

УДК 539.3

УЧЕТ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ДИАГНОСТИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СРЕД

В. А. Ломазов, Ю. В. Немировский

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача определения термомеханических характеристик среды, являющихся функциями пространственных переменных и температуры, по значениям характеристик термоупругих процессов, измеренным на границе полупространства. Предложен подход к решению задачи, основанный на применении метода возмущений.

Ключевые слова: термоупругая среда, нестационарные процессы, метод возмущений, диагностика.

Совершенствование деталей многих машин (от паровых и газовых турбин, двигателей внутреннего сгорания до космической техники), предназначенных для работы в условиях возрастающих температур и давлений, приводит к необходимости исследования температурной зависимости характеристик сложных металлических сплавов и других конструкционных материалов. Экспериментальные исследования термочувствительности связаны со значительными техническими трудностями [1], особенно при рассмотрении современных композитных материалов, являющихся неоднородными и анизотропными.

Композиты, обладая рядом технически важных преимуществ (по своим эксплуатационным качествам они могут превосходить любой из своих компонентов), нередко имеют и существенные недостатки. Например, физико-механические и химические свойства компонентов композита зачастую оказываются несогласованными, что приводит к специфическим видам разрушения (расслоению, местным разрывам, нарушению адгезии и т. п.) [2]. Поэтому становится актуальной проблема неразрушающего контроля качества изделий как непосредственно после изготовления, так и в процессе эксплуатации, приводящей к накоплению микроповреждений.

Под проблемой диагностики понимается задача определения характеристик материала на основе экспериментально полученной информации о физических полях, возникающих в теле под влиянием специально подобранных внешних воздействий [3].

В настоящей работе исследуется задача определения температурной зависимости жесткостных характеристик, плотности, удельной теплоемкости и коэффициентов теплопроводности слабонеоднородной и анизотропной термоупругой среды по считающимся известными на поверхности тела значениям параметров протекающих в нем нестационарных процессов. Исследуемая задача является обратной задачей математической физики [4]. Основное отличие данной задачи от постановок обратных задач, исследованных ранее в работах [5–13], — определение характеристик среды, являющихся функциями не только пространственных переменных, но и температуры (термочувствительности). При этом введение малого параметра связано с неоднородной температурной зависимостью характеристик среды. Использование степенных разложений характеристик среды по относительной температуре аналогично применению метода возмущений.

1. Распространение нестационарных термоупругих процессов в неоднородном анизотропном полупространстве $R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \geq 0\}$ описывается уравнениями [14]

$$C_v \dot{\theta} - (K_{ij} \theta_{,i})_{,j} = f_0, \quad \rho \ddot{u}_i - (C_{ijkl} u_{k,l} - \beta_{ij} \theta)_{,j} = f_i \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

которые замыкаются начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}, 0) = \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \psi_i(\mathbf{x}), \\ K_{i3}\theta_{,i}(x_1, x_2, 0, t) = p_0(x_1, x_2, t), \quad \{C_{i3kl}u_{k,l} - \beta_{i3}\theta\}(x_1, x_2, 0, t) = p_i(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь температура и компоненты вектора перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ зависят от пространственных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t , а удельная теплоемкость C_v , плотность ρ и компоненты тензоров теплопроводности K_{ij} , объемного температурного

расширения $\beta_{ij} = C_{ijkm} \int_0^\theta \alpha_{km} d\theta$ (α_{km} — коэффициенты линейного температурного расширения) и жесткости C_{ijkl} полагаются функциями \mathbf{x} и температуры θ . Точками отмечены производные по времени, индекс после запятой соответствует производной по соответствующей координате. По повторяющимся индексам проводится суммирование (если не оговорено обратное). В фигурных скобках указаны функции (выражения), имеющие одинаковые аргументы (индексы).

Рассматриваемая в настоящей работе задача диагностики заключается в определении величин $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}(\mathbf{x}, \theta)$ из нескольких задач вида (1.1), (1.2) для N типов термосилового нагружения (после подстановки в (1.1), (1.2) $u_i^n \rightarrow u_i$, $\{\varphi_r, \psi_i, p_i, f_i\}^n \rightarrow \{\varphi_r, \psi_i, p_i, f_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $r = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \dots, N$)) по дополнительной информации

$$\begin{aligned} \theta^n(x_1, x_2, 0, t) = \chi^n(x_1, x_2, t), \quad u_i^n(x_1, x_2, 0, t) = \chi_i^n(x_1, x_2, t), \\ \{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}(x_1, x_2, 0, \theta^n) = \{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}^0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.3)$$

которая предполагается полученной в результате измерений. Число N , соответствующее количеству испытаний с различными типами термосиловых нагружений, зависит от типа анизотропии исследуемой среды (числа искомых функций). В дальнейшем будем считать, что исследуемая среда слабонеоднородна и анизотропна, т. е. величины $|\rho - \rho^0|/\rho^0$, $|C_v - C_v^0|/C_v^0$, $|K_{ij} - K_{ij}^0|/K^0$, $|C_{ijkl} - C_{ijkl}^0|/\lambda^0$ имеют порядок малости $O(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, где верхним индексом “нуль” отмечены характеристики некоторой контрольной однородной изотропной нетермочувствительной среды, а значит, $K_{ij}^0 = K^0 \delta_{ij}$, $\beta_{ij}^0 = \beta^0 \delta_{ij}$, $C_{ijkl}^0 = \lambda^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$. Здесь λ^0 , μ^0 — коэффициенты Ламе; δ_{ij} — символ Кронекера; ρ^0 , C_v^0 , K^0 , λ^0 , μ^0 — константы. Слабая неоднородность и анизотропия термомеханических свойств материала может быть вызвана, например, технологическими воздействиями. При радиационном облучении металлов модуль Юнга меди изменяется на 10–15 %, коэффициент Пуассона практически не меняется, в то время как предел текучести увеличивается в несколько раз. Определив в рамках задачи диагностики области с отклонениями термомеханических характеристик материала и выделив тем самым зоны с критическим уровнем радиационных повреждений, можно оценить запас прочности изделия.

Проведем сравнение термоупругого процесса $\{\theta, u\}^n(\mathbf{x}, t)$ с аналогичным образом инициированным процессом $\{\theta, u\}^{0n}(\mathbf{x}, t)$, протекающим в контрольной однородной изотропной нетермочувствительной среде. После замены $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^0 \rightarrow \{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}(\mathbf{x}, \theta)$ величины $\{\theta, u\}^{0n}(\mathbf{x}, t)$ описываются соотношениями (1.1), (1.2). Будем предполагать, что влияние термочувствительности, слабой неоднородности и анизотропии исследуемой среды на количественные характеристики возбужденных в ней процессов достаточно мало. Таким образом, на поверхности полупространства

$$\begin{aligned} \theta^n(x_1, x_2, 0, t) = \theta^{0n}(x_1, x_2, 0, t) + \varepsilon \theta^{1n}(x_1, x_2, 0, t) = \chi^{0n}(x_1, x_2, t) + \varepsilon \chi^{1n}(x_1, x_2, t), \\ u_i^n(x_1, x_2, 0, t) = u_i^{0n}(x_1, x_2, 0, t) + \varepsilon u_i^{1n}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_i^{0n}(x_1, x_2, t) + \varepsilon \chi_i^{1n}(x_1, x_2, t), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}\|\theta^{0n}(x_1, x_2, 0, t)\|_{C^2} &\sim O(\|\theta^{1n}(x_1, x_2, 0, t)\|_{C^2}), \\ \|u_i^{0n}(x_1, x_2, 0, t)\|_{C^2} &\sim O(\|u_i^{1n}(x_1, x_2, 0, t)\|_{C^2}).\end{aligned}$$

Полагаем, что искомые характеристики исследуемой среды могут быть представлены в виде сходящегося степенного ряда по ε и $\theta^{0n}(\mathbf{x}, t)$ с зависящими от пространственных координат \mathbf{x} коэффициентами:

$$\begin{aligned}\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}(\mathbf{x}) &= \{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^0 + \\ &+ \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s (\theta^{0n})^s \{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^{s+1}(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (1.4)$$

а характеристики протекающих в ней термоупругих процессов являются аналитическими функциями малого параметра ε :

$$\{\theta, u\}^n(\mathbf{x}, t) = \{\theta, u\}^{0n}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \{\theta, u\}^{sn}(\mathbf{x}, t).$$

В соответствии с методом возмущений принятые предположения позволяют перейти от соотношений (1.1)–(1.3) к уравнениям

$$\begin{aligned}C_v^0 \dot{\theta}^{0n} - (K_{ij}^0 \theta_{,i}^{0n})_{,j} &= f_0^n \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3; n = 1, \dots, N), \\ \rho^0 \ddot{u}_i^{0n} - (C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{0n} - \beta_{ij}^0 \theta^{0n})_{,j} &= f_i^n, \quad \varepsilon (C_v^0 \dot{\theta}^{1n} - (K_{ij}^0 \theta_{,i}^{1n})_{,j}) = \varepsilon (-C_v^1 \dot{\theta}^{0n} + (K_{ij}^1 \theta_{,i}^{0n})_{,j}), \\ \varepsilon (\rho^0 \ddot{u}_i^{1n} - (C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{1n} - \beta_{ij}^0 \theta^{1n})_{,j}) &= \varepsilon (-\rho^1 \ddot{u}_i^{0n} + (C_{ijkl}^1 u_{k,l}^{0n} - \beta_{ij}^1 \theta^{0n})_{,j}), \\ \varepsilon^2 (C_v^0 \dot{\theta}^{2n} - (K_{ij}^0 \theta_{,i}^{2n})_{,j}) &= \varepsilon^2 (-C_v^2 \theta^{0n} \dot{\theta}^{0n} + (K_{ij}^2 \theta^{0n} \theta_{,i}^{0n})_{,j} - C_v^1 \dot{\theta}^{1n} + (K_{ij}^1 \theta_{,i}^{0n})_{,j}), \\ \varepsilon^2 (\rho^0 \ddot{u}_i^{2n} - (C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{2n} - \beta_{ij}^0 \theta^{2n})_{,j}) &= \varepsilon^2 (-\rho^2 \theta^{0n} \ddot{u}_i^{0n} + (C_{ijkl}^2 \theta^{0n} u_{k,l}^{0n} - \beta_{ij}^2 \theta^{0n} \theta^{0n})_{,j} - \\ &\quad - \rho^1 \ddot{u}_i^{1n} + (C_{ijkl}^1 u_{k,l}^{1n} - \beta_{ij}^1 \theta^{1n})_{,j}), \\ \varepsilon^m (C_v^0 \dot{\theta}^{mn} - (K_{ij}^0 \theta_{,i}^{mn})_{,j}) &= \varepsilon^m (-C_v^m \theta^{0n} \dot{\theta}^{0n} + (K_{ij}^m \theta^{0n} \theta_{,i}^{0n})_{,j} - C_v^m (\theta^{0n})^{m-1} \dot{\theta}^{1n} + \\ &\quad + (K_{ij}^m (\theta^{0n})^{m-1} \theta_{,i}^{1n})_{,j} - \dots - C_v^1 \dot{\theta}^{(m-1)n} + (K_{ij}^1 \theta_{,i}^{(m-1)n})_{,j}), \\ \varepsilon^m (\rho^0 \ddot{u}_i^{mn} - (C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{mn} - \beta_{ij}^0 \theta^{mn})_{,j}) &= \varepsilon^m (-\rho^m \theta^{0n} \ddot{u}_i^{0n} + (C_{ijkl}^m \theta^{0n} u_{k,l}^{0n} - \beta_{ij}^m \theta^{0n} \theta^{0n})_{,j} - \\ &\quad - \rho^1 \ddot{u}_i^{1n} + (C_{ijkl}^1 u_{k,l}^{(m-1)n} - \beta_{ij}^1 \theta^{(m-1)n})_{,j}),\end{aligned}\quad (1.5)$$

замыкаемых начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}\theta^{mn}(\mathbf{x}, 0) &= \delta_{0m} \varphi_0^n(\mathbf{x}), \quad u_i^{mn}(\mathbf{x}, 0) = \delta_{0m} \varphi_i^n(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{mn}(\mathbf{x}, 0) = \delta_{0m} \psi_i^n(\mathbf{x}), \\ \sum_{s=0}^m K_{i3}^{m-s} \theta_{,i}^s(x_1, x_2, 0, t) &= \delta_{0m} p_0^n(x_1, x_2, t),\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^m \{C_{i3kl}^{m-s} u_{k,l}^s - \beta_{i3}^{m-s} \theta^s\}(x_1, x_2, 0, t) &= \delta_{0m} p_i^n(x_1, x_2, t); \\ \theta^{mn}(x_1, x_2, 0, t) &= \delta_{0m} \chi^{0n}(x_1, x_2, t) + \delta_{1m} \chi^{1n}(x_1, x_2, t), \\ u_i^{mn}(x_1, x_2, 0, t) &= \delta_{0m} \chi_i^{0n}(x_1, x_2, t) + \delta_{1m} \chi_i^{1n}(x_1, x_2, t),\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}^m(x_1, x_2, 0) = \delta_{0m}\{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}^0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

В дальнейшем характеристики контрольной среды $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^0$ будем считать известными, т. е. задача диагностики будет заключаться в уточнении свойств исследуемой среды. Заметим, что исходная задача определения $C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}, \theta^n, u_i^n$ из N соотношений вида (1.1)–(1.3) нелинейна, так как они содержат произведения искомым функций (характеристик среды и термоупругих процессов). Кроме того, зависимость характеристик среды от одной из искомым функций температуры полагается нелинейной. В этом смысле переход от (1.1)–(1.3) к (1.5) аналогичен основанной на методе возмущения процедуре линеаризации, используемой при решении нелинейных задач термоупругости неоднородных тел [4].

Структура соотношений (1.5)–(1.7) позволяет последовательно найти коэффициенты разложения температурной зависимости характеристик среды $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^m$ начиная с $m = 1$.

Приведем алгоритм вычисления величин $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^m(\mathbf{x})$ и $\{\theta, u\}^{mn}(\mathbf{x}, t)$. Заметим, что первое матричное уравнение (при $m = 0$) в (1.4) не содержит неизвестных $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^m, m = 1, 2, \dots$ и вместе с условиями (1.6), рассматриваемыми при $m = 0$, представляет собой серию начально-краевых задач второго рода (относительно функций $\{\theta, u\}^{0n}(\mathbf{x}, t), n = 1, 2, \dots, N$), описывающих распространение термоупругих волн в однородном изотропном нетермочувствительном полупространстве. В дальнейшем решения этих задач будем полагать известными и имеющими вид $\{\theta, u_i\}^{0n}(\mathbf{x}, t) = \exp(-a_n t)\{g_0, g_i\}^n(\mathbf{x}), a_n > 0$ (по n суммирование не проводится), что накладывает ограничения на функции $\{f_0, f_i, \varphi_0, \varphi_i, \psi_i, p_0, p_i\}^n$, т. е. на условия инициирования термоупругих процессов в исследуемой среде.

Отметим, что конкретный вид функций $\{f_0, f_i, \varphi_0, \varphi_i, \psi_i, p_0, p_i\}^n$ может быть получен путем непосредственной подстановки $\{\theta, u_i\}^{0n}(\mathbf{x}, t)$ в (1.1)–(1.3) после замены $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^0 \rightarrow \{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}(\mathbf{x}, \theta)$. Монотонное изменение температуры в контрольной среде соответствует сделанным ранее физическим предположениям.

2. В соответствии с (1.5)–(1.7) для функций $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}, \theta^n, u_i^n\}^1$ имеем

$$C_v^0 \dot{\theta}^{1n} - (K_{ij}^0 \theta_{,i}^{1n})_{,j} = -C_v^1 \dot{\theta}^{0n} + (K_{ij}^1 \theta_{,i}^{0n})_{,j}; \quad (2.1)$$

$$\rho^0 \ddot{u}_i^{1n} - (C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{1n} - \beta_{ij}^0 \theta^{1n})_{,j} = -\rho^1 \ddot{u}_i^{0n} + (C_{ijkl}^1 u_{k,l}^{0n} - \beta_{ij}^1 \theta^{0n})_{,j},$$

$$\theta^{mn}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_i^{mn}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}_i^{mn}(\mathbf{x}, 0) = 0,$$

$$\{K_{i3}^0 \theta_{,i}^{1n} + K_{i3}^1 \theta_{,i}^{0n}\}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\{C_{i3kl}^0 u_{k,l}^{1n} - \beta_{i3}^0 \theta^{1n} + C_{i3kl}^1 u_{k,l}^{0n} - \beta_{i3}^1 \theta^{0n}\}(x_1, x_2, 0, t) = 0,$$

$$\theta^{1n}(x_1, x_2, 0, t) = \chi^{1n}(x_1, x_2, t), \quad u_i^{1n}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_i^{1n}(x_1, x_2, t),$$

$$\{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}^1(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

Задача определения этих функций аналогична линеаризованной задаче диагностики [10–12], поэтому приведем только схему ее решения. Решение задачи разбивается на два этапа: 1) определение $\{\theta, u_i\}^{1n}(\mathbf{x}, t), n = 1, N$; 2) восстановление $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^1(\mathbf{x})$ из правых частей матричных уравнений (2.1), (2.2).

1. Применим к уравнениям (2.1), (2.2) оператор $L = \partial_t + a_n I$ (I — единичный оператор), после чего для каждого фиксированного n относительно новых неизвестных $T = L\theta^{1n}, v_i = Lu_i^{1n}$ получим

$$C_v^0 \dot{T} - (K_{ij}^0 T_{,i})_{,j} = 0; \quad (2.3)$$

$$\rho^0 \ddot{v}_i - (C_{ijkl}^0 v_{k,l} - \beta_{ij}^0 T)_{,j} = 0; \quad (2.4)$$

$$v_i(\mathbf{x}, 0) = 0; \quad (2.5)$$

$$K_{i3}^0 T_{,i}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad T(x_1, x_2, 0, t) = L\chi^{1n}(x_1, x_2, t); \quad (2.6)$$

$$C_{i3kl}^0 v_{k,l}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad v_i(x_1, x_2, 0, t) = L\chi_i^{1n}(x_1, x_2, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.7)$$

Уравнения (2.3), (2.4) аналогичны уравнениям термоупругости для однородной изотропной среды, так как величины $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^0$, входящие в эти уравнения в качестве коэффициентов, соответствуют однородной изотропной среде. Однако в данном случае из них находятся вспомогательные функции T, v_i . Так как $K_{ij}^0 = K^0 \delta_{ij}$, то уравнение (2.1) с граничными условиями (2.6) представляет собой задачу Коши с данными на непространственном многообразии [4].

Краевые условия (2.7) с учетом (2.4) позволяют найти функции $\{U, U_3, \mathbf{W}, \mathbf{W}_3\}$ при $x_3 = 0$ ($U = \text{div } \mathbf{v}$, $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3) = \text{rot } \mathbf{v}$). Из условия (2.5) следует, что начальные условия для этих функций будут однородными: $U(\mathbf{x}, 0) = 0$, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, 0) = 0$. Применяя операторы div и rot к уравнениям (2.4), получим

$$\rho^0 \ddot{U} - (\lambda^0 + 2\mu^0) \Delta U = -\beta^0 \Delta T, \quad \rho^0 \ddot{\mathbf{W}} - \mu^0 \Delta \mathbf{W} = 0.$$

Таким образом, для U и трех компонент вектор-функции \mathbf{W} (из которых независимы только две) имеем волновое уравнение, однородное начальное условие и два краевых условия при $x_3 = 0$, которые составляют негиперболическую задачу Коши (задачу Коши с данными на непространственном многообразии) для волнового уравнения. Данная задача, как и задача (2.3), (2.6), является классически некорректной в классе функций $C^n(R_+^3 \times R_+)$: ее решение существует не для любых данных Коши (при $x_3 = 0$) из этого класса. Это делает классически некорректной задачу диагностики в целом. Необходимо отметить, что в классе аналитических функций рассматриваемые задачи классически (по Адамару) корректны. В частности, если граничные значения искомых функций допускают в качестве представлений разложения в ряд по собственным функциям оператора Лапласа, то решение может быть получено методом разделения переменных Фурье. Найдя U, W_1, W_2 , можно восстановить $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, а затем из уравнений

$$\dot{\theta}^{1n} + a_n \theta^{1n} = T, \quad \dot{u}_i^{1n} + a_n u_i^{1n} = v_i$$

с использованием однородных начальных условий определить $\{\theta, u_i\}^{1n}(\mathbf{x}, t)$. Вычисления первого этапа выполняются N раз.

2. Зная θ^{1n}, u_i^{1n} , можно найти правые части уравнений (2.1), (2.2), которые в соответствии с принятым предположением имеют вид $\exp(-a_n t) \{F_0^{1n}, F_1^{1n}, F_2^{1n}, F_3^{1n}\}(\mathbf{x})$. Таким образом, второй этап заключается в определении $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^1(\mathbf{x})$ из уравнений

$$a_n C_v^1 g_0^n + (K_{ij}^1 g_{0,i}^n)_{,j} = F_0^{1n}, \quad -(a_n)^2 \rho^1 g_i^n + (C_{ijkl}^1 g_{k,l}^n - \beta_{ij}^1 g_0^n)_{,j} = F_i^{1n} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

и однородных краевых условий относительно $\{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}^1$ из (2.2). Число N (число различных режимов тестовых испытаний) выбирается так, чтобы количество независимых скалярных уравнений вида (2.8) было равно числу независимых неизвестных $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^1(\mathbf{x})$.

В случае анизотропии общего вида тензор коэффициентов жесткости C_{ijkl} содержит 21 независимую компоненту, а тензоры коэффициентов теплопроводности K_{ij} и коэффициентов объемного температурного расширения β_{ij} — по 6 независимых компонент. В этом случае общее число неизвестных равно 35. Высокий порядок затрудняет решение системы вида (2.8). Однако в ряде случаев рассмотрение специальных типов анизотропии и дополнительных функциональных связей между термомеханическими характеристиками

материала, а также специальный подбор функций $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}^n$ (условий проведения тестовых испытаний) позволяют существенно понизить порядок и упростить решение.

3. Для определения величин $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}, \theta^n, u^n\}^2$ из соотношений (1.5)–(1.7) имеем

$$\begin{aligned} C_v^0 \dot{\theta}^{2n} - (K_{ij}^0 \theta_{,i}^{2n})_{,j} &= -C_v^2 \theta^{0n} \dot{\theta}^{0n} + (K_{ij}^2 \theta^{0n} \theta_{,i}^{0n})_{,j} + [-C_v^1 \dot{\theta}^{1n} + (K_{ij}^1 \theta_{,i}^{1n})_{,j}], \\ \rho^0 \ddot{u}_i^{2n} - (C_{ijkl}^0 u_{k,l}^{2n} - \beta_{ij}^0 \theta^{2n})_{,j} &= -\rho^2 \theta^{0n} \ddot{u}_i^{0n} + (C_{ijkl}^2 \theta^{0n} u_{k,l}^{0n} - \beta_{ij}^2 \theta^{0n} \theta^{0n})_{,j} + \\ &+ [-\rho^1 \ddot{u}_i^{1n} + (C_{ijkl}^1 u_{k,l}^{1n} - \beta_{ij}^1 \theta^{1n})_{,j}]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Начальные условия:

$$\theta^{2n}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_i^{2n}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}_i^{2n}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (3.2)$$

граничные условия:

$$\{K_{i3}^2 \theta_{,i}^0 + [K_{i3}^1 \theta_{,i}^1] + K_{i3}^0 \theta_{,i}^2\}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\{C_{i3kl}^2 u_{k,l}^0 + [C_{i3kl}^1 u_{k,l}^1] + C_{i3kl}^0 u_{k,l}^2\}(x_1, x_2, 0, t) = 0;$$

$$\theta^{2n}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad u_i^{2n}(x_1, x_2, 0, t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3.4)$$

$$\{K_{i3}, \beta_{i3}, C_{i3kl}\}^2(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3). \quad (3.5)$$

В соотношениях (3.1)–(3.5) в квадратных скобках приведены выражения, в которые входят уже известные (см. п. **2**) функции. Искомое решение $\{\theta^n, u^n\}^2(\mathbf{x}, t)$ представим в виде $\{\theta^n, u^n\}^2 = \{\theta^n, u^n\}^{2*} + \{\theta^n, u^n\}^{2**}$, где $\{\theta^n, u^n\}^{2**}$ удовлетворяет уравнениям (3.1)–(3.3), правыми частями которых являются выражения в квадратных скобках. Задача определения $\{\theta^n, u^n\}^{2**}$ представляет собой несколько начально-краевых задач динамической термоупругости второго рода, описывающих распространение в полупространстве термоупругих волн, инициированных действием массовых сил, тепловых источников и термосиловых нагружений на границе [14]. После нахождения $\{\theta^n, u^n\}^{2**}$ задача определения $\{\theta^n, u^n\}^{2*}(\mathbf{x}, t)$, а затем и $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^2(\mathbf{x})$ из соотношений (3.1)–(3.4), не содержащих выражений в квадратных скобках, аналогична задаче (2.1), (2.2). Однако в данном случае оператор L имеет вид $L = \partial_t + 2a_n I$.

Таким образом, можно последовательно получить все члены разложений характеристик термоупругих процессов $\{\theta^n, u^n\}^m(\mathbf{x}, t)$, используемых для диагностики, и, что более важно в рамках данной задачи, зависящие от пространственных координат коэффициенты разложений в ряд по степеням температуры характеристик исследуемой среды $\{C_v, \rho, K_{ij}, \beta_{ij}, C_{ijkl}\}^m(\mathbf{x})$.

4. В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда заранее известно, что исследуемая среда изотропна, а ее характеристики зависят только от координаты x_3 (расстояния до поверхности полупространства). Тогда при не зависящих от x_1, x_2 условиях инициирования термоупругих волн задача диагностики становится двумерной: характеристики среды зависят от пространственной координаты x_3 и температуры θ , а характеристики термоупругих процессов — от x_3 и времени t .

Число искомым характеристик среды сокращается до шести: $\{C_v, K, \rho, \lambda, \mu, \beta\}(x_3, \theta)$, поэтому положим $N = 2$. При $m = 1$ соотношения (2.1), (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} C_v^0 \dot{\theta}^{1n} - K^0 \theta_{,ii}^{1n} &= -C_v^1 \dot{\theta}^{0n} + (K^1 \theta_{,i}^{0n})_{,i} \quad (n = 1, 2, k = 1, 2, i = 1, 2, 3), \\ \rho^0 \ddot{u}_k^{11} - \mu^0 \Delta u_k^{11} &= -\rho^1 \ddot{u}_k^{01} + (\mu^1 u_{k,3}^{01})_{,3}, \\ \rho^0 \ddot{u}_3^{1n} - (\lambda^0 + 2\mu^0) \Delta^0 u_3^{1n} - \beta^0 \theta_{,k}^{1n} &= -\rho^1 \ddot{u}_3^{0n} + (\mu^1 u_{3,3}^{0n})_{,3} - (\beta^1 \theta^{0n})_{,3}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Соотношения (4.1) замыкаются начальными условиями

$$\theta^{1n}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_k^{11}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_3^{1n}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}_k^{11}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}_3^{1n}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (4.2)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} & \{K^0 \theta_{,i}^{1n} + K^1 \theta_{,i}^{0n}\}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \\ & \{\mu^0 (u_{k,3}^{11} + u_{3,k}^{11}) + \mu^1 (u_{k,3}^{01} + u_{3,k}^{01})\}(x_1, x_2, 0, t) = 0 \quad (k = 1, 2), \\ & \{\lambda^0 (u_{1,1}^{1n} + u_{2,2}^{1n}) + (\lambda^0 + 2\mu^0) u_{3,3}^{1n} - \beta^0 \theta^{1n} + \lambda^1 (u_{1,1}^{0n} + u_{2,2}^{0n}) + \\ & \quad + (\lambda^1 + 2\mu^1) (u_{3,3}^{0n}) - \beta^1 \theta^{0n}\}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\theta^{1n}(x_1, x_2, 0, t) = \chi^{1n}(x_1, x_2, t), \quad u_k^{11}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_k^{11}(x_1, x_2, t) \quad (k = 1, 2),$$

$$u_3^{1n}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_3^{1n}(x_1, x_2, t);$$

$$\{K, \lambda, \mu, \beta\}^1(x_3) = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, необходимо проведение двух “тестовых испытаний”: в первом из них на поверхности измеряются температура и три компоненты вектора перемещений, во втором — только температура и нормальная компонента перемещения.

Особенностью рассматриваемого случая является то, что предположение о пространственной одномерности (зависимости только от x_3) распределения неоднородности делает одномерной задачу на первом этапе и тем самым значительно упрощает восстановление характеристик термоупругих процессов, используемых для диагностики. В этой задаче поля температур и деформаций не связаны, кроме того, происходит независимое распространение продольных и поперечных упругих волн. Поэтому отсутствует необходимость выделять дивергентную и роторную составляющие вектора перемещений. Данное предположение упрощает также задачу на втором этапе, поскольку коэффициенты разложения характеристик среды по степеням θ также зависят только от x_3 . В этом случае при $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}^n = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}^n(x_3)$ (причем для дальнейшего упрощения будем полагать $g_0^1(x_3) = g_0^2(x_3)$, $g_1^1(x_3) = g_1^2(x_3)$, $g_1^2(x_3) = g_2^2(x_3) = 0$) решение задачи на втором этапе находится из системы шести обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$a_n C_v^1 g_0^n + (g_{0,3}^n K^1)_{,3} = F_0^{1n} \quad (n = 1, 2); \quad (4.5)$$

$$-(a_1)^2 \rho^1 g_k^1 + (\mu^1 g_{k,3}^1)_{,3} = F_k^{11} \quad (k = 1, 2); \quad (4.6)$$

$$-(a_n)^2 \rho^1 g_3^n + ((\lambda^1 + 2\mu^1) g_{3,3}^n)_{,3} - (\beta^1 g_0^n)_{,3} = F_3^{1n} \quad (n = 1, 2). \quad (4.7)$$

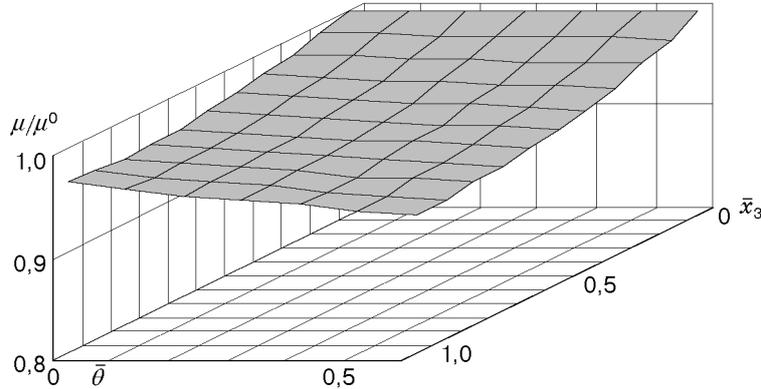
Необходимо отметить, что система (4.5)–(4.7) распадается на три подсистемы. Из уравнений (4.5) при $n = 1, 2$ найдем

$$K^1(x_3) = \frac{1}{g_{0,3}^1} \int_0^{x_3} (a_2 F_0^{11}(\xi) - a_1 F_0^{12}(\xi)) d\xi,$$

$$C_v^1(x_3) = \frac{1}{a_1 g_0^1} \left(F_0^{11} - \int_0^{x_3} (a_2 F_0^{11}(\xi) - a_1 F_0^{12}(\xi)) d\xi \right).$$

Уравнения системы (4.6) при $k = 1, 2$ позволяют найти

$$\mu^1(x_3) = \frac{1}{g_{1,3}^1} \int_0^{x_3} ((a_2)^2 F_1^{11}(\xi) - (a_1)^2 F_2^{11}(\xi)) d\xi,$$



$$\rho^1(x_3) = \frac{1}{(a_1)^2 g_1^1} \left(F_1^{11} + \int_0^{x_3} ((a_2)^2 F_1^{11}(\xi) - (a_1)^2 F_2^{11}(\xi)) d\xi \right).$$

Уравнения (4.7) при $n = 1, 2$ с учетом уже найденной функции $\mu^1(x_3)$ позволяют найти

$$\lambda^1(x_3) = -2\mu^1(x_3) + \frac{1}{g_{3,3}^1 - g_{3,3}^2} \int_0^{x_3} (F_3^{11}(\xi) - F_3^{12}(\xi) + (a_1)^2 \rho^1(\xi) g_3^1(\xi) - (a_2)^2 \rho^1(\xi) g_3^2(\xi)) d\xi,$$

$$\beta^1(x_3) = \frac{1}{g_0^1} \left(\int_0^{x_3} (F_3^{11}(\xi) + (a_1)^2 \rho^1(\xi) g_3^1(\xi)) d\xi - (\lambda^1 + 2\mu^1) g_{3,3}^1 \right).$$

Остальные коэффициенты разложений в ряд по степеням температуры характеристик исследуемой среды $\{C_v, K, \rho, \lambda, \mu, \beta\}^m(x_3)$, $m = 1, 2, \dots$ ищутся аналогично.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. В соотношениях (4.1)–(4.3) использовали безразмерные переменные $\bar{C}_v = C_v/C_v^0$, $\bar{K} = K/K^0$, $\bar{\rho} = \rho/\rho^0$, $\bar{\lambda} = \lambda/\mu^0$, $\bar{\mu} = \mu/\mu^0$, $\bar{\beta} = \beta/\beta^0$, $\bar{x}_3 = x_3/a$, $\bar{t} = tC_v^0/a$, $\bar{\theta} = \theta/T$, $\bar{u}_i = u_i/a$, $\{\bar{\theta}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}^1(0, \bar{t}) = \{0, 0, 3 \exp(-\bar{t}) - 0,1 \exp(\bar{t}) - 0,2 \exp(-2\bar{t}), 0, 0\}$, $\{K, \lambda, \mu, \beta\}(0) = 0$, $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}^1(\bar{x}_3) = \{\exp(-\bar{x}_3), \cos \bar{x}_3, \cos \bar{x}_3, \sin \bar{x}_3\}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. В разложении (1.4) учитывалось по три члена ряда, поскольку в данном примере слагаемые, соответствующие более высоким степеням θ , не оказывают значительного влияния на решение. На рисунке приведена зависимость модуля сдвига μ/μ^0 (μ^0 — модуль сдвига однородной контрольной среды) от пространственной переменной \bar{x}_3 и относительной температуры $\bar{\theta}$. Характер изменения модуля сдвига (как и других термомеханических характеристик) при возрастании температуры дает дополнительную информацию о структурной неоднородности материала, что в конечном счете является главной целью диагностики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1984. Ч. 1.
2. Сенцкий Дж. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. Т. 2.
3. Ломазов В. А., Немировский Ю. В. Об одной постановке задачи диагностики для термоупругой среды // ПМТФ. 1984. № 5. С. 131–137.
4. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.

5. **Волкова Е. А., Романов В. Г.** Обратные динамические задачи для анизотропной упругой среды // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 780–783.
6. **Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.** Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.
7. **Нигул У. К.** Нелинейная акустодиагностика. Л.: Судостроение, 1981.
8. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
9. **Яхно В. Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
10. **Ломазов В. А., Немировский Ю. В.** Математическая модель проблемы диагностики термоупругой среды // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 2. С. 284–292.
11. **Ломазов В. А.** Задача диагностики упругих полуограниченных тел // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 5. С. 766–772.
12. **Ломазов В. А.** Об одной постановке задачи диагностики слабо неоднородных и анизотропных упругих пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 3. С. 111–117.
13. **Ломазов В. А.** Об одной постановке задачи тепловой диагностики “защитного” слоя // ПМТФ. 1991. № 2. С. 113–118.
14. **Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.** Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984.

*Поступила в редакцию 19/III 2001 г.,
в окончательном варианте — 29/IV 2002 г.*
