

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

А. Т. Листров (Воронеж)

Исследуется устойчивость ламинарного течения слоя вязко-упругой жидкости, стекающего под действием силы тяжести по неограниченной наклонной плоскости. Предполагается, что механическое поведение жидкости следует обобщенной модели Максвелла, у которой определяющее уравнение содержит производную по времени дивергента тензора напряжений в смысле Яумана [1,2].

Уравнения движения рассматриваемой вязко-упругой среды при наличии силы тяжести имеют точное решение, которое описывает ламинарное прямолинейное течение слоя с плоской свободной поверхностью.

Устойчивость этого течения по отношению к поверхностным волнам исследуется методом последовательных приближений, предложенным в работах [3,4].

1. Для приближенного описания вязко-упругого течения ряда реальных сред используется обобщенная модель Максвелла, уравнения которой имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} = 0, \quad s_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} - \lambda \left(\frac{\partial s_{ik}}{\partial t^*} + v_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_j} + \omega_{ij}s_{jk} + \omega_{kj}s_{ij} \right) \\ \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь s_{ik} — компоненты дивергента тензора напряжений, v_j — компоненты вектора скорости, μ — коэффициент вязкости, λ — время релаксации, x_j — координаты ортогональной декартовой системы координат.

Вязко-упругое течение релаксирующей среды при конечных скоростях деформации описывается уравнениями (1.1) совместно с уравнениями движения

$$\rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial t^*} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_j \right) = - \frac{\partial F_k^*}{\partial x_k} + \frac{\partial s_{kj}}{\partial x_j} + F_k \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Здесь F_k^* — проекции массовой силы, ρ — плотность, p^* — гидростатическое давление. Для исследования устойчивости течения слоя толщины d , стекающего под действием силы тяжести по плоскости, наклоненной к горизонту под углом β , перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} t = \frac{t^*k}{d}, \quad p = \frac{p^*}{\rho k^2}, \quad x = \frac{x_1}{d}, \quad u = \frac{v_1}{k}, \quad v = \frac{v_2}{k} \\ y = \frac{x_2}{d}, \quad s_{xx} = \frac{s_{11}}{\rho k^2}, \quad s_{yy} = \frac{s_{22}}{\rho k^2}, \quad s_{xy} = \frac{s_{12}}{\rho k^2}, \quad k = \frac{\rho g d^2 \sin \beta}{3\mu} \end{aligned}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Уравнения (1.1), (1.2) в случае плоского нестационарного движения при $F_1 = \rho g \sin \beta$, $F_2 = \rho g \cos \beta$, $F_3 = 0$ в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{3}{R} + \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{3 \operatorname{ctg} \beta}{R} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xx}}{\partial y} \\ s_{xx} = -s_{yy} = \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \tau \left[\frac{\partial s_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} u + \frac{\partial s_{xx}}{\partial y} v + s_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ s_{xy} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \tau \left[\frac{\partial s_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} u + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} v + s_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \left(R = \frac{k d \rho}{\mu}, \quad \tau = \frac{\lambda k}{d} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнениям (1.3) удовлетворяют соотношения

$$\begin{aligned} s_{xy}^\circ = - \frac{3}{R} y, \quad s_{xx}^\circ = - \frac{3\tau}{R} \frac{du^\circ}{dy}, \quad p^\circ = -s_{xx}^\circ + \frac{3 \operatorname{ctg} \beta}{R} y \\ u^\circ = \frac{1}{6\tau^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 36\tau^2}}{1 + \sqrt{1 - 36\tau^2 y^2}} + \frac{1}{6\tau^2} \left(\sqrt{1 - 36\tau^2 y^2} - \sqrt{1 - 36\tau^2} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь производная

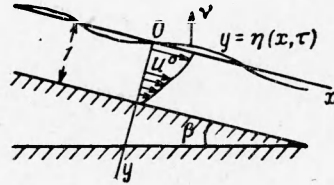
$$\frac{du^\circ}{dy} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 36\tau^2 y^2}}{6\tau^2 y}$$

которые описывают установившееся течение слоя с плоской, свободной от напряжений поверхностью, стекающего по наклонной плоскости под действием силы тяжести при условии, что на плоскости $y = 1$ осуществляется условие прилипания (Фиг. 1).

Из (1.4) видно, что прямолинейное течение слоя возможно, когда $\tau < 1/6$. При $\tau = 0$ выражения (1.4) описывают течение слоя ньютоновской жидкости [4].

Разложим в ряд по степеням малого параметра τ скорость $u^\circ(y, \tau)$ и ограничимся в разложениях каждого из выражений (1.4) слагаемыми порядка τ^2 . В результате получим

$$\begin{aligned} s_{xy}^\circ &= -\frac{3}{R} y, & s_{xx}^\circ &= -s_{yy}^\circ = \frac{9\tau}{R} y^2 \\ u^\circ &= \frac{3}{2} (1 - y^2) + \frac{27}{4} \tau^2 (1 - y^4) \\ \frac{du^\circ}{dy} &= -3y - 27\tau^2 y^3 \\ p^\circ &= -\frac{9\tau}{R} y^2 + \frac{3 \operatorname{ctg} \beta}{R} y \end{aligned} \quad (1.5)$$



Фиг. 1

2. Исследуем устойчивость решения (1.5) по отношению к двумерным возмущениям. Рассмотрим плоское нестационарное течение вида

$$\begin{aligned} u &= u^\circ + u'(t, x, y), & v &= v'(t, x, y), & p &= p^\circ + p'(t, x, y) \\ s_{xx} &= s_{xx}^\circ + s_{xx}'(t, x, y), & s_{xy} &= s_{xy}^\circ + s_{xy}'(t, x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $u^\circ, p^\circ, s_{xx}^\circ, s_{xy}^\circ$ — параметры основного течения (1.5), величины $u', s_{xx}', s_{xy}', v', p'$ — двумерные возмущения.

На свободной возмущенной поверхности $y = \eta(t, x)$ имеем кинематическое и динамические условия [4]

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$s_{xx} [\cos^2(v, x) - \cos^2(v, y)] + 2s_{xy} \cos(v, x) \cos(v, y) - p = -S \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$2s_{xx} \cos(v, x) \cos(v, y) + s_{xy} [\cos^2(v, y) - \cos^2(v, x)] = 0 \quad (S = T/\rho dk^2) \quad (2.2)$$

Здесь v — внешняя нормаль к свободной поверхности, T — коэффициент поверхностного натяжения.

На плоскости $y = 1$ имеем условия $u'(t, x, 1) = 0, v'(t, x, 1) = 0$. Линеаризуем (1.1), (2.2), используя (1.5) и (2.1). Полагая затем $u' = \partial \psi / \partial y, v' = -\partial \psi / \partial x$, представим возмущения в форме

$$p' = f(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad s_{xx}' = s_{xx}^*(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad s_{xy}' = s_{xy}^*(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \psi = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$$

Для величин $f(y), \varphi(y), s_{xx}^*(y), s_{xy}^*(y)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} i\alpha(u^\circ - c) \frac{d\varphi}{dy} - i\alpha \frac{du^\circ}{dy} \varphi &= -i\alpha f + i\alpha s_{xx}^* + \frac{ds_{xy}^*}{dy} \\ \alpha^2 \varphi (u^\circ - c) &= -\frac{df}{dy} + i\alpha s_{xy}^* - \frac{ds_{xx}^*}{dy} \\ R s_{xy}^* &= \theta_1 \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \alpha^2 \varphi \right) + 18\tau^2 y^2 \left(\alpha^2 \varphi - \frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right) + \theta_2 \left(6i\alpha y \frac{d\varphi}{dy} - 3i\alpha \varphi \right) + 6\tau^2 \alpha^2 y (u^\circ - c) \\ R s_{xx}^* &= 2\theta_1 i\alpha \frac{d\varphi}{dy} - 6\tau y \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + 9y\tau^2 i\alpha (u^\circ - c) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{27}{2} i\alpha \tau^2 y + 3y i\alpha^3 \tau^2 (u^\circ - c) \\ \theta_1 &= 1 - \tau i\alpha \left[\frac{3}{2} (1 - y^2) - c \right] - \tau^2 \left[9y^2 + \frac{9}{4} \alpha^2 (1 - y^2)^2 - 3c\alpha^2 (1 - y^2) + \alpha^2 c^2 \right] \\ \theta_2 &= \tau - \tau^2 i\alpha \left[\frac{3}{2} (1 - y^2) - c \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

В выражениях (2.3) учтены слагаемые порядка τ^2 . Граничные условия (2.2) приводят к соотношениям

$$\eta = \frac{\varphi(0)}{c - 3/2} e^{i\alpha(x-ct)}, \quad 2i\alpha \left[\frac{d\varphi}{dy} \right]_0 + 3 \operatorname{ctg} \beta \frac{\varphi(0)}{c - 3/2} + f(0)R + \alpha^2 RS \frac{\varphi(0)}{c - 3/2} = 0$$

$$\frac{3\varphi(0)}{R(c - 3/2)} = \varepsilon_{xy}^*(0) \quad (2.4)$$

Исключая $f(y)$ из уравнений (2.3), находим уравнение для $\varphi(y)$

$$i\alpha \left[(u^\circ - c) \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2\varphi \right) - \frac{d^2u^\circ}{dy^2} \varphi \right] = 2i\alpha \frac{ds_{xx}^*}{dy} + \frac{d^2s_{xy}^*}{dy^2} + \alpha^2 s_{xy}^* \quad (2.5)$$

Здесь s_{xx}^* и s_{xy}^* определены согласно (2.3).

При помощи первого из уравнений (2.3) исключим $f(0)$ из граничного условия (2.4). В результате граничные условия при $y = 0$ для уравнения (2.5) примут вид

$$\frac{\alpha}{c - 3/2} (3 \operatorname{ctg} \beta + \alpha^2 RS) \varphi(0) + \alpha \left\{ 2i\alpha \left[\frac{d\varphi}{dy} \right]_0 + R \left(c - \frac{3}{2} \right) \left[\frac{d\varphi}{dy} \right]_0 + R s_{xy}^*(0) \right\} -$$

$$- iR \left[\frac{ds_{xy}^*}{dy} \right]_0 = 0, \quad \frac{3\varphi(0)}{R(c - 3/2)} = \varepsilon_{xy}^*(0) \quad (2.6)$$

Из условий $u'(t, x, 1) = v'(t, x, 1) = 0$ следует, что

$$\varphi(1) = \left[\frac{d\varphi}{dy} \right]_1 = 0 \quad (2.7)$$

Определение $\varphi(y)$ из (2.5) при граничных условиях (2.6), (2.7) приводит, как известно [4], к задаче определения $c = c(R, \alpha, \beta, \tau)$.

3. Для определения $c = c(R, \alpha, \beta, \tau)$ для малых α разложим φ и c в ряды по параметру α

$$\varphi = \varphi^\circ + \alpha\varphi' + \alpha^2\varphi'' + \dots, \quad c = c^\circ + \alpha c' + \alpha^2 c'' + \dots \quad (3.1)$$

Подставим (3.1) в (2.5) — (2.7) и (2.3). При $\alpha = 0$ получим

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[(1 - 27\tau^2 y^2) \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} \right] = 0, \quad \left[\frac{d^3\varphi^\circ}{dy^3} \right]_0 = 0, \quad \frac{3\varphi^\circ(0)}{c^\circ - 3/2} = \left[\frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} \right]_0, \quad \varphi^\circ(1) = \left[\frac{d\varphi^\circ}{dy} \right]_1 = 0 \quad (3.2)$$

Из (3.2) находим [4] решение задачи нулевого приближения

$$c^\circ = 3 + 81/4\tau^2, \quad \varphi^\circ = (1 - y)^2 + \tau^2(9y - 27/2y^2 + 9/2y^4) \quad (3.3)$$

Для $\varphi'(y)$ получим уравнение

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[(1 - 27\tau^2 y^2) \frac{d^2\varphi'}{dy^2} \right] = iR \left[(u^\circ - c^\circ) \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} - \frac{d^2u_0}{dy^2} \varphi^\circ \right] \quad (3.4)$$

с граничными условиями

$$\frac{1}{c^\circ - 3/2} [3 \operatorname{ctg} \beta + \alpha^2 RS] \varphi^\circ(0) + R \left(c^\circ - \frac{3}{2} \right) \left[\frac{d\varphi^\circ}{dy} \right]_0 - i \left[\frac{d^3\varphi'}{dy^3} \right]_0 + 3\tau \left[\frac{d\varphi^\circ}{dy} \right]_0 = 0 \quad (3.5)$$

$$- \frac{3\varphi'(0)}{c^\circ - 3/2} + \frac{3\varphi^\circ(0)c'}{(c^\circ - 3/2)^2} + \left[\frac{d^2\varphi'}{dy^2} \right]_0 = 0, \quad \varphi'(1) = \left[\frac{d\varphi'}{dy} \right]_1 = 0$$

Интегрируя (3.4) с учетом (3.3) при граничных условиях (3.5), находим

$$c' = i(1 + 27/4\tau^2) [9/5R(1 + 9.12\tau^2) - (1 - 3.30\tau^2) \operatorname{ctg} \beta + 3\tau - 1/3RS(1 - 3.30\tau^2)] \quad (3.6)$$

В (3.6), как и всюду, пренебрегаем слагаемыми порядка малости τ^3 и выше. Для малых α ограничимся в разложениях двумя первыми членами, получим $c = c^\circ + \alpha c'$, где c° и c' определяются формулами (3.3) и (3.6).

Приравнивая нулю мнимую часть c , находим

$$\alpha [9/5R(1 + 9.12\tau^2) - (1 - 3.30\tau^2) \operatorname{ctg} \beta + 3\tau - 1/3\alpha^2RS(1 - 3.30\tau^2)] = 0 \quad (3.7)$$

Соотношение (3.7) при $\beta = \text{const}$ определяет в координатном пространстве параметров R, α, M нейтральную поверхность, состоящую из плоскости $\alpha = 0$ и поверхности $ABCDE$, которые пересекаются по параболе (фиг. 2),

$$R = \frac{5}{6} \text{ctg } \beta (1 - 10.35\tau^2) - 2.50\tau \quad (3.8)$$

Участок EA параболы (3.8) будет линией ветвления нейтральной поверхности. При $\tau = \lambda = 0$ имеем в плоскости α, R нейтральную кривую, состоящую из оси $\alpha = 0$ и линии ED , при этом точка ветвления E определяет [4] минимальное критическое значение $R = \frac{5}{6} \text{ctg } \beta$ при $S \neq 0$.

Из (3.7) видно, что при $S \neq 0$ на поверхности $ABCDE$ должно выполняться неравенство

$$R \leq \frac{5}{6} (1 - 10.35\tau^2) \text{ctg } \beta - 2.50\tau$$

для того, чтобы α было действительным. Поэтому для малых α поверхность $ABCDE$ не может пересекаться с осью α .

Используя (3.6), нетрудно убедиться, что при $\tau < \frac{1}{6}, S \neq 0$ для $\alpha > \alpha_0$ (где α_0 — значения α на поверхности $ABCDE$) значения $c_i < 0$, а для $\alpha < \alpha_0$ значения $c_i > 0$.

Учитывая, что $\lambda = \mu / G$, где G — модуль упругого сдвига, согласно (1.3), находим, что τ не зависит от μ . Поэтому, если $\tau = 0$ за счет $G = \infty$, то для $R = 0$ при $\mu = \infty$ получаем [4], что поверхность $ABCDE$ нигде не пересекает ось α в случае $S \neq 0$. При значении $S = 0$ поверхность $ABCDE$ должна пересекать ось α при $\alpha = \infty$.

Отметим, что для ньютоновской жидкости ($G = \infty$) точка ветвления E нейтральной кривой совпадает с началом координат при $\beta = \frac{1}{2}\pi$. Для вязко-упругой жидкости при $G = \text{const} \neq \infty$ в точке ветвления нейтральной кривой число Рейнольдса равно нулю при

$$\tau = A = \frac{1}{17.25} [-2.50 + (6.25 + 2.88 \text{ctg}^2 \beta)^{1/2}] \text{tg } \beta$$

Следовательно, если для ньютоновской жидкости критическое число Рейнольдса равно нулю для течения по вертикальной плоскости ($\beta = \frac{1}{2}\pi$), то для вязко-упругой жидкости критическое число Рейнольдса равно нулю при $\beta = \text{arc ctg } (3\tau)$. Так, например, при $\tau = 0.1$ критическое число Рейнольдса равно нулю для течения слоя по плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\beta \approx 73^\circ$.

На фиг. 2 изображен вид нейтральной поверхности для случая $S \neq 0$. Уравнения движения (1.3) имеют точное решение, соответствующее ламинарному прямолинейному течению слоя для $\tau < \frac{1}{6}$, при этом течение устойчиво по отношению к двумерным возмущениям в области между плоскостями $\alpha = 0, \tau = 0, R = 0$ и поверхностью $ABCDE$. Плоскость $\alpha = 0$ и поверхность $ABCDE$ — нейтральная поверхность, линия ветвления EA которой — дуга параболы (3.8), расположенной на плоскости $\alpha = 0$. Парабола имеет ось, параллельную оси R , и вершину в точке F , координаты которой

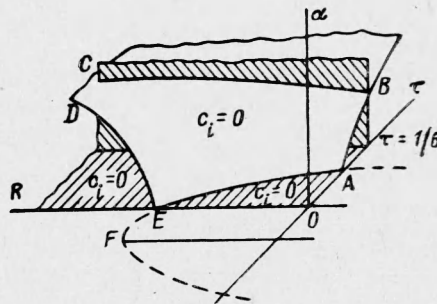
$$\alpha = 0, \quad R = 0.83 \text{ctg } \beta + 0.18 \text{tg } \beta, \quad \tau = -0.15 \text{tg } \beta.$$

Течение слоя вязко-упругой жидкости менее устойчиво, чем течение ньютоновской жидкости с такой же вязкостью.

Поступила 11 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Понятия разных скоростей изменения тензоров. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
2. O l d r o y d J. G. Non-Newtonian effects in steady motion of some idealized elasto-viscous liquids. Proc. Roy. Soc. A, 1958, vol. 245, No. 1241, p. 278—297.
3. И в а н и л о в Ю. П. Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
4. Y i h C h i a - s h u n. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No 3 (русск. перев.: И Цзя-шунь. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 5, стр. 81).



Фиг. 2