

УДК 539.374+539.26

ОБ ЭФФЕКТЕ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ КОМПАКТИРОВАНИИ ПОРОШКОВ

С. П. Киселев, В. П. Киселев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kiselev@itam.nsc.ru

Решена задача о компактировании в ударной волне металлического порошка, заключенного в металлический контейнер с поперечной перегородкой. Предложена модель образования волн на перегородке и в компакте, прилегающем к перегородке, основанная на потере прочности в порошке при затекании пор и развитии неустойчивости перегородки при ее сжатии в ударной волне.

Ключевые слова: ударная волна, компактирование порошка, неустойчивость, пластичность, напряжения, деформации.

Введение. Компактирование порошков ударными волнами широко применяется для получения материалов с заданными свойствами [1–3]. Одним из недостатков данного метода является возникновение различных неоднородностей в компакте. Например, в схеме компактирования порошка с “центральной телом” в компакте возникает “холодный” слой [3], причины образования которого изучены в [3–5].

В эксперименте [6] обнаружен новый вид неоднородностей, возникающий при ударно-волновом компактировании медного порошка в цилиндрической ампуле с поперечными перегородками из трансформаторной стали. Неоднородности были связаны с волнообразованием в поперечных перегородках и в прилегающих к ним слоях компактов. Дополнительно проведенные эксперименты показали, что если вместо медного порошка ампула заполнялась сплошным медным образцом, то эффект волнообразования после ударно-волнового нагружения не наблюдался. Эффект также не наблюдался, если поперечные перегородки были изготовлены из других материалов (медь, алюминий, нержавеющая сталь, Ст.20). В данной работе представлены результаты численного моделирования компактирования порошка в ампуле с поперечной перегородкой, на основе которых предложено объяснение эффекта волнообразования.

Постановка задачи. На рис. 1 показана схема компактирования порошка, использованная в эксперименте [6], которая численно моделировалась в данной работе (в отличие от эксперимента [6] здесь рассмотрена одна перегородка, однако это отличие не является принципиальным). В цилиндрическую стальную оболочку насыпался медный порошок (либо смесь медного и молибденового порошков), который уплотнялся до состояния плотной упаковки. С помощью поперечных перегородок, представляющих собой круглые тонкие пластины, порошок разделялся на порции, что было обусловлено технологическими целями. Компактирование порошка происходило в ударной волне, создаваемой детонационной волной, возникающей при детонации взрывчатого вещества на поверхности оболочки. После проведения компактирования оказалось, что в случае, когда перегородки были изготов-

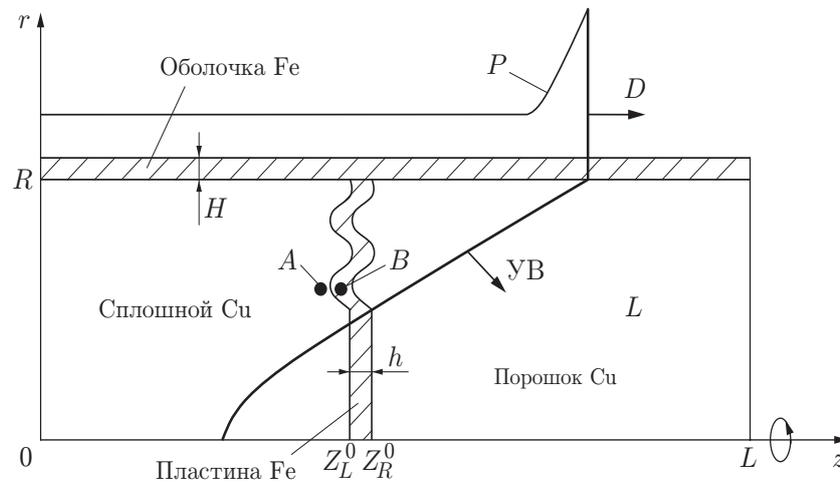


Рис. 1. Схема компактирования порошка в цилиндрическом контейнере

лены из трансформаторной стали, наблюдалась волнообразная деформация перегородок и прилегающего к ним компакта (см. рис. 1).

В данной работе действие продуктов детонации моделировалось давлением, которое прикладывалось к верхней границе оболочки $P(x, t)$. Давление на фронте детонационной волны $x = Dt$ находилось из условия Чепмена — Жуке [7] по формуле $P_H = (2/(\gamma + 1)) \times \rho_{ВВ} D^2$, где $\rho_{ВВ}$ — плотность взрывчатого вещества; D — скорость детонации; $\gamma = 3$. За фронтом детонационной волны давление падает в центрированной волне разрежения $Dt/2 < x < Dt$, к которой примыкает область $0 < x < Dt/2$, где давление постоянно [7]. Формула для вычисления давления за фронтом детонационной волны имеет вид [7]

$$P = P_H \left(\frac{c}{c_H} \right)^3, \quad c_H = \frac{\gamma D}{\gamma + 1}, \quad c = \begin{cases} x/(2t) + D/4, & D/2 < x/t < D, \\ D/2, & x/t < D/2. \end{cases}$$

Расчет напряженно-деформированного состояния оболочки и перегородки проводился в рамках упругопластической модели Прандтля — Рейсса [8].

При математическом моделировании компактирования порошка необходимо учитывать, что перед нагружением порошка ударной волной его уплотняют до состояния плотной упаковки. Тогда компактирование порошка происходит за счет затекания пор и не наблюдается проскальзывания частиц порошка. В данной работе рассматривались такие нагрузки, при которых во фронте ударной волны происходит полное затекание пор и образование прочных связей между частицами порошка. Отсюда следует, что компактирование порошка в ударной волне можно описывать моделью пористого упругопластического материала [9, 10], а возникающий при этом компакт — моделью Прандтля — Рейсса.

В данной задаче имеется несколько контактных границ: оболочка — порошок, перегородка — порошок, перегородка — оболочка. На всех контактных границах ставилось условие идеального контакта: перемещения соответствующих точек двух контактирующих тел равны, а силы взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению. Это приближенное условие в данном случае является удовлетворительным, поскольку напряжение сухого трения между контактирующими телами при нагрузках [6] $P \approx 2$ ГПа имеет величину порядка предела текучести материала: $\sigma_f = fP \sim Y_s$. При численном решении задачи использовалась конечно-разностная схема “крест”, адаптированная в работе [8] к расчету упругопластических сред. Для расчета контактной границы двух контактирующих тел при идеальном контакте применялся алгоритм типа предиктор-корректор. На этапе предиктор рассчитывались новые положение и скорость границы каждого тела без

учета влияния второго тела. Затем на этапе корректор найденные границы корректировались с учетом условий идеального контакта. Скорость контактной границы находилась из закона сохранения импульса при неупругом соударении контактирующих граничных ячеек со скоростями, найденными на этапе предиктор. Можно показать, что в этом случае выполняются условия идеального контакта. Для одномерного случая данный алгоритм применялся ранее (см. [11]), в данной работе проведено его обобщение на двумерный случай.

Математическая модель порошка. Математическое моделирование поведения порошка при ударно-волновом нагружении проводилось в рамках математической модели пористого упругопластического материала, предложенной в [9, 10]. Уравнения неразрывности, движения и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \rho v_i &= 0, \quad \rho = \rho_s m_2, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \nabla_j \sigma_{ij}, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_i \nabla_i, \quad \rho \frac{dE_S}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \\ \sigma_{ij} &= -P \delta_{ij} + S_{ij}, \quad m_1 = (4/3) \pi a^3 n, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где a , n — радиус и концентрация пор; m_1 — объемная концентрация пор (пористость); m_2 — объемная концентрация материала; ρ — средняя плотность; σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ — осредненные тензоры напряжений и скорости деформации; v_i — i -я компонента скорости; E_S — удельная внутренняя энергия; P — давление; S_{ij} — девиатор тензора напряжений.

Для замыкания системы (1) использовалось уравнение состояния пористого тела

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{P}_x + \dot{P}_T, \quad \dot{P}_x = -K \dot{\epsilon}_{kk}^e, \quad P_T = \Gamma \rho E_T, \\ E_S &= E_x + E_T, \quad E_x = (K_1 (\epsilon_{kk}^e)^2 / 2 + \mu_1 e_{ij}^e e_{ij}^e) / \rho, \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \end{aligned} \quad (2)$$

где K_1 , μ_1 — осредненные упругие модули объемного сжатия и сдвига пористого материала.

В области упругих деформаций $(3/2) S_{ij} S_{ij} < Y^2$ девиатор тензора напряжений определяется из закона Гука

$$\nabla S_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - (1/3) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij}, \quad (3)$$

а в пластической области — из уравнений Прандтля — Рейсса

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \nabla S_{ij} / (2\mu) + \dot{\lambda} S_{ij}, \quad (3/2) S_{ij} S_{ij} = Y^2, \\ \nabla S_{ij} &= \dot{S}_{ij} - \omega_{ik} S_{kj} - \omega_{jk} S_{ki}, \quad \omega_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i}) / 2 \end{aligned} \quad (4)$$

(знак ∇ обозначает производную Яуманна; точка над символом — субстанциональную производную по времени). В (1)–(4) P_x , P_T — холодное и тепловое давления; E_x , E_T — холодная и тепловая энергии; K — модуль объемного сжатия; μ — модуль сдвига; Y — предел текучести; Γ — коэффициент Грюнайзена; ω_{ij} — антисимметричный тензор скорости поворота среды; каждый из индексов i , j , k пробегает значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование; индекс после запятой — производная по соответствующей координате; индексом e обозначены упругие деформации, индексом p — пластические.

Поверхность текучести пористого материала имеет следующий вид:

$$Y^2 = \begin{cases} Y_s^2 m_2^2 - (9/4) P^2 m_1, & |P| \leq |P_0|, \\ Y_s^2 m_2 m_e^2, & |P_0| < |P| \leq |P_*|, \\ 0, & |P| > |P_*|, \end{cases} \quad (5)$$

$$m_e^2 = \frac{1 + m_1^2}{m_2} - 2 \frac{m_1}{m_2} \operatorname{ch} \frac{3P}{2Y_s}, \quad m_e + m_p = 1,$$

где $|P_*| = (2/3)Y_s \ln(1/m_1)$; $|P_0| = (2/3)Y_s(1 - m_1)$; m_e, m_p — доли объема ячейки, находящиеся в упругом и пластическом состоянии. Из (5) следует, что с увеличением давления $|P|$ предел текучести уменьшается и при $|P| = |P_*|$ обращается в нуль. Отметим, что поверхность текучести, построенная по формулам (5), близка к поверхности текучести Гарсона [12].

В случае $|P| < |P_0|$ происходит упругое нагружение (разгрузка) и справедливы формулы

$$K = K_1 = K_s m_2 / \left(1 + \frac{m_1}{2} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}\right), \quad \mu = \mu_1 = \frac{\mu_s m_2}{1 + m_1/2}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^e = -\frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s}, \quad (6)$$

где K_s, μ_s — модули упругости сплошного материала; ν — коэффициент Пуассона. В случае $|P_0| < |P| < |P_*|$ в окрестности поры образуется пластическая зона, деформации становятся упругопластическими и справедливы формулы

$$K = K_2 = K_s m_2 / \left(1 + \frac{1 + \nu}{3(1 - 2\nu)} \frac{Y}{|P|} m_p m_2\right), \quad \mu = \mu_2 = \frac{\mu_s m_e}{m_e/m_2 + m_p/2}, \quad (7)$$

$$e_{ij}^e = S_{ij}/(2\mu_1), \quad \dot{\epsilon}_{kk}^e = (K_2/K_1)\dot{\epsilon}_{kk}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = -\dot{\rho}/\rho.$$

Уравнения (7) выполняются в случае нагрузки ($P\dot{P} > 0$). При разгрузке ($P\dot{P} < 0$) до некоторого состояния материал описывается уравнениями (6), последующая нагрузка из этого состояния происходит упруго. Если $|P| > |P_*|$, поры теряют устойчивость и происходит их затекание. В этом случае предел текучести (5) обращается в нуль, поэтому компоненты девиатора тензора напряжений также равны нулю ($S_{ij} = 0$), а уравнения шаровой части тензора напряжений определяются первыми тремя уравнениями в (2), в которых полагается

$$K = K_1, \quad \Gamma = \Gamma_s K/K_1, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^e = \dot{m}_2/m_2 - \dot{\rho}/\rho, \quad (8)$$

где Γ_s — коэффициент Грюнайзена сплошного материала.

Из уравнения $m_1 + m_2 = 1$ следует, что при затекании пор ($\dot{m}_1 < 0$) объемная концентрация материала возрастает ($\dot{m}_2 > 0$). Величина m_2 находится из уравнения Кэрролла — Холта [13], которое в пренебрежении инерционными членами имеет вид [10]

$$P = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{4}{3} \eta \frac{\dot{\alpha}}{\alpha(\alpha - 1)}, \quad (9)$$

где введена вспомогательная переменная $\alpha = 1/m_2$; η — вязкость материала.

Удельная тепловая энергия E_T вычисляется по формулам [10]

$$E_T = E_1 + E_2, \quad E_1 = \frac{4\eta}{3\rho_s} \int \frac{\dot{\alpha}^2 dt}{\alpha(\alpha - 1)}, \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{2Y_s}{3\rho_s} \left\{ \alpha_0 \ln \frac{\alpha_0}{\alpha} - (\alpha_0 - 1) \ln \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha - 1} + (\alpha_0 - \alpha) \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right\},$$

где E_1 и E_2 — средние величины диссипированной энергии при вязком и пластическом затекании пор соответственно.

Отметим, что если пористость равна нулю ($m_1 = 0$), то система уравнений (1)–(10) совпадает с системой уравнений в модели Прандтля — Рейсса. По этой причине поведение сплошного упругопластического материала описывается уравнениями (1)–(10), в которых полагается $m_1 = 0$.

Описанная выше модель впервые предложена в работе [9]. В [14, 15] на основе данной модели решены задачи о соударении сплошных ударников с пористыми железными и алюминиевыми пластинами и получено хорошее совпадение рассчитанных и экспериментально измеренных профилей ударных волн. В [16] с помощью данной модели исследовался переход от регулярного к нерегулярному взаимодействию косых ударных волн в алюминиевом порошке. Найденные границы перехода от одного режима взаимодействия к другому согласуются с экспериментом [17]. Таким образом, в [14–16] показано, что данная модель дает правильное описание ударно-волновых процессов в пористых материалах и порошках.

Результаты расчетов компактирования порошка в цилиндрическом контейнере с поперечной перегородкой. Численные расчеты проводились для осесимметричного случая, геометрические и физические параметры в расчетах соответствовали условиям эксперимента [6]. Цилиндрическая стальная оболочка, в которую помещался порошок, имела длину $L = 6$ см, радиус $R = 1,6$ см, толщину $H = 0,2$ см; механические характеристики: модуль объемного сжатия $K_s = 1,7 \cdot 10^2$ ГПа, модуль сдвига $\mu_s = 0,8 \cdot 10^2$ ГПа, предел текучести $Y_s = 0,3$ ГПа. Поперечная перегородка представляла собой круглую пластину радиусом $R = 1,6$ см и толщиной $h = 0,04$ см, расположенную на расстоянии $l_1 = 2,4$ см от левого торца оболочки (см. рис. 1). Видно, что длина оболочки и ее радиус в приводимых ниже расчетах выбирались вдвое меньшими, чем в эксперименте [6]. Это отличие является неприципиальным и связано с ограничением расчетной области. Поперечная перегородка была изготовлена из трансформаторной стали [6], значительно более хрупкой, чем обычная сталь, поэтому в расчетах ее предел текучести выбирался равным $Y_s = 1,2$ ГПа, а упругие модули были такие же, как у стальной оболочки. Медный порошок моделировался пористым телом с начальной пористостью $m_1^0 = 0,35$ и радиусом пор $a^0 = 20$ мкм. В расчетах принимались следующие характеристики меди: $\rho_s = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $K_s = 1,39 \cdot 10^2$ ГПа, $\mu_s = 0,46 \cdot 10^2$ ГПа, $Y_s = 0,2$ ГПа, $\eta = 10^3$ Па·с.

В момент времени $t = 0$ детонационная волна начинает распространяться вдоль поверхности оболочки слева направо со скоростью $D = 3,6$ км/с, давление продуктов детонации в точке Чепмена — Жуге $P_H = 2,9$ ГПа. В оболочку, а затем в порошок и пластину распространяется косая ударная волна. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ поверхность пластины подвергнута малому возмущению, так что левая Z_L и правая Z_R контактные границы между пластиной и порошком подчиняются уравнениям

$$Z_L^0 = l_1 + \delta a \sin(2\pi r/\lambda), \quad Z_R^0 = Z_L^0 + h, \quad \delta a \ll h \ll \lambda, \quad (11)$$

где $\delta a = 12,5$ мкм — амплитуда возмущений; $\lambda = 2$ мм — длина волны; индекс 0 у координат контактных границ обозначает момент времени $t = 0$. В результате решения задачи требуется определить развитие данного возмущения и найти координаты контактных границ $Z_L(t)$ и $Z_R(t)$ при $t > 0$.

На рис. 2,а для участка $0,20$ см $< z < 2,65$ см показаны изобары в порошке, пластине и оболочке в момент времени $t = 12,8$ мкс. За фронтом ударной волны происходит затекание пор, при этом изолинии пористости подобны изобарам в порошке. Ширина ударной волны определяется временем затекания пор, поэтому ударная волна в порошке оказывается сильно “размазанной”. На рис. 2,б показаны изобары в момент времени $t = 32$ мкс, когда ударная волна отразилась от оси и вышла на поверхность оболочки, а вблизи оси сформировалась волна разрежения. К этому моменту поры в порошке полностью затекли, и форма пластины в дальнейшем не меняется. Видно, что в результате ударно-волнового нагружения поверхность пластины испытала значительную волнообразную деформацию.

На рис. 3 представлены зависимости от времени t пористости m_1 и давления P в порошке в точке А, относительной амплитуды возмущения пластины $\delta Z_L / \delta Z_L^0$, давления P

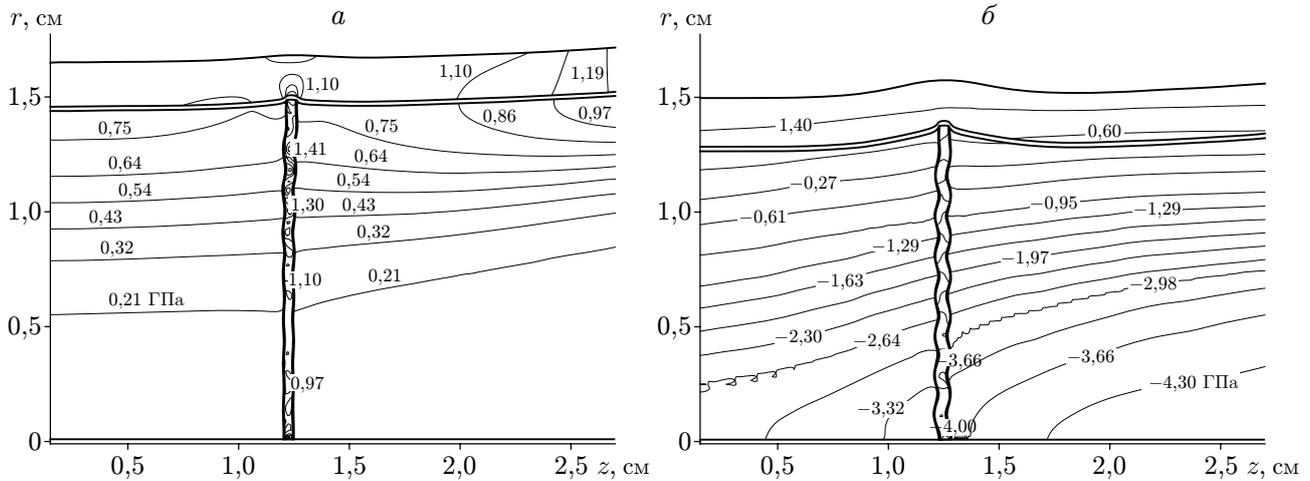


Рис. 2. Изобары в порошке, пластине и оболочке в различные моменты времени:

a — $t = 12,8$ мкс; b — $t = 32$ мкс

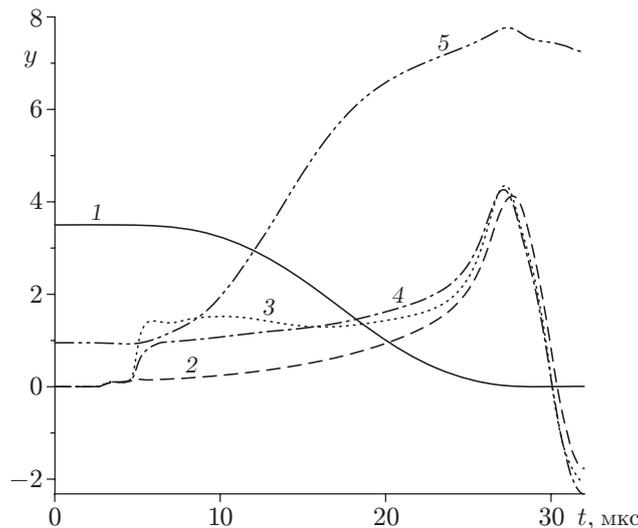


Рис. 3. Зависимости от времени t параметров (ось y):

1 — пористости $m_1|_A$; 2 — давления в порошке $P|_A$ (ГПа); 3 — напряжения в пластине $(-\sigma_r)|_B$ (ГПа); 4 — давления в пластине $P|_B$ (ГПа); 5 — относительной амплитуды возмущений пластины $\delta Z_L/\delta Z_L^0$

и напряжения σ_r в пластине в точке B , где $\delta Z_L/\delta Z_L^0 = (Z_L(t)|_{\max} - Z_L(t)|_{\min})/(2\delta a)$. Точки A и B расположены по разные стороны от контактной границы порошок — пластина ($z = Z_L(t)$, $r = 0,87$ см) (см. рис. 1). Видно, что рост возмущений поверхности пластины происходит только во время затекания пор. Отметим, что если в уравнениях для пористого тела не учитывать потерю прочности медного порошка при затекании пор и вместо (5) предположить $Y = Y_s = \text{const}$, то роста возмущений не происходит. На рис. 4 кривыми 2 и 3 показаны контактные границы пластин $Z_L = Z_L(r)$ в момент времени $t = 32$ мкс, полученные в результате двух расчетов при одинаковых условиях нагружения (линией 1 показано положение пластины в начальный момент времени). В первом расчете (кривая 2) решалась полная система уравнений (1)–(10). Во втором расчете (кривая 3) решалась та же система уравнений, но вместо уравнений (5) полагалось $Y = Y_s = \text{const}$. Видно, что

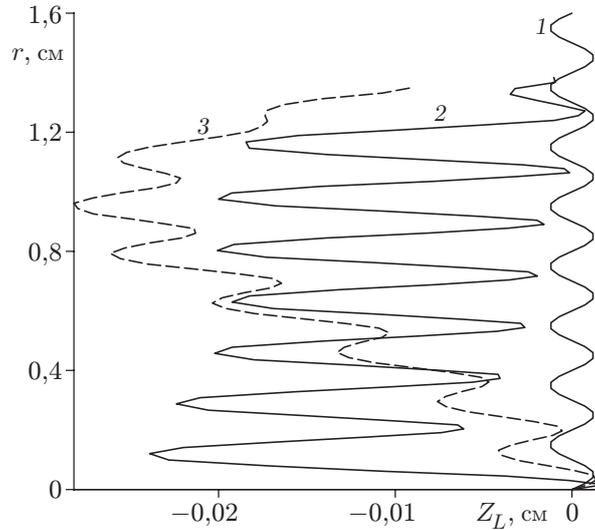


Рис. 4. Контактные границы пластина — порошок $Z_L(r)$ в моменты $t = 0$ (кривая 1) и $t = 32$ мкс (кривые 2, 3)

во втором случае амплитуда возмущений изменилась незначительно, хотя в среднем пластина испытала бóльшую деформацию, чем в первом случае. Последнее связано с фокусировкой ударной волны при схождении к оси симметрии, что приводит к значительной неоднородности в поле скоростей и перемещений в порошке [18].

Обсуждение результатов. Как отмечено выше, рост возмущений пластины и связанное с ним волнообразование начинаются за фронтом ударной волны в порошке, где происходят затекание пор и потеря прочности порошка. За фронтом ударной волны пластина находится в условиях радиального сжатия и окружена порошком, механические свойства которого подобны свойствам жидкости. В результате в пластине развивается неустойчивость и увеличивается амплитуда возмущений. Прилегающий порошок в этом случае не препятствует росту возмущений. Под действием пластины в нем возникают возмущения скорости, в результате чего он перемещается из положений максимумов возмущений давления в положения минимумов. При постоянном пределе текучести в порошке возникали упругие напряжения, которые препятствовали росту возмущений в пластине.

Оценим длину волны и характерное время роста возмущений пластины, окруженной порошком, в котором ввиду равенства $Y = 0$ компоненты дивергента тензора напряжений равны нулю. Рассмотрим модельную задачу об устойчивости пластины, подвергнутой радиальному сжатию и погруженной в идеальную несжимаемую жидкость. Постановка данной задачи аналогична задаче о движении пластины, плавающей на поверхности жидкости, под действием давления в жидкости [19, 20]. Считая деформации пластины малыми и пренебрегая нелинейными слагаемыми, перепишем уравнения движения пластины и жидкости из [20] в виде

$$\rho_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{D}{h} \Delta^2 \zeta + \tilde{\sigma}_r \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_r}{r} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{2P'}{h}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\Delta \varphi' = 0, \quad P' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \Big|_{z=Z}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=Z},$$
(12)

где φ' , P' , ρ_0 — возмущения потенциала, давления и плотность жидкости соответственно; $\zeta = Z - Z^0$ — амплитуда возмущений срединной поверхности пластины; ρ_s , E , ν — соответственно плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона пластины; $\tilde{\sigma}_r$ — среднее

радиальное напряжение в пластине. Последние два уравнения в (12) выражают равенство нормальных напряжений и скоростей на контактной границе пластина — жидкость. Смещение пластины $\partial\zeta/\partial t$ вызывает увеличение давления с одной стороны от пластины и такое же уменьшение давления с другой стороны, поэтому последний член в первом уравнении (12) был увеличен в два раза по сравнению с соответствующим слагаемым в [20]. Рассмотрим поведение возмущений с малой длиной волны $\lambda \ll R$, где R — радиус пластины. В этом случае выполняются неравенства

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\zeta}{\partial r} / \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} \sim \frac{\lambda}{R} \ll 1, \quad \frac{\partial\tilde{\sigma}_r}{\partial r} \frac{\partial\zeta}{\partial r} / \left(\tilde{\sigma}_r \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} \right) \sim \frac{\tilde{\sigma}_r \lambda}{\tilde{\sigma}_r R} \ll 1, \quad \frac{\tilde{\sigma}_r}{r} \frac{\partial\zeta}{\partial r} / \left(\tilde{\sigma}_r \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} \right) \sim \frac{\lambda}{R} \ll 1$$

и из уравнений (12), оставляя в них производные высшего порядка, получим

$$\rho_s \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -\frac{D}{h} \frac{\partial^4\zeta}{\partial r^4} + \tilde{\sigma}_r \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} - \frac{2\rho_0}{h} \frac{\partial\varphi'}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi'}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (13)$$

где невозмущенная поверхность пластины помещена в сечение $z = 0$. Из условия непрерывности нормальных напряжений на поверхности пластины и малости углов отклонения ее поверхности от вертикальной оси следует равенство напряжений $\sigma'_z = \sigma_z$. Полагая в жидкости $\sigma'_z = -P'$, найдем давление $P = P' + S_z$ и радиальные напряжения в пластине $\sigma_r = -P' + S_r - S_z$. Расчеты показывают, что осредненные по толщине пластины компоненты девиатора тензора напряжений $\tilde{S}_r - \tilde{S}_z = -\xi Y_s$, $\xi \sim 1$, давление в порошке $P' \ll Y_s$. Отсюда следует, что среднее радиальное напряжение в пластине остается практически постоянным: $\tilde{\sigma}_r \approx -\xi Y_s$, $\xi \approx 1$, что подтверждается расчетами (см. линию 3 на рис. 3). Представляя для $z < 0$ решение уравнений (13) в виде $\zeta = \zeta_0 \exp(ikr - i\omega t)$, $\varphi' = \varphi_0 \exp(kz + ikr - i\omega t)$, с учетом $\tilde{\sigma}_r \approx -Y_s$ найдем

$$\omega^2 = \frac{(D/h)k^4 - \xi Y_s k^2}{\rho_s + 2\rho_0/(kh)},$$

где ω — частота; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число возмущений. Отсюда следует, что возмущения с длиной волны $\lambda > \lambda_*$ будут экспоненциально нарастать:

$$\zeta \sim \zeta_0 \exp \frac{t}{\tau}, \quad \tau \approx \frac{\lambda}{2\pi} / \sqrt{\frac{Y_s(1 - (\lambda_*/\lambda)^2)}{\rho_s(1 + 2\rho_0/(\rho_s kh))}}, \quad \lambda_* = 2\pi \sqrt{\frac{D}{\xi Y_s h}}. \quad (14)$$

Данная постановка задачи о динамической неустойчивости пластины аналогична постановке задачи в работе [21], где изучалась устойчивость упругого стержня при его импульсном нагружении. Следуя [21], найдем длину волны возмущений, которая имеет наименьшее время нарастания: $\tilde{\lambda} = \sqrt{2} \lambda_*$. Отметим, что в работе [22] в упрощенной модели рассмотрен подобный механизм волнообразования при сварке взрывом, связанный с потерей устойчивости материала в зоне контакта за счет остаточных сжимающих напряжений. В частности, в отличие от данной работы в [22] исследовалась потеря устойчивости сжатого стержня, граничащего с упругой полуплоскостью. В работе [23] на основе нелинейной упругопластической модели Максвелла численно решена задача в постановке, аналогичной [22]. Исследовалась деформация пластины под действием движущегося по поверхности пластины импульса давления. Эта задача позволяет смоделировать физические параметры в области контакта при сварке взрывом двух пластин [22]. В результате были обнаружены сжимающие остаточные напряжения, которые приводили к изгибу всей пластины, однако волнообразования в пластине расчеты не показали.

Используя уравнения (14), найдем численные значения критической длины возмущений λ_* и характерное время нарастания возмущений τ . Из второго уравнения в (12) следует, что цилиндрическая жесткость пластины D в случае упругой деформации пропорциональна модулю Юнга. Однако расчет показывает, что в данном случае при одновременном

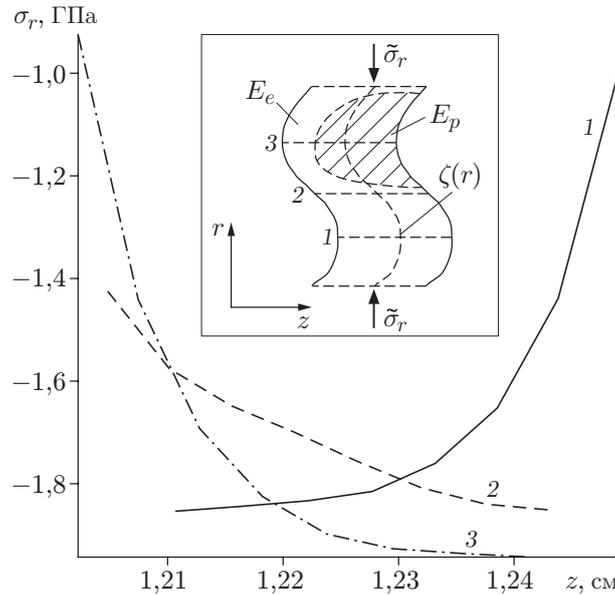


Рис. 5. Распределение напряжений в пластине $\sigma_r(z)$ в момент времени $t = 12,8$ мкс в различных сечениях:
 1 — $r = 0,82$ см; 2 — $r = 0,87$ см; 3 — $r = 0,91$ см; на вставке соответствующие сечения показаны штриховыми линиями

сжатии и изгибе пластины в ней происходят упругопластические деформации. Одна часть пластины за счет изгиба испытывает дополнительное растяжение и деформируется упруго с модулем $E = E_e$, а другая испытывает дополнительное сжатие и деформируется пластически с модулем $E = E_p$. Рассчитанные для трех сечений распределения радиальных напряжений $\sigma_r(z)$ по толщине пластины (рис. 5) подтверждают эти предположения. Поэтому вместо модуля Юнга во втором уравнении в (12) нужно использовать средний модуль E_k , учитывающий упругопластический характер деформирования пластины. Существуют различные теории вычисления E_k [24], ниже использована модель Энгессера — Кармана [24]. Заметим, что упрощенное уравнение для пластины (первое уравнение в (13)) совпадает с уравнением для стержня, поэтому при определении среднего модуля E_k воспользуемся соответствующей формулой для стержня прямоугольного сечения в модели Энгессера — Кармана [24]: $E_k = 4E_e E_p / (\sqrt{E_e} + \sqrt{E_p})^2$. Радиальные напряжения в пластине являются суммой средних и моментных напряжений, связанных с изгибом пластины [25]:

$$\sigma_r = \frac{\tilde{E}}{(1 - \nu^2)} \varepsilon_r^0 - \frac{\tilde{E}z}{(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}$$

(знак “минус” во втором слагаемом связан с выбором системы координат), где $\varepsilon_r^0 < 0$ — деформация срединной поверхности пластины; \tilde{E} — локальный модуль. Дифференцируя левую и правую части этого выражения по z , получим формулу для определения локального модуля \tilde{E} по заданному распределению напряжений $\sigma_r(z)$:

$$\tilde{E} = (1 - \nu^2) \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} / \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}.$$

Из численных расчетов найдем кривизну пластины при $r = 0,91$ см, что соответствует сечению 3 на вставке к рис. 5: $\partial^2 \zeta / \partial r^2 \approx 2 \cdot 10^2$ 1/м. Из распределения напряжений $\sigma_r(z)$ в этом сечении (кривая 3 на рис. 5) найдем, что на левой границе пластины материал деформируется упруго ($\partial \sigma_r / \partial z \approx 10^4$ ГПа/м, $E_e = \tilde{E}(Z_L) = 50$ ГПа). На правой границе

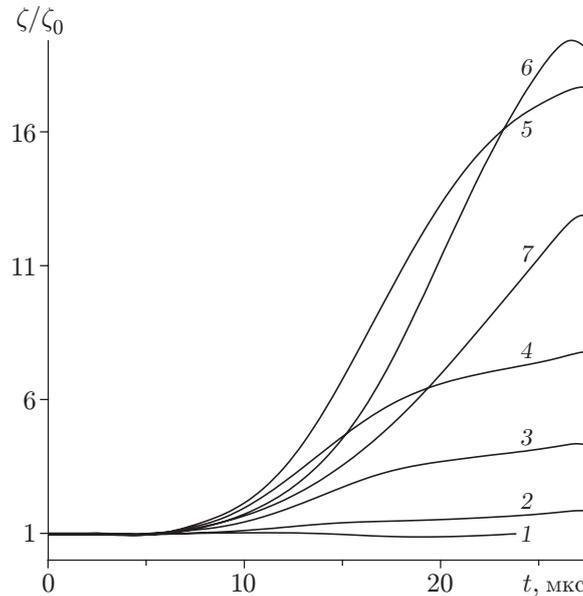


Рис. 6. Зависимости относительной амплитуды возмущения ζ/ζ_0 пластины от времени t , полученные в расчетах для различных длин волны возмущений:

1 — $\lambda = 0,7$ мм; 2 — $\lambda = 1$ мм; 3 — $\lambda = 1,5$ мм; 4 — $\lambda = 2$ мм; 5 — $\lambda = 3$ мм; 6 — $\lambda = 4$ мм; 7 — $\lambda = 5$ мм

пластины в том же сечении происходит пластическая деформация материала, поэтому $\partial\sigma_r/\partial z \approx 2 \cdot 10^2$ ГПа/м, $E_p = \tilde{E}(Z_R) = 1$ ГПа. Подставляя эти значения в формулу для среднего модуля, получим $E_k = 4$ ГПа. Определяя цилиндрическую жесткость по формуле $D = E_k h^3 / (12(1 - \nu^2))$, из (14) найдем минимальную длину волны неустойчивых возмущений $\lambda_* \approx 1,3$ мм и характерное время роста возмущений $\tau \approx 1,56$ мкс с длиной волны $\lambda = 2$ мм. В эксперименте [6] длина волны возмущений в пластине равна $\lambda_0 \approx 2,5$ мм, что близко к полученной выше оценке длины волны наиболее быстро растущих возмущений $\tilde{\lambda} = \sqrt{2} \lambda_* \approx 1,82$ мм.

Численные расчеты дают близкое значение $\lambda_* \approx 1$ мм и в четыре раза большее значение $\tau \approx 6$ мкс для $\lambda = 2$ мм. По-видимому, различие значений τ связано с тем, что в упрощенной модели, определяемой уравнениями (12), сжимаемостью порошка пренебрегали. Как видно на рис. 3, изменение плотности порошка в расчете за время $\tau \approx 6$ мкс составляет примерно 30 %.

Были проведены три серии расчетов, в которых исследовался рост возмущений пластины в зависимости от характера начального возмущения и прочностных параметров пластины.

В первой серии расчетов изменялась длина волны возмущений λ , а начальная амплитуда возмущений оставалась постоянной: $\delta a = 12,5$ мкм. Результаты расчетов показаны на рис. 6, где приведены зависимости относительной амплитуды возмущения в пластине $\zeta/\zeta_0 = (Z_L(t)|_{\max} - Z_L(t)|_{\min}) / (2\delta a)$ от времени t для разных длин волн λ . Видно, что возмущения с длиной волны $\lambda < 1$ мкм не растут. Максимальную скорость роста имеют возмущения в диапазоне $3 \text{ мм} < \lambda < 4 \text{ мм}$, после чего происходит уменьшение скорости роста возмущений.

Во второй серии расчетов изменялся предел текучести пластины в интервале $0,2 \text{ ГПа} < Y_s < 1,2 \text{ ГПа}$, а остальные параметры оставались постоянными: $\lambda = \text{const}$, $\delta a = \text{const}$. Проведенные численные расчеты показали, что зависимость характерного времени роста возмущений от предела текучести имеет вид $\tau \sim 1/\sqrt{Y_s}$, что согласуется со второй формулой в (14).

В третьей серии расчетов исследовался рост возмущений в зависимости от амплитуды начального возмущения пластины при постоянной длине волны возмущений. Оказалось, что максимальная амплитуда возмущений не зависела от амплитуды начальных возмущений пластины δa в достаточно широком диапазоне $0,02 < 2\pi \delta a/\lambda < 0,16$, где длина волны возмущений $\lambda = 2$ мм. Если в начальный момент времени $t = 0$ возмущения пластины отсутствовали ($\delta a = 0$), то они не возникали и в последующие моменты времени $t > 0$. По-видимому, волнообразование в пластине из трансформаторной стали связано с наличием в ней крупномасштабных неоднородностей, являющихся источником возмущений. Вопрос об источнике начальных возмущений в данной работе не рассматривается, так как требует дополнительного исследования. Однако если возмущения уже возникли, то их усиление происходит за счет развития неустойчивости пластины в волне сжатия и одновременного разупрочнения порошка при затекании пор.

Авторы выражают благодарность С. К. Годунову и В. И. Мали за обсуждение постановки задачи, промежуточных и окончательных результатов расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Shock waves in materials science** / Ed. by A. B. Sawaoka. Hong Kong; Barcelona; Budapest: Springer-Verlag, 1993.
2. **Прюммер Р.** Обработка порошковых материалов взрывом. М.: Мир, 1990.
3. **Нестеренко В. Ф.** Импульсное нагружение гетерогенных материалов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
4. **Костюков Н. А.** Физические причины и механизмы образования пограничных зон при двумерном взрывном компактировании порошковых материалов // ПМТФ. 1991. № 6. С. 154–161.
5. **Buzjurkin A. E., Kiselev S. P.** On appearance of “cold” layer in explosive consolidation of powders // Shock Waves. 2000. V. 10, N 3. P. 159–165.
6. **Мали В. И., Калинин А. Н., Сергеев С. А.** Исследование теплопроводности взрывных компактов медь — молибден // Физика горения и взрыва. 2003. Т. 39, № 1. С. 123–127.
7. **Физика взрыва** / Под ред. К. П. Станюковича. М.: Наука, 1975.
8. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–264.
9. **Киселев С. П.** Упругопластическая модель деформирования пористого материала // Фильтрация многофазных систем: Сб. тр. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1991. С. 151–166.
10. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1992.
11. **Гулидов А. И., Шабалин И. И.** Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. Новосибирск, 1987. (Препр. / СО АН СССР. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 12).
12. **Garson A. L.** Continuum theory of viscous failure, caused by pore formation and growth. Chap. 1: Yield criteria and yield laws for porous plastic media // Trans. ASME. Ser. Theoret. Found. Engng Calculat. 1977. N 1. P. 1–17.
13. **Carroll M. M., Holt A. C.** Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1972. V. 43, N 4. P. 1626–1635.
14. **Киселев С. П.** О распространении ударной волны в пористом материале, возникающей при соударении пластин // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 4. С. 79–83.

15. **Киселев С. П.** Численное моделирование распространения упругопластических волн в пористом материале. Новосибирск, 1994. (Препр. / СО РАН. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 6).
16. **Киселев С. П., Бузюркин А. Е.** Ударно-волновые процессы в металлических порошках // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 6. С. 51–63.
17. **Костюков Н. А.** Влияние начальной плотности вещества на режим косоугольного столкновения ударных волн // ПМТФ. 1977. № 3. С. 124–130.
18. **Vuzjurkin A. E., Kiselev S. P.** Powder compaction in the axisymmetric case // Mater. Phys. Mech. 2004. V. 7, N 1. P. 17–22.
19. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1987.
20. **Киселев С. П., Трунев А. П.** Динамическое повреждение и разрушение пластины при раздувании газовой полости в воде // ПМТФ. 1991. № 5. С. 154–158.
21. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
22. **Годунов С. К., Сергеев-Альбов Н. Н.** Уравнения линейной теории упругости с точечными максвелловскими источниками релаксации напряжений // ПМТФ. 1977. № 4. С. 140–152.
23. **Роменский Е. И.** Метод расчета двумерных динамических уравнений нелинейной упруго-пластической среды Максвелла. Новосибирск, 1988. (Препр. / СО АН СССР. Ин-т математики; № 36).
24. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
25. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 25/IV 2005 г.
