \right) \varphi_*'' \right]' = 1$$

или

$$\varphi_*'' = \frac{\operatorname{Re} y}{1 + 2l^2 \operatorname{Re} U'}.$$

После подстановки полученного разложения в граничное условие $y = 1$:

$$\begin{cases} (A_0 + i\alpha A_1)(\varphi_0'' + i\alpha\varphi_1'' + i\alpha c_0\varphi_2'') + i\alpha\hat{P}\varphi_*'' = c_f \operatorname{Re}, \\ (A_0 + i\alpha A_1)(\varphi_0 + i\alpha\varphi_1 + i\alpha c_0\varphi_2) + i\alpha\hat{P}\varphi_* = c_0 - 1 + i\alpha c_1. \end{cases}$$

Разложение для переменной A представляется формулой

$$A \sim A_0 + i\alpha A_1.$$

Для нулевого приближения получаем:

$$\begin{cases} A_0\varphi_0'' = c_f \operatorname{Re}, \\ A_0\varphi_0 = c_0 - 1, \\ A_0 = c_f. \end{cases}$$

Таким образом, нейтральная скорость выражается формулой

$$c_0 = 1 + c_f \varphi_0.$$

Для первого приближения справедливо:

$$\begin{cases} A_1\varphi_0'' = A_0(\varphi_1'' + c_0\varphi_2'') + \hat{P}\varphi_*'' = 0, \\ A_1\varphi_0 = A_0(\varphi_1 + c_0\varphi_2) + \hat{P}\varphi_* = c_1, \end{cases}$$

где $c_1 = 0$ — критическое условие. Последнюю систему можно представить в виде:

$$\begin{cases} -A_1 \varphi_0'' = A_0 (\varphi_1'' + c_0 \varphi_2'') + \hat{p} \varphi_*'', \\ -A_1 \varphi_0 = A_0 (\varphi_1 + c_0 \varphi_2) + \hat{p} \varphi_*. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, можно исключить A_1 :

$$\frac{\varphi_0''}{\varphi_0} c_f (\varphi_1 + c_0 \varphi_2) + \varphi_* \frac{\varphi_0''}{\varphi_0} \hat{p} = c_f (\varphi_1'' + c_0 \varphi_2'') + \hat{p} \varphi_*''$$

или

$$\frac{\text{Re}}{\varphi_0} c_f (\varphi_1 + c_0 \varphi_2) + \frac{\varphi_* \text{Re}}{\varphi_0} \hat{p} = c_f (\varphi_1'' - c_0 \varphi_0 \text{Re}) + \text{Re} \hat{p},$$

$$\frac{c_f}{\varphi_0} (\varphi_1 + c_0 \varphi_2) + c_f \left(c_0 \varphi_0 - \frac{\varphi_1''}{\text{Re}} \right) = \frac{\cos \theta}{\text{Fr}^2} \left(1 - \frac{\varphi_*}{\varphi_0} \right)$$

Последнее уравнение записывается в виде:

$$\text{ctg} \theta = \frac{\varphi_1 + c_0 \varphi_2 + c_0 \varphi_0^2 - \frac{\varphi_0 \varphi_1''}{\text{Re}}}{\varphi_0 - \varphi_*} f(\text{Re}), \quad (10)$$

$$c_0 = 1 + c_f \varphi_0.$$

При любом фиксированном числе Рейнольдса, достаточно большом для сохранения турбулентного режима течения, можно посчитать, найдя φ_0 , φ_1 , φ_2 и φ_* , нейтральную скорость c_0 и правую часть уравнения (10), и таким образом определить критический угол θ . После этого вычисляются

$$\text{Fr}^2 = \frac{\sin \theta}{c_f}$$

и

$$G = \frac{\cos \theta}{\text{Fr}^2}.$$

Перед тем как представить полученные результаты модели с турбулентной вязкостью, имеет смысл рассмотреть так называемую квазиламинарную модель, в которой выбран средний турбулентный профиль скоростей и пренебрегается небольшими завихрениями в возмущенном течении. Известно, что иногда такая модель дает реалистичные результаты [4]. Система уравнений, описывающая квазиламинарное течение, имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{IV} - 2a^2 \varphi'' + a^4 \varphi &= i\alpha \text{Re} \left[(U - c) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi \right], \\ y = 1: \varphi''' - 3\alpha^2 \varphi' + i\alpha \text{Re}(c - 1) \varphi' - i\alpha \text{Re} (\cos \theta / \text{Fr}^2 + \alpha^2 W) &= 0, \\ \varphi'' + a^2 \varphi &= -U'', \\ \varphi &= c - 1, \end{aligned}$$

$$y = 0: \quad \varphi = \varphi' = 0.$$

Используя разложения:

$$\varphi \sim \varphi_0 + i\alpha \operatorname{Re} \varphi_1,$$

$$c_0 \sim c_0 + i\alpha c_1,$$

критическое условие $c_1 = 0$ и распределение скорости по закону “1/7”, решение можно найти аналитически:

$$\varphi \sim y^2 + i\alpha \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{12} c_0 y^4 + \frac{637}{9570} y^{29/7} \right)$$

и

$$c_f \operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{Fr}^2} = G^* = \frac{3953}{3828} 1,033.$$

Соотношение для c также справедливо для ламинарного течения при $c_f = 2/\operatorname{Re}$.

Для кинематических волн критическая скорость c_0 задается ее зависимостью от расхода жидкости и толщины пленки, которые определяются законом трения [5]. Для турбулентного течения $q^2 = h^3$ (следствие формулы Шэзи), таким образом, $c_0 = 1,5$. Отсюда можно найти критическое условие $G = \cos \theta / \operatorname{Fr}^2 = 1/4$. Следовательно, для малых углов θ получается, что $\operatorname{Fr} \approx 2$.

Таким образом, квазиламинарное приближение дает вдвое меньшее значение числа Фруда, чем кинематический (или гидравлический) подход.

На рис. 2 представлена зависимость критического числа Фруда от числа Рейнольдса по средней величине скорости $\langle \operatorname{Re} \rangle$. Полагая, что для $\langle \operatorname{Re} \rangle < \langle \operatorname{Re}_{\text{crit}} \rangle \approx 2000$, получается ламинарный режим с параметрами:

$$\langle \operatorname{Re} \rangle^* = \frac{6}{5} \operatorname{ctg} \theta, \quad (\operatorname{Fr}^*)^2 = \frac{2}{5} \cos \theta.$$

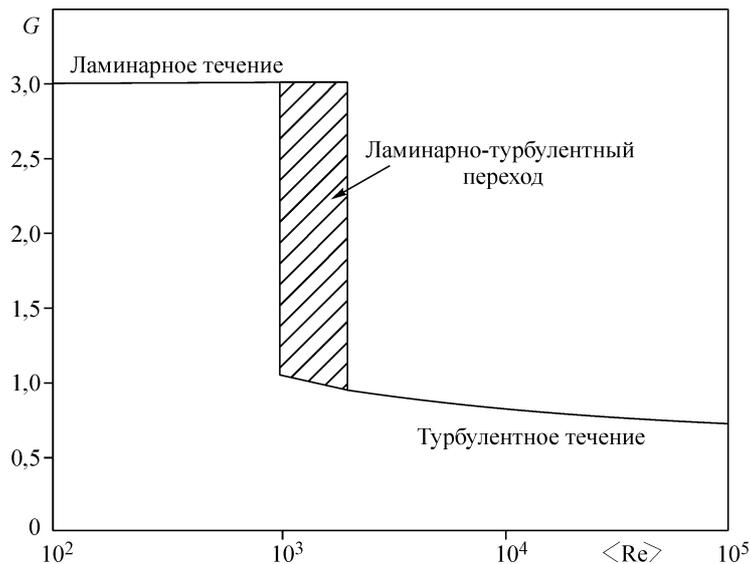


Рис. 2. Критическое значение G как функция числа Рейнольдса.

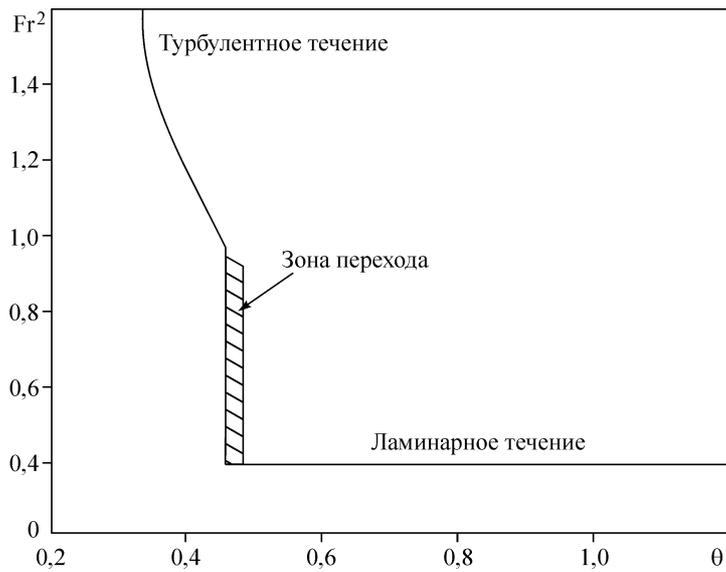


Рис. 3. Критическое число Фруда как функция угла наклона.

При малых углах $(Fr^*)^2 \approx 0,4$ и $G^* = \cos \theta / Fr^2 = 2,5$.

На рис. 3 представлена зависимость критического числа Фруда от угла наклона. Для малых чисел Рейнольдса при ламинарном режиме течения жидкости $(Fr^*)^2 = 0,4$. После ламинарно-турбулентного перехода происходит скачок критического числа Фруда к величине, приблизительно равной $(Fr^*)^2 = 1,2$. Далее оно монотонно растет вместе с числом Рейнольдса приблизительно до величины $(Fr^*)^2 = 2,1$.

На рис. 4 дана зависимость критического угла от числа Рейнольдса. Из этого рисунка видно, что при числах Рейнольдса, больших 1000, и угле наклона $\theta > 0,4$ течение теряет устойчивость. На рис. 5 показана зависимость скорости c_0 от числа Рейнольдса, которая близка к предсказанной кинематической теорией — $c_0 = 1,5$.

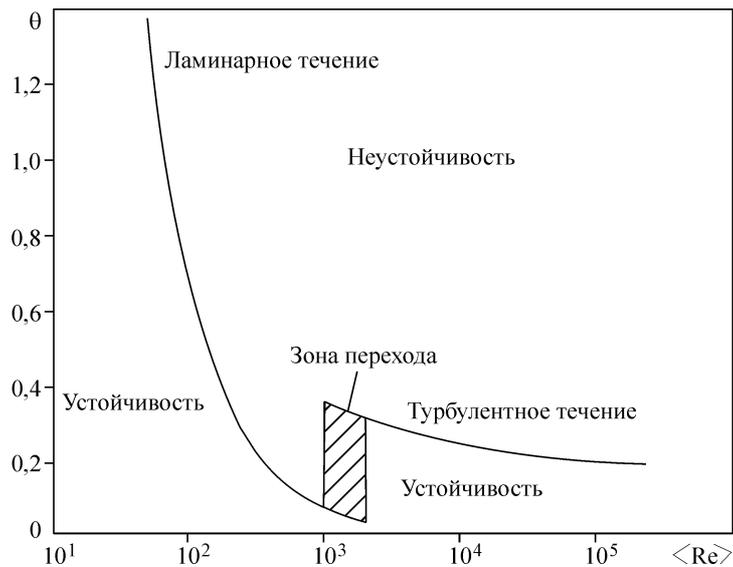
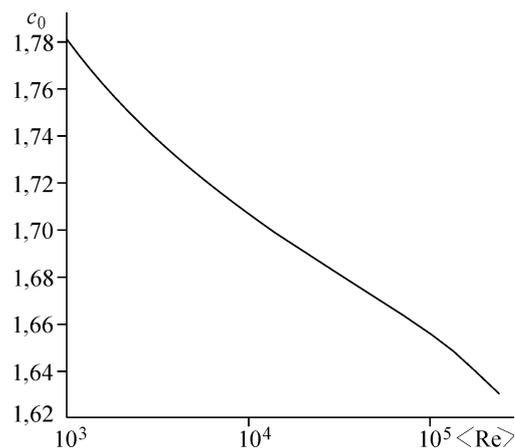


Рис. 4. Критический угол как функция осредненного числа Рейнольдса.

Рис. 5. Критическая скорость как функция числа Рейнольдса.

Число Рейнольдса больше, чем 10^6 , кажется нереалистичным, и поэтому не имеет смысла продолжать исследования выше этой величины. Интересно, что полученные результаты для квазиламинарного течения $(Fr^*)^2 \approx 1$ недооцениваются точным решением, в то время как “кинематическая” критическая величина $(Fr^*)^2 = 4$ переоценивается точными критическими величинами.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dressler R.F. Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1949. — Vol. 2. — P. 149–194.
2. Foley M.G., Vanoni V.A. Pulsing flow in step alluvial streams // *J. of Hydraulic Division, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* — 1977. — Vol. 8. — P. 843–849.
3. Van Driest E.R. On turbulent flow near a wall // *JAS.* — 1956. — Vol. 23, No. 2. — P. 1007–1011.
4. Benjamin T.B. Shearing flow over a wavy boundary // *Fluid Mech.* — 1959. — Vol. 6. — P. 161–205.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.

Статья поступила в редакцию 26 ноября 2004 г.