УДК 532.59

О КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРОВ В ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Е. В. Ерманюк, Н. В. Гаврилов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Теоретически и экспериментально исследованы гидродинамические нагрузки, действующие на горизонтально расположенные цилиндры с поперечным сечением в виде ромба и квадрата, совершающие гармонические колебания в линейно стратифицированной жидкости. Аналитическое решение получено с помощью соотношений аффинного подобия. Экспериментальная оценка коэффициентов гидродинамических сил проведена на основе записей затухающих колебаний цилиндров с помощью преобразования Фурье в частотно-временной области. Показано, что для контуров в виде многоугольников при совпадении углов наклона сторон с углом наклона вектора групповой скорости внутренних волн имеет место резкое изменение гидродинамических нагрузок.

Введение. Локальные характеристики поля внутренних волн, генерируемых гармоническими колебаниями тел, погруженных в экспоненциально стратифицированную жидкость, изучены достаточно подробно теоретически и экспериментально [1–4]. В ряде работ получена оценка интегральных характеристик, в частности мощности, затрачиваемой на излучение внутренних волн, и гидродинамической нагрузки, действующей на колеблющиеся тела. В [5] предложен приближенный способ оценки мощности излучения, причем тело моделируется распределением особенностей, полученных при решении задачи в однородной жидкости.

Оценки гидродинамических нагрузок в рамках приближения Буссинеска для невязкой экспоненциально стратифицированной жидкости при точном удовлетворении условию непротекания на теле получены для вертикальных колебаний эллипсоида вращения [6] и произвольных по направлению колебаний эллиптического цилиндра [7]. В работе [8] решение, полученное в [7], распространено на случай вязкой жидкости. Экспериментальная проверка этого решения выполнена в [9]. Следует отметить, что в работах [6, 7] решение построено для частных видов геометрии исследуемых тел и используемый в этих работах метод не позволяет построить решение для тел произвольной геометрии. Для таких тел решение может быть получено с помощью соотношений аффинного подобия [10]. В [10] приведены также экспериментальные данные для семейства эллипсоидов вращения различного удлинения.

В настоящей работе соотношения, полученные в [10], использованы при теоретической оценке гидродинамических нагрузок, действующих на горизонтальные цилиндры с поперечным сечением в виде ромба и квадрата при их горизонтальных и вертикальных колебаниях в экспоненциально стратифицированной жидкости. Экспериментальная проверка полученных решений для случая горизонтальных колебаний проведена с использованием изложенной в [9] методики. Следует отметить, что в стратифицированной жидкости движение контуров с угловыми точками исследовалось лишь в работе [11], в которой экс-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00812) и Сибирского отделения РАН (Молодежный научный проект № 6 и Интеграционный проект № 1).

периментально изучена структура поля внутренних волн, генерируемых вертикальными колебаниями квадратного контура. Задача о колебаниях контуров, имеющих угловые точки, в вязкой однородной жидкости подробно исследована в [12].

1. Теоретический анализ. В данной работе задача о колебаниях плоских контуров в экспоненциально стратифицированной жидкости представляет собой частный случай задачи о колебаниях трехмерных тел [10]. Сформулированы основные соотношения для пространственного случая и исследованы особенности плоской задачи. Аналогично [10] используется модель безграничной невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента $N(x_3) = \sqrt{-(g/\rho)(d\rho/dx_3)} = \mathrm{const}$ ($\rho(x_3)$ — распределение плотности по вертикали в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3); g — ускорение свободного падения).

Диапазон параметров, в котором применима данная модель, может быть оценен из следующих физических соображений. В общем случае гидродинамическая нагрузка на тело с характерным размером L, совершающее гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω в вязкой стратифицированной жидкости с $N = \mathrm{const}$, зависит от трех основных параметров: безразмерной частоты колебаний $\Omega = \omega/N$, числа Келегана — Карпентера a/L и числа Стокса $\beta = L^2\omega/\nu$ (ν — кинематическая вязкость жидкости). В идеальной жидкости с $N = \mathrm{const}$ основным параметром является безразмерная частота Ω, в данной задаче выполняющая роль числа Фруда.

Масштаб гидродинамических нагрузок в идеальной жидкости определяется объемом тела W. В вязкой жидкости при $\beta \gg 1$ и $a/L \ll 1$ колеблющееся тело окружено пограничным слоем, толщина которого имеет порядок $\delta^* = \sqrt{\nu/\omega}$. Соответственно объем жидкости, в котором происходит интенсивная вязкая диссипация энергии вблизи тела, имеет порядок $\delta^* S$ (S — площадь поверхности тела). Влияние вязких и невязких эффектов можно приближенно охарактеризовать величиной $A = \delta^* S/W$. При больших значениях A влияние вязкости становится доминирующим. Например, при колебаниях тонкой пластины (тело нулевого объема) вдоль определяемой ею плоскости $A \to \infty$ и учет вязкости необходим [13, 14].

При $a/L \approx 1$ обычно наблюдается отрыв потока в окрестности тела, что может означать увеличение эффективной толщины β и параметра A. Для тел, имеющих угловые точки, отрыв возникает при достаточно малых a/L. Теория [12], справедливая при $a/L < 0{,}5$, позволяет оценить величины гидродинамических нагрузок в однородной жидкости для цилиндров с поперечным сечением в виде ромба и квадрата. Оценки показывают, что в диапазоне параметров, изученном в настоящей работе, влияние отрывных явлений на характер колебаний пренебрежимо мало, поскольку при $a/L \ll 1$ и $\beta \gg 1$ основной (линейный относительно a/L) вклад в демпфирование дают вязкостные эффекты в тонком пограничном слое вокруг тела, тогда как локальные отрывные явления вблизи угловых точек дают вклад порядка $(a/L)^2$. По-видимому, эта оценка справедлива и для стратифицированной жидкости, так как в малой окрестности угловых точек локальная скорость обтекания велика, и соответственно локальные инерционные эффекты, определяющие отрыв потока, оказывают существенно большее влияние, чем эффекты плавучести.

Следует также отметить, что в некоторых случаях при достаточно больших значениях a/L вблизи тела, колеблющегося в стратифицированной жидкости, могут образовываться структуры, влияющие на динамику колебаний в целом (см., например, описание вихревых и копьевидных структур в [15]). В настоящей работе эта сложная нелинейная задача не рассматривается.

Исходя из изложенных выше соображений можно предположить, что модель идеальной стратифицированной жидкости, используемая в настоящей работе, дает удовлетворительную оценку реальных гидродинамических нагрузок при $a/L \ll 1$, $A \ll 1$, $\beta \gg 1$.

Ниже уравнения движения жидкости записаны для “внутреннего” потенциала [16]. Если предположить, что скорость движения тела $\boldsymbol{v}^{(1)}$, “внутренний” потенциал $\varphi^{(1)}$, скорость жидких частиц $\boldsymbol{u}^{(1)}$ и давление $p^{(1)}$ являются гармоническими функциями времени вида $\boldsymbol{v}^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) = \boldsymbol{V}^{(1)}(x_1, x_2, x_3)\mathrm{e}^{i\omega t}$, то можно сформулировать следующую задачу.

Задача 1. Уравнение движения жидкости имеет вид

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big)\Phi^{(1)} = 0, \tag{1}$$

где $\alpha = (\Omega^2 - 1)^{1/2}/\Omega$. Уравнение (1) может быть уравнением эллиптического или гиперболического типа в зависимости от знака α^2. Сначала рассмотрим эллиптическую задачу ($\alpha^2 > 0$). Давление и скорость жидких частиц в задаче 1 выражаются через потенциал следующим образом:

$$P^{(1)} = -\rho_0 i\omega\Phi^{(1)}, \qquad \boldsymbol{U}^{(1)} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial}{\partial x_3}\Big)\Phi^{(1)}.$$

Здесь ρ_0 — характерное значение плотности. Условие непротекания на поверхности тела $S^{(1)}$, задаваемой уравнением $F^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = 0$, имеет вид

$$\boldsymbol{U}^{(1)} \cdot \nabla^{(1)} F^{(1)} = \boldsymbol{V}^{(1)} \cdot \nabla^{(1)} F^{(1)}, \tag{2}$$

где $\nabla^{(1)} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. На бесконечности ставится условие $\Phi^{(1)} \to 0$ при $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty$.

После аффинного преобразования системы координат

$$\xi_j = a_j x_j, \qquad a_j = (1, 1, \alpha) \tag{3}$$

задача 1 преобразуется в задачу 2.

Задача 2. Уравнение движения жидкости (1) преобразуется в уравнение Лапласа

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}\Big)\Phi^{(2)} = 0. \tag{4}$$

Граничное условие на поверхности $S^{(2)}$, задаваемой функцией $F^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, принимает вид

$$\nabla^{(2)}\Phi^{(2)} \cdot \nabla^{(2)} F^{(2)} = \boldsymbol{V}^{(2)} \cdot \nabla^{(2)} F^{(2)}, \tag{5}$$

где $\nabla^{(2)} = (\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2, \partial/\partial\xi_3)$; компоненты вектора скорости тела выражаются аналогично (3): $V_j^{(2)} = a_j V_j^{(1)}$. На бесконечности ставится условие $\Phi^{(2)} \to 0$ при $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \to \infty$.

Компоненты вектора гидродинамической нагрузки $\boldsymbol{y}^{(1,2)}(t) = \boldsymbol{Y}^{(1,2)}\mathrm{e}^{i\omega t}$ в задачах 1, 2 могут быть получены интегрированием давления $P^{(1,2)} = -\rho_0 i\omega\Phi^{(1,2)}$ по поверхности тела:

$$Y_k^{(1,2)} = -\rho_0 i\omega \int\limits_{S^{(1,2)}} \Phi^{(1,2)} n_k^{(1,2)}\, dS^{(1,2)}$$

($n_k^{(1,2)}$ — компоненты единичного вектора внутренней нормали к поверхности тела $S^{(1,2)}$).

Из (4), (5) следует, что задача 2 является классической задачей о колебаниях тела в идеальной однородной жидкости. Известно, что компоненты гидродинамической нагрузки в задаче 2 могут быть выражены через компоненты тензора присоединенных масс (см., например, [17]):

$$y_k^{(2)} = -\sum_{j=1}^{3} m_{jk}^{(2)}\,\frac{dv_j^{(2)}}{dt}. \tag{6}$$

Здесь $v_j^{(2)} = V_j^{(2)}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ — компоненты вектора скорости тела. Компоненты тензора присоединенных масс

$$m_{jk}^{(2)} = \rho_0 \int\limits_{S^{(2)}} \Phi_j^{(2)} n_k^{(2)}\, dS^{(2)} \tag{7}$$

определяются из решения задачи 2 для единичных потенциалов, которые вводятся разложением

$$\Phi^{(2)} = \sum_{j=1}^{3} V_j^{(2)} \Phi_j^{(2)}. \tag{8}$$

Для задачи 1 (уравнения (1), (2)) можно ввести соотношения, аналогичные (6)–(8). В [10] для тензоров коэффициентов присоединенных масс $K_{jk}^{(1)} = m_{jk}^{(1)}/(\rho_0 W^{(1)})$ и $K_{jk}^{(2)} = m_{jk}^{(2)}/(\rho_0 W^{(2)})$ ($W^{(1)}, W^{(2)}$ — объемы тел, окруженных поверхностями $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$) получено следующее соотношение:

$$K_{jk}^{(1)} = K_{jk}^{(2)} a_j a_k. \tag{9}$$

Для семейства тел определенной геометрической формы с различными отношениями $e = b_2/b_1$ и $q = b_3/b_2$ характерных размеров эллипсоида b_1, b_2, b_3 в направлениях ξ_1, ξ_2, ξ_3 компоненты тензора коэффициентов присоединенных масс в задаче 2 представляются в виде [18]

$$K_{jk}^{(2)} = f_{jk}(e, q). \tag{10}$$

Решение задачи 1 для тензора коэффициентов присоединенных масс тела при заданных e_0 и q_0 может быть получено из (9), (10):

$$K_{jk}^{(1)}(\Omega) = f_{jk}(e_0, q_0\alpha) a_j a_k. \tag{11}$$

Следует отметить, что соотношения типа (9) для эллиптической задачи получены в [19] для тела, движущегося по закону $\boldsymbol{v}(t) = \varepsilon \boldsymbol{v}_0 \mathrm{e}^{\delta t}$, где $|\boldsymbol{v}_0| = 1$; ε, δ — малые положительные величины. В [19] найдена асимптотика при малых скоростях движения.

При $\Omega < 1$ уравнение (1) является уравнением гиперболического типа ($\alpha^2 < 0$). Особенностью гиперболической задачи является излучение внутренних волн колеблющимся телом. В этом случае решение задачи может быть получено с помощью аналитического продолжения

$$K_{jk}^{(1)}(\Omega) = f_{jk}(e_0, -q_0 i\eta)\gamma_j\gamma_k, \tag{12}$$

где $\eta = (1-\Omega^2)^{1/2}/\Omega$; γ_j, γ_k принимают значения 1, 1, $-i\eta$ для $j, k = 1, 2, 3$ соответственно. Следует отметить, что в отличие от случая $\Omega > 1$, когда $m_{jk}^{(1)}$ являются вещественными величинами, при $\Omega < 1$ величины $m_{jk}^{(1)}$ в общем случае являются комплексными. В корабельной гидродинамике принято представление [17] $m_{jk} = \mu_{jk} - i\lambda_{jk}/\omega$, где μ_{jk} — присоединенная масса; λ_{jk} — коэффициент демпфирования. Соответствующие безразмерные величины можно ввести в виде

$$C_{jk}^{\mu} = \mu_{jk}/(\rho_0 W^{(1)}) = \mathrm{Re}\,(K_{jk}^{(1)}), \qquad C_{jk}^{\lambda} = \lambda_{jk}/(\rho_0 N W^{(1)}) = \Omega\,\mathrm{Im}\,(K_{jk}^{(1)}). \tag{13}$$

Из (11), (12) следует, что при фиксированном значении e_0 для семейства тел с различными значениями q_0 справедливы соотношения аффинного подобия

$$K_{jk}^{(1)}/(a_j a_k) = \mathrm{idem}, \quad \text{если} \ \ q_0^2\alpha^2 = \mathrm{idem}. \tag{14}$$

В случае пространственной задачи для горизонтальных колебаний тела при $\Omega \to 0$ ($\alpha^2 \to -\infty$) уравнение (1) с граничным условием (2) сводится к набору двумерных уравнений Лапласа с соответствующими условиями непротекания для горизонтальных поперечных сечений тела. Значение C_{11}^{μ} при $\Omega \to 0$ может быть получено методом плоских сечений. Мнимая часть коэффициентов гидродинамической нагрузки при $\Omega \to 0$ обращается в нуль.

Для двумерной задачи вместо системы координат (x_1, x_2, x_3) используем систему координат (y_1, y_2) в плоскости $x_1 = 0$, так что $y_1 = x_2$, $y_2 = x_3$. Преобразования формул (10)–(13) при этом очевидны. Величины C_{mn}^{μ}, C_{mn}^{λ} (m, n принимают значения 1, 2) представляют собой коэффициенты нагрузок, приходящихся на единицу длины, а величины $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ — площади поперечных сечений горизонтальных цилиндров в задачах 1, 2. Кроме того, в плоской задаче функции f_{mn}, входящие в выражения (10)–(12), являются функциями одного параметра q. Предельный переход $\Omega \to 0$ соответствует $|q| \to \infty$. Однако при $|q| \to \infty$ любой плоский контур вырождается в вертикальную линию. Следовательно, для горизонтальных колебаний при $\Omega \to 0$ имеет значение только вертикальный размер цилиндра, но не форма его поперечного сечения. Для цилиндра с площадью поперечного сечения $W^{(1)}$ и вертикальным размером D можно указать предельное значение $C_{11}^{\lambda}(\Omega)$ при $\Omega \to 0$: $C_{11}^{\lambda}(0) = \pi D^2/(4W^{(1)})$. Например, для круга $C_{11}^{\lambda}(0) = 1$, для ромба с вертикально ориентированной диагональю $C_{11}^{\lambda}(0) = \pi/2$, для квадрата $C_{11}^{\lambda}(0) = \pi/4$.

Для эллипса функции $f_{mn}(q)$ имеют простой вид $f_{11}(q) = q$, $f_{22}(q) = 1/q$. Для цилиндра с поперечным сечением в виде ромба с вертикально ориентированной диагональю функции f_{mn} приведены в [18]. В частности, в случае горизонтальных колебаний такого цилиндра имеет место следующее соотношение:

$$f_{11}(q) = \frac{\Gamma[3/2 - \operatorname{arctg}(1/q)/\pi]\Gamma[\operatorname{arctg}(1/q)/\pi]}{\Gamma[1/2 - \operatorname{arctg}(1/q)/\pi]\Gamma[1 - \operatorname{arctg}(1/q)/\pi]} - 1, \tag{15}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. В случае горизонтальных колебаний прямоугольника функция f_{11} имеет вид [18]

$$f_{11}(q) = \pi q(1 - k^2)(E(æ) - k^2 G(æ))^{-2}/4 - 1, \tag{16}$$

где $æ = (1 - k^2)^{1/2}$; k — корень уравнения

$$E(æ) - k^2 G(æ) = q(E(k) - (1 - k^2)G(k)). \tag{17}$$

Здесь $G(k) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-1/2}\, d\varphi$, $E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2}\, d\varphi$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. В случае вертикальных колебаний ромба и квадрата функции f_{22} получаются заменой переменной q на $1/q$ в правых частях (15)–(17). Сопоставление теоретических зависимостей, полученных из (11), (12) с использованием (15), (16), проведено в экспериментальной части настоящей работы (п. **3**).

2. Методика эксперимента. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Опыты проводились в гидродинамическом лотке с размерами $2 \times 0{,}4 \times 0{,}15$ м, заполненном линейно стратифицированной жидкостью, толщина слоя которой $H = 0{,}36$ м. Жидкость (раствор сахара) заливалась послойно, с заданным перепадом плотности между слоями, имевшими толщину около 2 см. Линейное распределение плотности устанавливалось за счет молекулярной диффузии за время порядка 2 сут. Распределение плотности по толщине измерялось резистивным датчиком, прокалиброванным на образцах раствора известной плотности. Принцип действия датчика основан на том, что проводимость

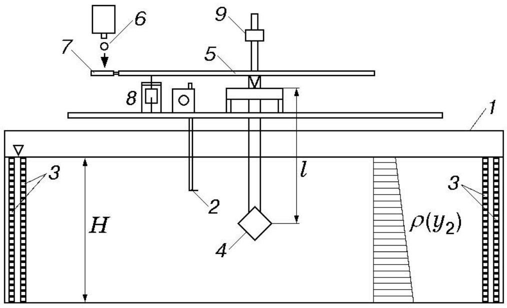

Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 — гидродинамический лоток; *2* — резистивный датчик; *3* — волногасители; *4* — цилиндр с квадратным поперечным сечением; *5* — маятник; *6* — стальной шарик; *7* — резиновая мембрана; *8* — электролитический датчик перемещений; *9* — противовес

раствора сахара в дистиллированной воде тем больше, чем выше концентрация сахара и, следовательно, плотность раствора.

Опыты проводились при значении частоты плавучести $N = 1$ с$^{-1}$, толщине слоя жидкости $H = 0{,}36$ м и температуре $T = 15$ °C, плотность раствора вблизи дна лотка $\rho_{\max} = 1{,}035$ г/см^3, вязкость $\nu_{\max} = 1{,}64 \cdot 10^{-3}$ г/(см · с). Влияние частоты плавучести N на коэффициенты гидростатической нагрузки изучено в [20]. Торцевые стенки лотка были оборудованы волногасителями. Цилиндр с квадратным поперечным сечением $3{,}7 \times 3{,}7$ см закреплялся на нижнем обтекаемом конце физического маятника в двух положениях так, что либо его сторона, либо диагональ была ориентирована вертикально. Движение маятника вызывалось падением стального шарика на резиновую мембрану. Отклик маятника регистрировался электролитическим датчиком перемещений и обрабатывался на ПЭВМ. Коэффициент восстанавливающего момента маятника варьировался путем изменения вертикальной координаты противовеса массой $m = 188$ г. Методика обработки сигнала и оценки зависимостей динамических характеристик колеблющихся тел от частоты приведены в [9].

Известно, что отклик любой линейной системы на воздействие произвольной возмущающей силы $h(t)$ может быть представлен в виде

$$\zeta(t) = \int\limits_0^\infty r(\tau)h(t-\tau)\,d\tau,$$

где $r(t)$ — отклик системы на единичный импульс. В частном случае гармонической возмущающей силы $h(t) = h_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ имеем

$$\zeta(t) = f_0 R(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{18}$$

Здесь $R(\omega) = R_c(\omega) - iR_s(\omega) = \int\limits_0^\infty r(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau$ — отклик системы на единичное возмущающее воздействие в частотной области; $R_c(\omega)$, $R_s(\omega)$ — косинус- и синус-преобразование Фурье соответственно.

Уравнение горизонтальных колебаний цилиндра под воздействием гармонической возмущающей силы можно записать в виде

$$[M + \mu_{11}(\omega)]\,\frac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda_{11}(\omega)\,\frac{dx_1}{dt} + c_{11}x_1 = h_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{19}$$

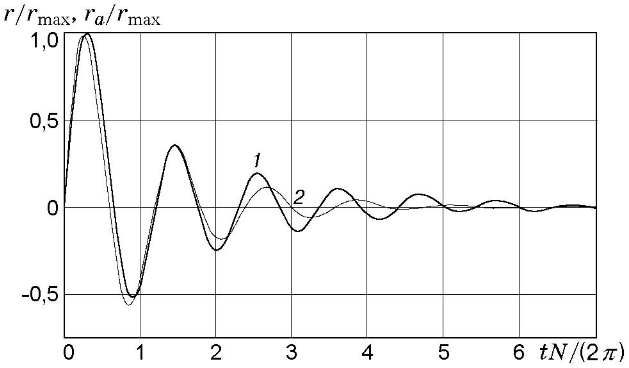

Рис. 2. Типичная запись затухающих горизонтальных колебаний центра ромба $r(t)/r_{\max}$ (кривая *1*) и ее аппроксимация по методу наименьших квадратов $r_a(t)/r_{\max}$ (кривая *2*) при $z = 115$ мм, $\omega_* = 0{,}83$ с$^{-1}$

где $M = J/l^2$ — механическая инерция системы; J — момент инерции маятника относительно оси вращения; l — расстояние от оси вращения маятника до центра тела; c_{11} — коэффициент восстанавливающей силы, определяемый статической тарировкой. Заметим, что $J = J_0 + mz^2$ ($J_0 = 1{,}12 \cdot 10^6$ г $\cdot$ см^2 — собственный момент инерции маятника относительно оси вращения; z — возвышение центра тяжести противовеса над осью вращения маятника). Полагая $x_1 = \zeta$ и подставляя (18) в (19), получаем выражения для зависимостей присоединенной массы и коэффициента демпфирования от частоты

$$\mu_{11}(\omega) = \frac{c_{11}}{\omega^2}\Big(1 - \frac{|R(0)|}{|R(\omega)|}\cos\theta(\omega)\Big) - M, \qquad \lambda_{11}(\omega) = \frac{c_{11}}{\omega}\,\frac{|R(0)|}{|R(\omega)|}\sin\theta(\omega), \tag{20}$$

где $|R(\omega)| = (R_c^2(\omega) + R_s^2(\omega))^{1/2}$; $\theta(\omega) = \arcsin\left(R_s(\omega)/R_c(\omega)\right)$; $|R(0)|$ — значение $|R(\omega)|$ при $\omega \to 0$. Нормировка $|R(\omega)|/|R(0)|$ позволяет обрабатывать экспериментальные записи затухающих колебаний, полученные при произвольной величине начального импульса.

С использованием описанной методики отклики $r(t)$ регистрировались с помощью 12-разрядного аналого-цифрового преобразователя при частоте оцифровки 20 Гц. Затем вычислялась функция $R(\omega)$ с помощью стандартного алгоритма быстрого преобразования Фурье и оценивались значения $\mu_{11}(\omega)$ и $\lambda_{11}(\omega)$ по формулам (20). Для получения достоверной информации в частотной области проводилась обработка 6–10 записей $r(t)$ при различных положениях противовеса, соответствующих различным значениям c_{11}. Максимальное горизонтальное отклонение центра тела в экспериментах $r_{\max}/L < 0{,}05$ (L — длина стороны квадратного сечения цилиндра). Таким образом, можно полагать, что результаты опытов соответствуют диапазону амплитуд гармонических колебаний $a/L < 0{,}05$.

По очевидным техническим причинам информация при $\Omega \to 0$ и $\Omega \to \infty$ не могла быть получена. Фактически изучен диапазон $0{,}2 < \Omega < 2$. При этом значение параметра Стокса изменялось в диапазоне $230 < \beta < 2300$. Значение A не превышало 0,2. Таким образом, диапазон параметров, в котором проводились эксперименты, достаточно хорошо соответствует диапазону параметров, в котором применима используемая теоретическая модель (см. п. **1**).

3. Теоретические и экспериментальные результаты. На рис. 2 приведена типичная запись затухающих горизонтальных колебаний центра ромба $r(t)/r_{\max}$ в непрерывно стратифицированной жидкости, полученная при $z = 115$ мм (кривая *1*). Время отнесено к периоду плавучести $2\pi/N$. Основные качественные особенности процесса следуют из сравнения $r(t)/r_{\max}$ с аппроксимацией $r_a(t)/r_{\max} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\sin(\omega_* t)$, полученной методом наименьших квадратов. При реализации метода численно определялись значения B, k, ω_*, минимизирующие функционал

$$I(B,k,\omega_*)=\int\limits_0^\infty [r(t)/r_{\max}-B\,\mathrm{e}^{-kt}\sin{(\omega_* t)}]^2\,dt.$$

Для кривой $r_a(t)/r_{\max}$ (кривая *2* на рис. 2) $B=0{,}96$, $k=0{,}06$ с$^{-1}$, $\omega_*=0{,}83$ с$^{-1}$.

Кривая $r_a(t)/r_{\max}$ представляет собой отклик линейного осциллятора, инерционные и демпфирующие свойства которого не зависят от частоты колебаний. Колебания такого осциллятора описываются уравнением вида (19), все коэффициенты которого постоянны. Период колебаний кривой $r_a(t)/r_{\max}$, задаваемый величиной $2\pi/\omega_*$, является постоянным. Из рис. 2 следует, что период колебаний кривой $r(t)/r_{\max}$ уменьшается с течением времени. Теоретические исследования систем с "памятью", колебания которых сопровождаются излучением волн [21], показывают, что при $t\to 0$ и $t\to\infty$ инерционные свойства таких систем определяются значениями $\mu(\infty)$ и $\mu(0)$ соответственно. Уменьшение периода колебаний с течением времени свидетельствует о том, что в частотной области имеет место неравенство $\mu(\infty)>\mu(0)$.

Коэффициент затухания k кривой $r_a(t)/r_{\max}$ не зависит от времени, напротив, локальное значение коэффициента затухания колебаний кривой $r(t)/r_{\max}$ с течением времени уменьшается. Таким образом, колебаниям с большим периодом (начальный этап колебаний) соответствует большее значение локального коэффициента затухания, поэтому при переходе в частотную область можно ожидать, что демпфирование $\lambda(\omega)$ при малых частотах будет больше демпфирования при больших частотах. Действительно, при $\Omega<1$ имеет место излучение внутренних волн, сопровождаемое большими потерями энергии. При $\Omega>1$ диссипация энергии определяется вязкими эффектами (работой касательных напряжений в пограничном слое вблизи тела), вследствие чего потери энергии резко уменьшаются по сравнению со случаем $\Omega<1$.

Следует отметить, что предлагаемая интерпретация поведения кривой $r(t)/r_{\max}$ основана на представлениях, следующих из линейной теории (в опытах $r_{\max}/L<0{,}05$). При больших начальных отклонениях тела от положения равновесия картина сильно усложняется из-за нелинейных эффектов [15].

На рис. 3, 4 приведены экспериментально полученные зависимости $C_{11}^\mu(\Omega)$ и $C_{11}^\lambda(\Omega)$ для ромба и квадрата, а также кривые, полученные с использованием соотношений (11), (12), (15), (16).

Нормировка значений $\lambda(\omega)$ и аргумента ω в опытах с однородной жидкостью величинами $\rho_0 NW$ и N для стратифицированной жидкости в данном случае имеет формальный характер, что позволяет сравнить результаты экспериментов в однородной и стратифицированной жидкостях. Экспериментальные данные для коэффициентов демпфирования ромба и квадрата в однородной жидкости совпадают, что с учетом различия геометрических размеров, использованных для нормировки, согласуется с результатами работы [12].

Из рис. 3, 4 следует, что при частоте колебаний $\Omega^*\approx 0{,}7$, для которой угол между направлением вектора групповой скорости внутренних волн и горизонталью $\psi=\arcsin\Omega$ [1] совпадает с углом наклона сторон ромба, имеет место особый критический режим, а именно резкое уменьшение коэффициента присоединенной массы (см. рис. 3) и локальный минимум коэффициента демпфирования (см. рис. 4). Следует отметить, что поведение кривых $C_{11}^\mu(\Omega)$ и $C_{11}^\lambda(\Omega)$ для ромба при $\Omega\to 0{,}7$ (предел справа) и квадрата при $\Omega\to 0$ аналогично. При $\Omega=0$ $\psi=0$, т. е. вектор групповой скорости внутренних волн параллелен верхней и нижней сторонам квадратного контура.

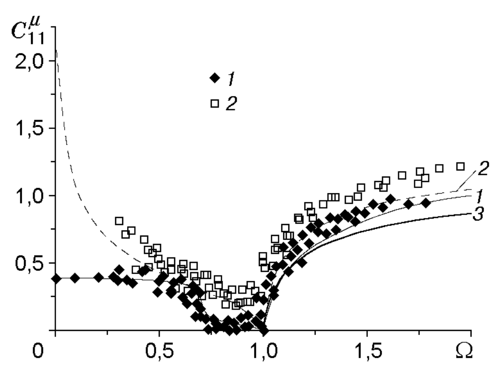

Рис. 3

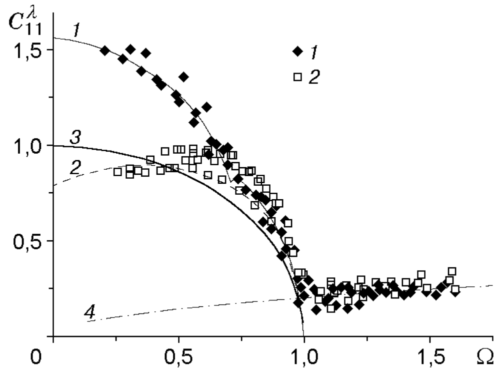

Рис. 4

Рис. 3. Коэффициенты присоединенной массы при горизонтальных колебаниях ромба и квадрата:

линии — расчет, точки — эксперимент; *1* — данные для ромба, *2* — данные для квадрата, *3* — теоретические данные [7] для кругового цилиндра

Рис. 4. Коэффициенты демпфирования при горизонтальных колебаниях ромба и квадрата:

4 — аппроксимация экспериментальных данных для ромба и квадрата в случае однородной жидкости; остальные обозначения те же, что на рис. 3

Результаты опытов показывают, что вязкостные эффекты слабо влияют на коэффициент присоединенной массы (см. рис. 3). Форма экспериментальных кривых $C_{11}^{\mu}(\Omega)$ близка к форме теоретических. Незначительное систематическое превышение экспериментальных значений по сравнению с теоретическими (порядка 5 % значения $C_{11}^{\mu}(\infty)$) может быть объяснено влиянием ограниченной толщины слоя жидкости в установке.

При $\Omega > 1$ значения коэффициента демпфирования $C_{11}^{\lambda}(\Omega)$ в однородной и стратифицированной жидкостях для ромба и квадрата практически совпадают в пределах погрешности экспериментальных данных (см. рис. 4). Суммарный коэффициент демпфирования $C_{11}^{\lambda}(\Omega)$ можно представить в виде суммы коэффициентов волнового $C_{11}^{\lambda w}(\Omega)$ и вязкостного $C_{11}^{\lambda v}(\Omega)$ демпфирования. При $\Omega < 1$ за счет затрат энергии на излучение внутренних волн коэффициент демпфирования в стратифицированной жидкости существенно больше коэффициента демпфирования в однородной жидкости. В первом грубом приближении можно считать $C_{11}^{\lambda} \approx C_{11}^{\lambda w}$ при $\Omega < 1$ и $C_{11}^{\lambda} \approx C_{11}^{\lambda v}$ при $\Omega > 1$. Одно из возможных более детальных представлений волновой и вязкостной компонент демпфирования описано в [20].

В данной работе экспериментальное исследование динамических характеристик вертикально колеблющихся тел не проводилось. Теоретические данные $C_{22}^{\mu}(\Omega)$ и $C_{22}^{\lambda}(\Omega)$ для квадрата и ромбов с различными углами наклона боковых сторон к горизонтали χ, полученные из соотношений (11), (12), приведены на рис. 5, 6 соответственно. Как и в случае горизонтальных колебаний, для ромба с соотношением длин диагоналей 1 : 1 при частоте $\Omega^* = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}7$ наблюдается критический режим поведения динамических характеристик ромба: кривая $C_{22}^{\mu}(\Omega)$ имеет локальный максимум, а $C_{22}^{\lambda}(\Omega)$ — четко выраженный локальный минимум. При иных соотношениях длин диагоналей зависимости $C_{mn}^{\mu}(\Omega)$, $C_{mn}^{\lambda}(\Omega)$ и величина Ω^* меняются в соответствии с соотношениями аффинного подобия (14). При этом общий характер зависимостей остается неизменным (кривые *3*–*5* на рис. 5, 6). Как следует из элементарных геометрических соображений, для ромбов с $\chi = 30, 60^\circ$ критические явления имеют место при $\Omega^* = 0{,}5$; $\sqrt{3}/2$.

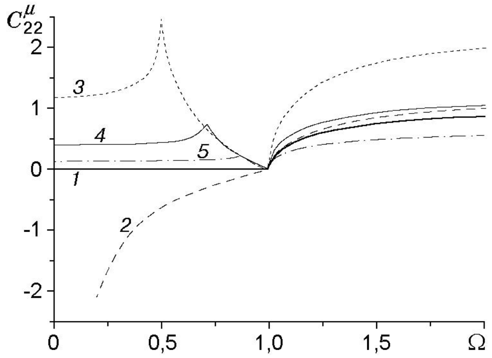

Рис. 5

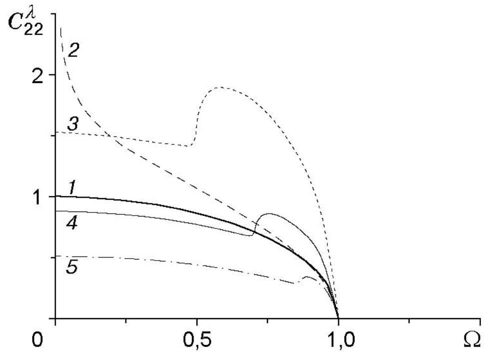

Рис. 6

Рис. 5. Коэффициенты присоединенной массы при вертикальных колебаниях ромба и квадрата:

1 — теоретические данные [7] для кругового цилиндра; *2* — решение для квадратного контура; *3–5* — теоретические данные для ромбов с различным отношением длин вертикальной и горизонтальной диагоналей (*3* — $1 : \sqrt{3}$ ($\chi = 30°$); *4* — $1 : 1$ ($\chi = 45°$); *5* — $\sqrt{3} : 1$ ($\chi = 60°$))

Рис. 6. Коэффициенты демпфирования при вертикальных колебаниях ромба и квадрата (обозначения те же, что на рис. 5)

Для квадратного контура особым режимом, при котором направление вектора групповой скорости внутренних волн становится близким к направлению вдоль горизонтальных сторон контура, является режим, соответствующий $\Omega \to 0$. Расчеты показывают, что при $\Omega \to 0$ коэффициент присоединенной массы квадрата $C_{22}^{\mu}(\Omega)$ принимает большие отрицательные значения (см. рис. 5), а коэффициент демпфирования $C_{22}^{\lambda}(\Omega)$ резко увеличивается (см. рис. 6). Для квадратного контура можно предположить также существование особого критического режима при $\Omega \to 1$, когда направление вектора групповой скорости совпадает с направлением вертикальных сторон квадратного контура. Однако в силу того, что модуль вектора групповой скорости при этом стремится к нулю, каких-либо особенностей, связанных с геометрией контура, при $\Omega \to 1$ не возникает. При $\Omega = 1$ для любых контуров $C_{mn}^{\lambda w} = 0$, $C_{mn}^{\mu} = 0$. Следует отметить, что в отличие от кругового цилиндра, для которого в соответствии с решением [7] $C_{11}^{\mu} = C_{22}^{\mu}$, $C_{11}^{\lambda} = C_{22}^{\lambda}$, для цилиндров с поперечным сечением в виде ромба и квадрата величины $C_{mn}^{\mu}(\omega)$ и $C_{mn}^{\lambda w}(\omega)$ при вертикальных и горизонтальных колебаниях различны. При $\Omega \to \infty$ в безграничной жидкости с $N = \mathrm{const}$ коэффициенты присоединенной массы для ромба и квадрата совпадают: $C_{11}^{\mu}(\infty) = C_{22}^{\mu}(\infty) \approx 1{,}19$.

Заключение. Полученные в данной работе результаты показывают, что в стратифицированной жидкости для горизонтальных цилиндров с поперечным сечением в виде многоугольников имеет место резкое изменение значений коэффициентов гидродинамических нагрузок в окрестности частоты колебаний Ω^*, при которой угол наклона вектора групповой скорости внутренних волн совпадает с углом наклона стороны цилиндра. В пространственном случае проявления подобных эффектов можно ожидать, например, для тела, образованного вращением ромба относительно вертикальной диагонали. Угол наклона вектора групповой скорости внутренних волн совпадает с углом наклона характеристических линий уравнения (1) при $\alpha^2 < 0$. Структура уравнения (1) совпадает со структурой основного уравнения теории тонкого профиля в потоке сжимаемого газа (при этом параметр $1/\Omega$ выполняет роль числа Маха). В теории тонкого крыла рассматривается особый случай больших чисел Маха, когда характеристические линии "ложатся" на поверхность тела. В настоящей работе рассмотрен своеобразный аналог этой задачи, возникающий в теории внутренних волн при $\Omega \to \Omega^*$.

Авторы выражают благодарность Ю. Д. Чашечкину за ряд полезных замечаний, позволивших существенно улучшить содержание статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mowbray D. E., Rarity B. S. H.** A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid // J. Fluid Mech. 1967. V. 28, pt 1. P. 1–16.
2. **Hurley D. G.** The emission of internal waves by vibrating cylinders // J. Fluid Mech. 1969. V. 36, pt 4. P. 657–672.
3. **Макаров С. А., Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д.** Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 744–754.
4. **Sutherland B. R., Dalziel S. B., Hughes G. O., Linden P. F.** Visualization and measurement of internal waves by "syntetic schlieren". Pt 1. Vertically oscillating cylinder // J. Fluid Mech. 1999. V. 390. P. 93–126.
5. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Энергетика генераторов гармонических внутренних волн // ПМТФ. 1986. № 4. С. 53–59.
6. **Lay R. Y. S., Lee C.-M.** Added mass of a spheroid oscillating in a linearly stratified fluid // Intern. J. Engng Sci. 1981. V. 19, N 11. P. 1411–1420.
7. **Hurley D. G.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 1. Inviscid solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 105–118.
8. **Hurley D. G., Keady G.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 2. Approximate viscous solution // Ibid. P. 119–139.
9. **Ermanyuk E. V.** The use of impulse response functions for evaluation of added mass and damping coefficient of a circular cylinder oscillating in linearly stratified fluid // Exp. Fluids. 2000. V. 28. P. 152–159.
10. **Ermanyuk E. V.** The rule of affine similitude for the force coefficients of a body oscillating in uniformly stratified fluid // Exp. Fluids. 2002. V. 32. P. 242–251.
11. **Dalziel S. B.** Syntetic schlieren measurements of internal waves generated by oscillating a square cylinder // Proc. of the 5th Intern. symp. on stratified flows, Vancouver, Canada, 10–13 July 2000. Vancouver: Univ. of British Columbia, 2000. V. 2. P. 743–748.
12. **Bearman P. W., Downie V. G., Graham J. M. R., Obasaju E. D.** Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan — Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 1985. V. 154. P. 337–356.
13. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 31–40.
14. **Ильиных Ю. С., Смирнов С. А., Чашечкин Ю. Д.** Генерация гармонических внутренних волн в вязкой стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 141–148.
15. **Левицкий В. В., Чашечкин Ю. Д.** Колебания тела нейтральной плавучести в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 5. С. 39–52.
16. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16, № 9. С. 954–961.

17. **Ньюман Дж.** Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985.
18. **Короткин А. И.** Присоединенные массы судна: Справ. Л.: Судостроение, 1986.
19. **Владимиров В. А., Ильин К. И.** О медленных движениях твердого тела в непрерывно стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1991. № 2. С. 55–61.
20. **Ermanyuk E. V., Gavrilov N. V.** Force on a body in a continuously stratified fluid. Pt 1. Circular cilinder // J. Fluid Mech. 2002. V. 451. P. 421–443.
21. **Хаскинд М. Д.** Методы гидродинамики в проблемах мореходности корабля на волнении // Тр. ЦАГИ. 1947. № 603. С. 1–74.

Поступила в редакцию 17/VIII 2001 г.,
в окончательном варианте — 11/III 2002 г.