

УДК 536.24

МЕТОД ГОМОТОПИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ТЕРМОФОРЕТИЧЕСКОГО ОСАЖДЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПРИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ СМЕШАННОМ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСЕ НА ПОРИСТОМ КЛИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА

Р. Кэндээми, И. Мухэймин

Университет Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Джохор, Малайзия
E-mail: future990@gmail.com

С использованием метода гомотопического анализа исследовано термофоретическое осаждение частиц в смешанном конвективном магнитогиродинамическом потоке с тепло-массопереносом на пористом клине. Получено явное аналитическое, справедливое во всей области течения решение, которое хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

Ключевые слова: магнитогиродинамический поток, термофоретическое осаждение частиц, смешанное конвективное течение.

Введение. Термофорез — это процесс перемещения частиц аэрозоля от горячей поверхности к холодной при наличии градиента температуры. Этот процесс имеет широкое применение: удаление мелких частиц из газовых потоков, определение траекторий частиц выхлопного газа в устройствах сгорания, предотвращение осаждения вещества на лопатках турбин и радиоактивных частиц в ядерных реакторах.

В работе [1] изучена роль термофореза в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. С использованием классической задачи о течении на плоской пластине вычислены скорости осаждения и показано, что они существенно зависят от перепада между температурой поверхности и температурой свободного потока. В [2] исследовано воздействие лучистого тепла оптически тонкого серого газа вблизи вертикальной пластины. Влияние радиации на поток микрополярной жидкости на движущейся пластине изучалось в работе [3].

Однако магнитогиродинамические вязкие излучающие потоки также имеют важные технологические и геотермические приложения: получение высокотемпературной плазмы, охлаждение ядерных реакторов, металлических жидкостей, магнитогиродинамических ускорителей и систем генерации энергии. В работе [4] изучен тепло-массоперенос в неустойчивом магнитогиродинамическом естественно-конвективном течении вращающейся жидкости на вертикальной пористой плоской пластине при лучистой теплопередаче. Процессы переменного отсоса и термофореза при стационарном комбинированном свободном конвективном магнитогиродинамическом тепло-массопереносе в потоке на полубесконечной водонепроницаемой наклонной пластине при наличии теплового излучения исследованы в [5]. В работе [6] изучено радиоактивное излучение с использованием диффузионного приближения Росселэнда для описания смешанной конвекции вдоль вертикальной пластины с однородными скоростью потока и температурой поверхности. В [7–10] исследовались тепловое излучение и теплопередача при различных геометрии и условиях потока.

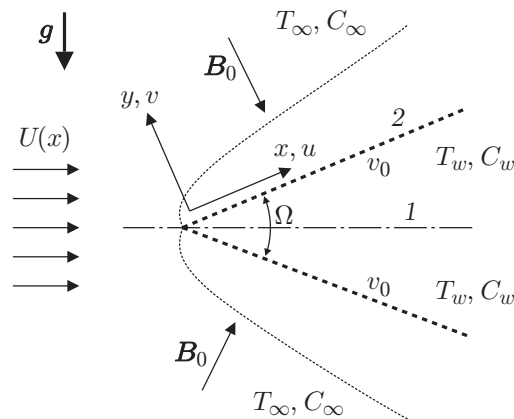


Рис. 1. Схема течения вдоль грани клина:
1 — клин, 2 — пористая стенка

Термофоретическое осаждение радиоактивных частиц является одним из факторов, вызывающих аварии в ядерных реакторах. В работе [11] впервые изучен термофорез в одномерном потоке с целью измерения термофоретической скорости. Термофорез при естественной конвекции в случае ламинарного течения (с переменными свойствами) на холодной вертикальной плоской пластине исследован в [12]. В работе [13] изучался поток массы на поверхность в смешанном конвективном потоке на горячей вертикальной плоской водопроницаемой пластине при наличии термофореза. Впервые анализ термофоретического осаждения в случае, представляющем практический интерес, проведен в работе [14], где решены уравнения ламинарного пограничного слоя при переносе аэрозоля и пара на изотермическую вертикальную поверхность, соприкасающуюся с неподвижной смесью воздуха, пара и аэрозоля. В [15] исследовано термофоретическое осаждение частиц в свободно-конвективном пограничном слое на вертикальной плоской пластине, находящейся в пористой среде.

Существует ряд областей, в которых важную роль играет тепломассоперенос с учетом термофореза: проектирование оборудования химической переработки, формирование и диспергирование тумана, регулирование температуры и влажности на сельскохозяйственных угодьях, защита зерновых культур от замораживания, обработка пищи, охлаждение больших количеств воды в градирнях. Кроме того, исследование тепломассопереноса с термофоретическим осаждением частиц имеет большое значение в химической и гидрометаллургической отраслях промышленности. В частности, важным является знание механизма комбинированного тепломассопереноса при смешанной конвекции на горячей плоской поверхности, находящейся в насыщенной жидкостью пористой среде [16]. Результаты численных исследований этой задачи представлены в [17]. Однако, насколько известно авторам данной работы, аналитическое решение этой задачи не было получено. В настоящей работе для его получения используется метод гомотопического анализа [18–23].

1. Математическая модель. Рассмотрим пластину в виде клина, находящуюся в пористой среде, насыщенной водой (рис. 1). На рис. 1 v_0 — скорость отсоса, если $v_0 < 0$, и скорость вдува, если $v_0 > 0$. Пластина может быть водопроницаемой ($v_w \neq 0$) или непроницаемой ($v_w = 0$). На поверхности пластины поддерживается постоянная температура T_w , превышающая температуру T_∞ окружающей среды. В то же время концентрация уменьшается от значения C_w на стенке до значения C_∞ на большом расстоянии от нее. Ось x направлена вдоль образующей клина, ось y — по нормали к ней. На поверхности клина задается отсос или вдув жидкости (см. рис. 1). В пограничном слое температурный

градиент в направлении оси y значительно больше, чем в направлении оси x , поэтому рассматривается только термофоретическая компонента скорости, направленная по нормали к поверхности. С использованием приближения Буссинеска для пограничного слоя уравнения движения в формулировке Форхгеймера записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U \frac{dU}{dx} - \left(\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + \frac{\nu}{K} \right) (u - U) - \frac{F}{\sqrt{K}} (u^2 - U^2) + [g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty)] \sin \frac{\Omega}{2}; \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial(V_T C)}{\partial y}.$$

Граничные условия:

$$u = 0, \quad v = v_w, \quad T = T_w, \quad C = C_w \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u = U(x), \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях осей x и y соответственно; ν — кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; β — коэффициент теплового расширения; β^* — коэффициент объемного расширения; T, T_w, T_∞ — температура в тепловом пограничном слое, температура пластины и температура в свободном потоке соответственно; C, C_w, C_∞ — соответствующие концентрации; α — теплопроводность жидкости; D — эффективный коэффициент диффузии; B_0 — напряженность постоянного магнитного поля; σ — электропроводность; K — проницаемость пористой среды; Ω — угол раствора клина; $V_T = -(k\nu/T) \partial T / \partial y$ — скорость термофореза; k — термофоретический коэффициент; F — эмпирическая константа (число Форхгеймера). Третий и четвертый члены в правой части уравнения (2) представляют собой сопротивление, пропорциональное первой степени скорости (закон Дарси), и сопротивление, пропорциональное второй степени скорости (пористая инерция) соответственно. При $F = 0$ выражение для силы сопротивления сводится к закону Дарси.

Следуя работе [24], выполним замену переменных

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{(1+m)U}{2\nu x}}, \quad \psi(x, y) = \sqrt{\frac{2U\nu x}{1+m}} f(x, \eta).$$

При этом выражение для скорости потенциального течения может быть записано в виде

$$U(x) = Ax^m, \quad \beta_1 = 2m/(1+m),$$

где A — константа; $\beta_1 = \Omega/\pi$ — параметр градиента давления Хартри.

Из уравнения непрерывности (1) следует существование функции тока $\psi(x, y)$:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Преобразуем уравнения (2), (3) в систему обычных дифференциальных уравнений. Для этого введем следующие безразмерные параметры и переменные: θ — температура,

φ — концентрация, Gr — число Грасгофа, Ec — число Эккерта, N — отношение плавучести, Re_x — число Рейнольдса, Re_k — местное число Рейнольдса, Pr — число Прандтля, M_* — магнитный параметр, Fn — число Форхгеймера, Sc — число Шмидта, S — параметр вдува или отсоса, λ — параметр пористости среды, τ — термофоретический параметр:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \quad Gr = \frac{\nu g \beta (T - T_\infty)}{U^3}, \quad Ec = \frac{c^2}{c_p (T_w - T_\infty)} (k^2)^{2m/(1-m)},$$

$$N = \frac{\beta^* (C_w - C_\infty)}{\beta (T_w - T_\infty)}, \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu}, \quad Re_k = \frac{U\sqrt{K}}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad M_* = \frac{\sigma B_0^2}{\rho a}, \quad (4)$$

$$Fn = \frac{F U \sqrt{K}}{\nu}, \quad Sc = \frac{\nu}{D}, \quad S = f_w = -v_w \sqrt{\frac{(1+m)x}{2\nu U}}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{KU}, \quad \tau = -\frac{k(T_w - T_\infty)}{T_r}$$

(c_p — теплоемкость при постоянном давлении). Уравнения (2), (3) принимают вид

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = -f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{2m}{1+m} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right) - \frac{2(N\varphi + \theta)}{1+m} Gr Re_x \sin \frac{\Omega}{2} +$$

$$+ \frac{2x}{1+m} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) + \frac{2}{m+1} (M_* + \lambda) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) + \frac{2}{m+1} \frac{F x}{\sqrt{K}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 - 1\right),$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = -Pr \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{2Pr}{1+m} \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} + Pr \frac{2x}{1+m} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -Sc \left(f - \tau \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{2Sc}{1+m} \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{2x Sc}{1+m} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) + Sc \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \varphi.$$

Граничные условия записываются в виде

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{f}{2} \left(1 + \frac{x}{U} \frac{dU}{dx}\right) + x \frac{\partial f}{\partial x} = -v_0 \sqrt{\frac{(1+m)x}{2\nu U}}, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1, \quad (6)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0.$$

Уравнения (5) с граничными условиями (6) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \left(f + \frac{1-m}{1+m} \xi \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1-m}{1+m} \xi \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{2(N\varphi + \theta)}{1+m} Gr Re_x \sin \frac{\Omega}{2} -$$

$$- \frac{2}{m+1} \xi^2 (M_* + \lambda) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1\right) - \frac{2}{m+1} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 - 1\right) \left(\frac{Re_x}{(Re_k)^2} Fn + m\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + Pr \left(f + \frac{1-m}{1+m} \xi \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{2Pr}{1+m} \theta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{1-m}{1+m} \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + Sc \left(f - \tau \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + Sc \frac{1+m}{1-m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) -$$

$$- \frac{2Sc}{1+m} \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} - Sc \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \varphi = 0;$$

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{(1+m)f}{2} + \frac{1-m}{2} \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = f_w, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1,$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0.$$

Здесь $f_w = S$ — параметр отсоса, если $f_w > 0$, и параметр вдува, если $f_w < 0$; Fn — безразмерный инерционный параметр (число Форхгеймера); $\xi = kx^{(1-m)/2} > 0$ — безразмерное расстояние вдоль клина [24]; $f(\xi, \eta)$ — безразмерная функция тока. Очевидно, что если сохранить все члены с производными по ξ , то для решения задачи необходимо использовать численную схему для решения уравнений в частных производных. Кроме того, поскольку решение вдоль потока зависит от производных по ξ , локально-автономное решение не может быть получено в любой заданной точке вдоль потока. В этом случае обычно применяется неявная маршевая численная схема решения, продолжающая решение в направлении координаты ξ , т. е. вычисляется решение в точке ξ_{i+1} , когда оно известно в точке ξ_i . Однако в случае, когда члены, содержащие производные $\partial f/\partial \xi$, $\partial \theta/\partial \xi$, $\partial \varphi/\partial \xi$ и их производные по η , отсутствуют, имеет место система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f , θ , φ с параметром ξ , и процедура ее решения упрощается. Кроме того, для любого значения ξ можно получить локально-автономное решение. В соответствии с [24, 25] в данной работе для численного решения задачи используется метод стрельбы. В силу сказанного выше при $\xi = 1$ уравнения (7) преобразуются в уравнения

$$f''' + ff'' + \frac{2}{1+m} (1 - f'^2) \left(\frac{\text{Re}_x}{(\text{Re}_k)^2} \text{Fn} + m \right) + \frac{2(N\varphi + \theta)}{1+m} \text{Gr Re}_x \sin \frac{\Omega}{2} - \frac{2}{1+m} (M_* + \lambda)(f' - 1) = 0,$$

$$\theta'' + \text{Pr} f\theta' - \frac{2\text{Pr}}{1+m} \theta f' = 0,$$

$$\varphi'' + \text{Sc}(f - \tau\theta')\varphi' - \frac{2\text{Sc}}{1+m} f'\varphi - \text{Sc}\tau\theta''\varphi = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad f = 2f_w/(1+m), \quad f' = 0, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1, \\ \eta \rightarrow \infty: & \quad f' = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Численное решение. Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с граничными условиями (9) решалась с использованием метода Жилия [25] и метода стрельбы при заданных параметрах α , Ω , λ , M_* , τ . Вычисления проведены с помощью пакета Matlab. В большинстве случаев был выбран шаг $\Delta\eta = 0,001$, чтобы удовлетворить критерию сходимости с точностью до 10^{-7} . Максимальное значение η_∞ для каждого набора параметров α , Ω , γ , τ определялось таким образом, чтобы при успешной итерации значения неизвестных на границе $\eta = 0$ изменялись с погрешностью менее 10^{-7} . Термофоретическое осаждение частиц при магнитогидродинамическом смешанном конвективном теплопереносе на пористом клине изучалось при различных значениях отсоса на стенке клина.

3. Аналитическое решение. Функции $f(\eta)$, $\theta(\eta)$, $\varphi(\eta)$ могут быть выражены из граничных условий (9) следующим образом:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \exp(-n\gamma\eta), \quad \theta(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \exp(-n\gamma\eta), \quad \varphi(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \exp(-n\gamma\eta).$$

Здесь A_n , B_n , C_n — коэффициенты, подлежащие определению; $\gamma > 0$ — константа. В качестве начального приближения из (9) можно выбрать функции

$$\begin{aligned} f_0(\eta) &= 1 + f_w - \exp(-\gamma\eta), \\ \theta_0(\eta) &= \frac{\exp(-\gamma\eta) + \exp(-2\gamma\eta)}{2}, \quad \varphi_0(\eta) = \frac{\exp(-\gamma\eta) + \exp(-2\gamma\eta)}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, определим вспомогательные линейные операторы

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right), \quad L_2 = \exp(\gamma \eta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right)$$

со следующими свойствами:

$$L_1(C_1 + C_2 \exp(\eta) + C_3 \exp(-\eta)) = 0, \quad L_2(C_4(\exp(-\eta) + C_5 \exp(\eta))) = 0$$

(C_1, C_2, \dots, C_5 — постоянные интегрирования).

Построим так называемые уравнения деформации нулевого порядка

$$(1-p)L_1[F(\eta; P) - f_0(\eta)] = ph_f N_f[F(\eta; p), \theta(\eta; p), \varphi(\eta; p)],$$

$$(1-p)L_2[\theta(\eta; P) - \theta_0(\eta)] = ph_\theta N_\theta[F(\eta; p), \theta(\eta; p)],$$

$$(1-p)L_3[\varphi(\eta; P) - \varphi_0(\eta)] = ph_\varphi N_\varphi[F(\eta; p), \varphi(\eta; p)]$$

с граничными условиями

$$F(0; p) = f_w, \quad \left. \frac{\partial F(\eta; p)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \theta(0; p) = \varphi(0; p) = 1,$$

$$\left. \frac{\partial F(\eta; p)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\infty} = 1, \quad \theta(0; p) = \varphi(0; p) = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_f[F, \theta, \varphi] = & \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{2}{1+m} \left(1 - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 \right) \left(\frac{\text{Re}_x}{(\text{Re}_k)^2} F_n + m \right) + \\ & + \frac{2(N\varphi + \theta)}{1+m} \text{Gr Re}_x \sin \frac{\Omega}{2} - \frac{2}{1+m} (M_* + \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 \right), \\ N_\theta[F; \theta] = & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \text{Pr} F \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{2 \text{Pr}}{1+m} \theta \frac{\partial F}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$N_\varphi[F; \varphi] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \text{Sc} \left(F - \tau \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{2 \text{Sc}}{1+m} \frac{\partial F}{\partial \eta} \varphi - \text{Sc} \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \varphi,$$

$p \in [0, 1]$ — параметр вложения; h_f, h_θ, h_φ — вспомогательные параметры, отличные от нуля. Очевидно,

$$\begin{aligned} F(\eta; 0) = f_0(\eta), \quad F'(\eta; 0) = f'_0(\eta), \quad \theta(\eta; 0) = \theta_0(\eta), \quad \varphi_0(\eta; 0) = \varphi_0(\eta) \quad \text{при } p = 0, \\ F'(\eta; 1) = f'(\eta), \quad \theta(\eta; 1) = \theta(\eta), \quad \varphi(\eta; 1) = \varphi(\eta) \quad \text{при } p = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Разложим функции $F(\eta; p), \theta(\eta; p), \varphi(\eta; p)$ в ряд Тейлора в точке $p = 0$:

$$\begin{aligned} F(\eta; p) = F(\eta; 0) + \sum_{l=1}^{+\infty} f_l(\eta) p^l, \quad \theta(\eta; p) = \theta(\eta; 0) + \sum_{l=1}^{+\infty} \theta_l(\eta) p^l, \\ \varphi(\eta; p) = \varphi(\eta; 0) + \sum_{l=1}^{+\infty} \varphi_l(\eta) p^l. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$f_l(\eta) = \frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l F(\eta; p)}{\partial p^l} \right|_{p=0}, \quad \theta_l(\eta) = \frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l \theta(\eta; p)}{\partial p^l} \right|_{p=0}, \quad \varphi_l(\eta) = \frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l \varphi(\eta; p)}{\partial p^l} \right|_{p=0}.$$

Отметим, что области сходимости ряда (13) зависят от вспомогательных параметров h_f , h_θ , h_φ . Если параметры h_f , h_θ , h_φ выбраны таким образом, чтобы ряды (13) сходились при $p = 1$, то с учетом (12) имеем

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{l=1}^{+\infty} f_l(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{l=1}^{+\infty} \theta_l(\eta), \quad \varphi(\eta) = \varphi_0(\eta) + \sum_{l=1}^{+\infty} \varphi_l(\eta). \quad (14)$$

Дифференцируя уравнения (11) m раз относительно p , затем полагая $p = 0$ и деля эти уравнения на $m!$, получаем так называемые уравнения деформации m -го порядка для f_l , θ_l , φ_l (подробнее об этом см. [22, 23])

$$\begin{aligned} L_f[f_l(\eta) - \chi_l f_{l-1}(\eta)] &= h_f R_l(\eta), & L_\theta[\theta_l(\eta) - \chi_l \theta_{l-1}(\eta)] &= h_\theta S_l(\eta), \\ L_\varphi[\varphi_l(\eta) - \chi_l \varphi_{l-1}(\eta)] &= h_\varphi W_l(\eta) \end{aligned} \quad (15)$$

с граничными условиями

$$f_l(0) = f_w, \quad f'_l(0) = 0, \quad \theta_l(0) = \varphi_l(0) = 0, \quad f'_l(\infty) = 1, \quad \theta_l(\infty) = \varphi_l(\infty) = 0. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_l(\eta) &= f_{l-1}'''(\eta) + \frac{2}{1+m} \left(\frac{\text{Re}_x}{(\text{Re}_k)^2} \text{Fn} + m \right) - \frac{2}{1+m} \left(\frac{\text{Re}_x}{(\text{Re}_k)^2} \text{Fn} + m \right) \sum_{n=0}^{l-1} f'_n(\eta) f'_{l-1-n}(\eta) + \\ &+ \frac{2}{1+m} (M_* + \lambda) + \frac{2(N\varphi_{l-1}(\eta) + \theta_{l-1}(\eta))}{1+m} \text{Gr Re}_x \sin \frac{\Omega}{2} - \\ &- \frac{2}{1+m} (M_* + \lambda) \sum_{n=0}^{l-1} f'_{l-1-n}(\eta) + \sum_{n=0}^{l-1} f_n(\eta) f''_{l-1-n}(\eta), \end{aligned}$$

$$S_l(\eta) = \theta_{l-1}''(\eta) + \text{Pr} \sum_{n=0}^{l-1} \left[f_n(\eta) \theta'_{l-1-n}(\eta) - \frac{2}{1+m} \theta_{l-1-n}(\eta) f'_n(\eta) \right],$$

$$\begin{aligned} W_l(\eta) &= \varphi_{l-1}''(\eta) - \text{Sc} \sum_{n=0}^{l-1} \left[\frac{2}{1+m} \varphi_{l-1-n}(\eta) f'_n(\eta) - \tau \varphi_{l-1-n}(\eta) \theta''_n(\eta) \right] + \\ &+ \text{Sc} \sum_{n=0}^{l-1} (f_n(\eta) - \tau \theta'_n(\eta)) \varphi'_{l-1-n}(\eta), \end{aligned}$$

$$\chi_l = \begin{cases} 0, & l \leq 1, \\ 1, & l > 1. \end{cases}$$

Функции f_l , θ_l , φ_l , удовлетворяющие (15), (16), имеют вид

$$\begin{aligned} f_l(\eta) &= \sum_{k=1}^{2l+1} a_{l,k} \exp(-k\gamma\eta), & \theta_l(\eta) &= \sum_{k=1}^{2l+2} b_{l,k} \exp(-k\gamma\eta), \\ \varphi_l(\eta) &= \sum_{k=1}^{2l+2} c_{l,k} \exp(-k\gamma\eta) \quad \text{при } m \geq 1, \end{aligned}$$

где $a_{l,k}$, $b_{l,k}$, $c_{l,k}$ — коэффициенты. Подставив эти выражения в (15), (16), получаем рекуррентные формулы

$$a_{l,k} = \frac{h_f}{k(k^2 - 1)\gamma^3} \Gamma_{l,k} + \chi_l \lambda_{l-1,k+2} a_{l-1,k}, \quad 1 \leq k \leq 2l+1, \quad a_{l,0} = - \sum_{k=1}^{2l+1} a_{l,k},$$

$$b_{l,k} = \frac{h_\theta}{(k^2 - 1)\gamma^2} \Lambda_{l,k-1} + \chi_l \lambda_{l-1,k} b_{l-1,k}, \quad 2 \leq k \leq 2l + 2, \quad b_{l,1} = - \sum_{k=2}^{2l+2} b_{l,k},$$

$$c_{l,k} = \frac{h_\varphi}{(k^2 - 1)\gamma^2} \Delta_{l,k-1} + \chi_l \lambda_{l-1,k} c_{l-1,k}, \quad 2 \leq k \leq 2l + 2, \quad c_{l,1} = - \sum_{k=2}^{2l+2} c_{l,k},$$

где

$$\Gamma_{l,k} = \lambda_{l-1,k+2} a_{l-1,k+2} (k\gamma)^3 + (N c_{l-1,k} + b_{l-1,k}) \operatorname{Gr} \operatorname{Re}_x \sin \frac{\Omega}{2} (k\gamma) +$$

$$+ \frac{2}{1+m} \left(\frac{\operatorname{Re}_x}{(\operatorname{Re}_k)^2} \operatorname{Fn} + m \right) + \frac{2}{1+m} (M_* + \lambda) + \beta_{l,k},$$

$$\Lambda_{l,k} = \lambda_{l-1,k+1} a_{l-1,k} (k\gamma)^2 + \theta_{l,k}, \quad 1 \leq k \leq 2l + 1,$$

$$\Delta_{l,k} = \lambda_{l-1,k+1} a_{l-1,k} (k\gamma)^2 + \varphi_{l,k}, \quad 1 \leq k \leq 2l + 1.$$

Согласно определениям

$$\beta_{l,k} = \sum_{n=0}^{l-1} \sum_{s=\max(1,k-2n-1)}^{\min(2l-2n,k)} \left[(s-k) s^2 \gamma^3 \frac{2}{1+m} b_{n,k-s} a_{l-1-n,s} - \right.$$

$$\left. - (s-k) s \gamma^2 \frac{2}{1+m} a_{n,k-s} a_{l-1-n,s} - \frac{2}{1+m} \left(\frac{\operatorname{Re}_x}{(\operatorname{Re}_k)^2} \operatorname{Fn} + m \right) s^2 \gamma^2 a_{n,k-s} a_{l-1-n,s} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{1+m} (M_* + \lambda) s \gamma a_{l-i-n,s} \right], \quad 2 \leq k \leq 2l + 2,$$

$$\beta_{l,1} = 0, \quad \beta_{l,2l+1} = 0,$$

$$\theta_{l,k} = \operatorname{Pr} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{s=\max(1,k-2n-1)}^{\min(2l-2n,k)} \left[\gamma s a_{n,k-s} b_{l-1-n,s} - \frac{2}{1+m} a_{n,k-s} b_{l-1-n,s} \right], \quad 1 \leq k \leq 2l + 1,$$

$$\varphi_{l,k} = \operatorname{Sc} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{s=\max(1,k-2n-1)}^{\min(2l-2n,k)} \left[- \frac{2}{1+m} a_{n,k-s} c_{l-1-n,s} - \frac{2}{1+m} \tau b_{n,k-s} c_{l-1-n,s} + \right.$$

$$\left. + \gamma s (a_{n,k-s} - \tau b_{n,k-s}) c_{l-1-n,s} \right], \quad 1 \leq k \leq 2l + 1,$$

$$\lambda_{l,k} = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq 2l + 2, \\ 0, & k < 1, \quad k > 2l + 2. \end{cases}$$

Используя приведенные выше рекуррентные формулы, можно вычислить все коэффициенты

$$a_{0,0} = 1 + f_w, \quad a_{0,1} = -1, \quad b_{0,1} = b_{0,2} = c_{0,1} = c_{0,2} = 1/2$$

приближения (10). Соответствующие приближения (14) M -го порядка имеют вид

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{l=1}^M f_l(\eta) = \sum_{l=0}^M \sum_{k=0}^{2l+1} a_{l,k} \exp(-k\gamma\eta),$$

$$\theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{l=1}^M \theta_l(\eta) = \sum_{l=0}^M \sum_{k=1}^{2l+2} b_{l,k} \exp(-k\gamma\eta),$$

$$\varphi(\eta) = \varphi_0(\eta) + \sum_{l=1}^M \varphi_l(\eta) = \sum_{l=0}^M \sum_{k=1}^{2l+2} c_{l,k} \exp(-k\gamma\eta)$$

и при $M \rightarrow +\infty$ представляют собой аналитическое решение (8).

4. Тестирование аналитического решения. Точность полученных аналитических решений проверим численным интегрированием с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка и схемы Ньютона — Рапсона. В качестве начального приближения численных решений выбираются значения функций f_0 , θ_0 , φ_0 , определяемые уравнениями (10). Для того чтобы граничные условия выполнялись на бесконечности, интервал интегрирования η_∞ , выбранный равным 40, разбивался на 10 000 отрезков. Итерационная процедура интегрирования повторялась до тех пор, пока для каждого дискретного уравнения (8) среднеквадратичная ошибка составляла не более $5 \cdot 10^{-6}$.

Отметим, что полученное в данной работе явное аналитическое решение содержит свободные параметры h_f , h_θ , h_φ , γ , что позволяет обеспечить сходимость ряда (14) (см. [18–23]). Параметры, используемые в аналитическом решении, приведены в табл. 1 ($Re_x = 3$, $\tau = 1$, $Pr = 0,71$, $Sc = 0,62$). В табл. 2–4 представлены аналитические решения различного порядка аппроксимации и результаты численных расчетов при $Re_x = 3$, $Re_k = 1$, $Gr = 1$, $Fn = 1$, $N = 1$, $Pr = 0,73$, $Sc = 0,62$, $f_w = 1$, $M_* = \tau = 1$. Из табл. 2–4 следует, что при достаточно высоком порядке аппроксимации полученные аналитические решения хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

На рис. 2–5 представлены зависимости скорости, температуры и концентрации от переменной η при $Pr = 0,73$, что соответствует воздуху при температуре 20 °С, и $Sc = 0,62$, что соответствует водяному пару. Эти значения Pr и Sc представляют наибольший интерес при исследовании диффузии химических примесей в воздухе. Выбирались следующие значения параметров модели: число Грасгофа $Gr = 1$ (при $Gr > 0$ имеет место охлаждение), число Эккерта $Ec = 0,001$, отношение плавучести $N = 1$, местное число Рейнольдса $Re_k = 1$, $m = 0,0909$ (для угла раствора клина $\Omega = 30^\circ$), параметр пористости среды $\lambda = 1$, число Рейнольдса $Re_x = 3$. Из рис. 2–5 следует, что аналитические решения хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

5. Обсуждение результатов. Аналитические решения, представленные на рис. 2, хорошо согласуются с результатами численных расчетов и данными [25]. Следует отметить, что в работе [25] представлены результаты численных расчетов для числа Прандтля Pr в диапазоне значений $0,3 \div 15,0$. Однако при $Pr > 7$ необходим более высокий порядок приближения. Вследствие ограниченной мощности используемого компьютера не были найдены достаточно точные аналитические решения при $Pr > 7$, несмотря на то что полученное в данной работе аналитическое решение справедливо для любой комбинации

Таблица 1

Значения свободных параметров аналитического решения

f_w	h_f	h_θ	h_φ	γ	M
1	–0,4	–1,5	–1,5	1,2	60
0	–0,4	–1,5	–1,0	1,1	60
–1	–0,5	–1,5	–0,6	0,7	80
1	–0,3	–1,5	–1,0	1,2	80
–1	–0,6	–0,8	–0,6	1,0	100

Таблица 2

Значения $f'(\eta)$, полученные при различных порядках аппроксимации аналитического решения и в результате численного расчета

η	Аналитическое решение							Результаты численных расчетов
	$M = 10$	$M = 20$	$M = 40$	$M = 50$	$M = 60$	$M = 80$	$M = 100$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,6487	0,6484	0,6481	0,6482	0,6479	0,6478	0,6479	0,6481
0,2	0,8828	0,8828	0,8829	0,8827	0,8825	0,8825	0,8826	0,8827
0,3	0,9646	0,9644	0,9644	0,9642	0,9641	0,9641	0,9641	0,9643
0,4	0,9911	0,9612	0,9611	0,9611	0,9609	0,9608	0,9608	0,9610
1,0	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
2,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Таблица 3

Значения $\theta(\eta)$, полученные при различных порядках аппроксимации аналитического решения и в результате численного расчета

η	Аналитическое решение							Результаты численных расчетов
	$M = 10$	$M = 20$	$M = 40$	$M = 50$	$M = 60$	$M = 80$	$M = 100$	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,5116	0,5116	0,5114	0,5108	0,5107	0,5107	0,5110	0,5110
0,2	0,2597	0,2596	0,2595	0,2594	0,2595	0,2595	0,2597	0,2597
0,3	0,1316	0,1315	0,1314	0,1309	0,1310	0,1310	0,1312	0,1312
0,5	0,0323	0,0324	0,0321	0,0321	0,0320	0,0321	0,0323	0,0323
1,0	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
2,0	0,0002	0	0	0	0	0	0	0
3,0	0,0001	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4

Значения $\varphi(\eta)$, полученные при различных порядках аппроксимации аналитического решения и в результате численного расчета

η	Аналитическое решение							Результаты численных расчетов
	$M = 10$	$M = 20$	$M = 40$	$M = 50$	$M = 60$	$M = 80$	$M = 100$	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,5272	0,5272	0,5271	0,5270	0,5267	0,5267	0,5267	0,5267
0,2	0,2753	0,2753	0,2752	0,2752	0,2750	0,2750	0,2750	0,2750
0,3	0,1450	0,1452	0,1451	0,1451	0,1451	0,1451	0,1451	0,1451
0,4	0,0743	0,0742	0,0741	0,0741	0,0741	0,0741	0,0741	0,0742
1,0	0,0010	0,0011	0,0010	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007
2,0	0,0002	0,0001	0	0	0	0	0	0
3,0	0,0001	0,0001	0	0	0	0	0	0

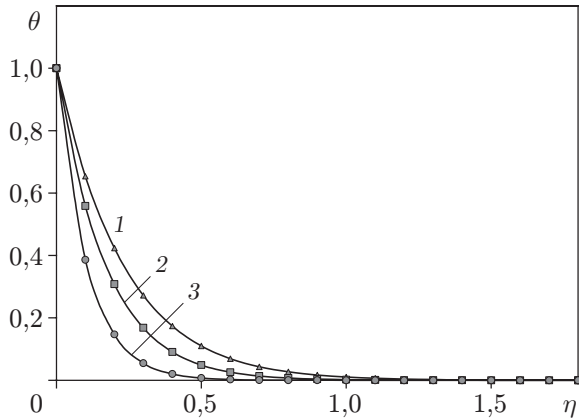


Рис. 2

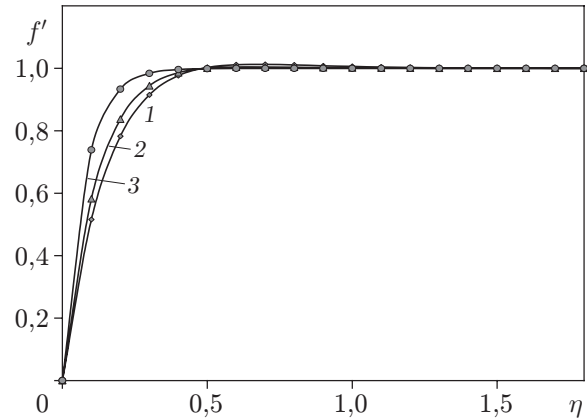


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость температуры от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = 1$, $Gr = Fn = M_* = N = 1$, $Sc = 0,62$, $S = 1$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $\tau = 1$ и различных значениях Pr : точки — результаты численных расчетов, линии — аналитическое решение; 1 — $Pr = 0,3$, 2 — $Pr = 0,73$, 3 — $Pr = 3$

Рис. 3. Зависимость скорости от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = Gr = Fn = M_* = N = 1$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $\tau = 1$ и различных значениях параметра S : точки — результаты численных расчетов, линии — аналитическое решение; 1 — $S = 3$, 2 — $S = 5$, 3 — $S = 8$

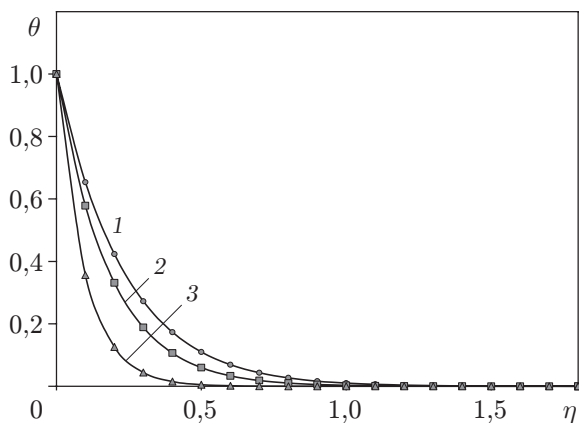


Рис. 4

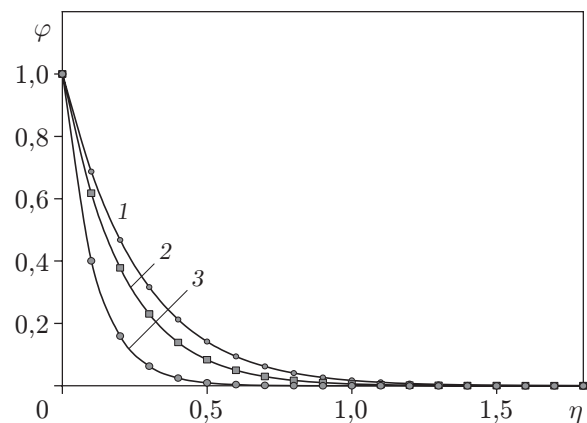


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость температуры от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = Gr = Fn = M_* = N = 1$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $\tau = 1$ и различных значениях параметра S (обозначения те же, что на рис. 3)

Рис. 5. Зависимость концентрации от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = Gr = Fn = M_* = N = 1$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $\tau = 1$ и различных значениях параметра S (обозначения те же, что на рис. 3)

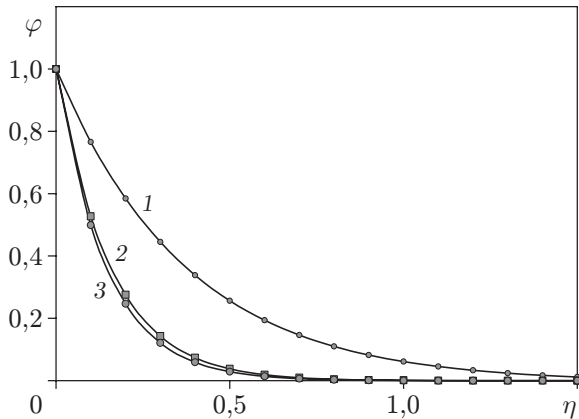


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость концентрации от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = Gr = Fn = M_* = N = 1$, $S = 1$, $Pr = 0,73$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $\tau = 1$ и различных значениях Sc : точки — результаты численных расчетов, линии — аналитическое решение; 1 — $Sc = 0,22$ (водород), 2 — $Sc = 0,62$ (водяной пар), 3 — $Sc = 0,78$ (аммиак)

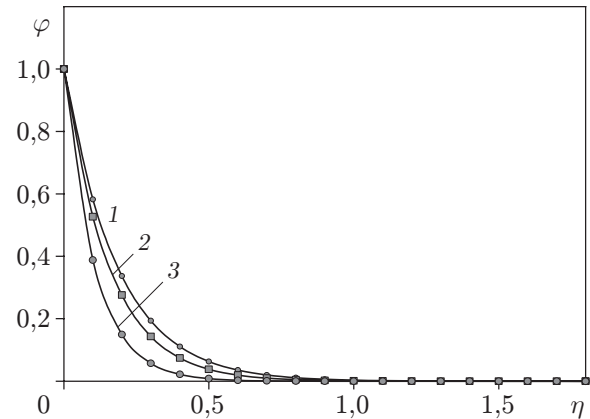


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость концентрации от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = Gr = Fn = M_* = N = 1$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $S = 1$ и различных значениях τ : точки — результаты численных расчетов, линии — аналитическое решение; 1 — $\tau = 0,1$, 2 — $\tau = 1$, 3 — $\tau = 2$

Re_x , Gr , Fn , N , Sc , f_w , τ при соответствующем выборе параметров h_f , h_θ , h_φ , γ и достаточно высоком порядке приближения. Однако даже в этом случае аналитическое решение хорошо согласуется с результатами численных расчетов в широком диапазоне свободных параметров.

Из рис. 3–5 следует, что параметр отсоса $S > 0$ оказывает влияние на скорость, температуру и концентрацию соответственно. Учет пристенного отсоса жидкости в рассматриваемой задаче приводит к уменьшению толщины теплового и концентрационного пограничных слоев, что вызывает увеличение скорости жидкости и уменьшение ее температуры и концентрации. Однако учет пристенного вдува жидкости, наоборот, приводит к уменьшению скорости жидкости и увеличению ее температуры и концентрации. Изменение толщины концентрационного пограничного слоя обусловлено двумя факторами: 1) непосредственным влиянием отсоса, приводящим к уменьшению толщины концентрационного пограничного слоя; 2) косвенным действием отсоса, вызывающим уменьшение толщины теплового пограничного слоя, что соответствует большему температурному градиенту, наличие которого приводит к увеличению термофоретической силы.

Влияние числа Шмидта на профиль концентрации показано на рис. 6. Видно, что с увеличением числа Шмидта концентрация уменьшается. Влияние концентрационной плавучести приводит к незначительному уменьшению скорости жидкости.

На рис. 7 показана зависимость концентрации от термофоретического параметра τ . Отметим, что с увеличением термофоретического параметра концентрация жидкости уменьшается. В частности, влияние термофоретического параметра τ ограничено уменьшением концентрации при незначительном увеличении угла наклона профиля концентрации вблизи стенки. Это справедливо только для малых чисел Шмидта, при которых броуновская диффузия преобладает над конвективным переносом. Однако при больших числах Шмидта ($Sc > 100$) конвективный перенос преобладает над диффузионным, поэтому увеличение термофоретического параметра τ , по-видимому, приведет к значительному

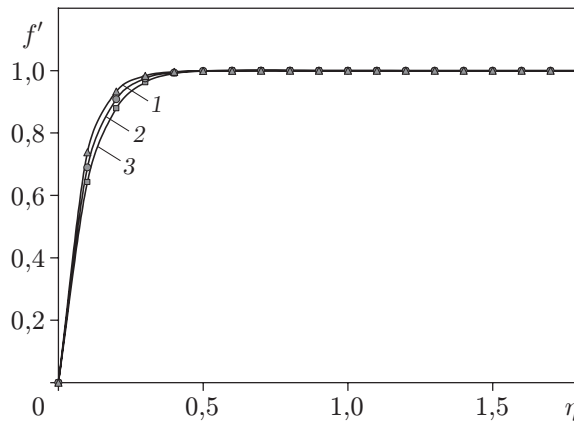


Рис. 8. Зависимость скорости от переменной η при $Re_x = 3$, $Re_k = Gr = Fn = N = 1$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $\gamma = 1$, $M = 80$, $S = 1$, $\tau = 1$ и различных значениях M_* : точки — результаты численных расчетов, линии — аналитическое решение; 1 — $M_* = 0,5$, 2 — $M_* = 1$, 3 — $M_* = 3$

изменению параметров концентрационного пограничного слоя. Это предположение подтверждается данными работы [1] о термофорезе частиц аэрозоля в плоском пограничном слое на пластине.

На рис. 8 представлены типичные профили скорости при различных значениях магнитного параметра. Воздействие поперечного магнитного поля на электрически проводящую жидкость приводит к возникновению силы сопротивления, называемой силой Лоренца, которая вызывает замедление движения жидкости и уменьшение температуры и концентрации.

Заключение. В настоящей работе с использованием метода гомотопического анализа получено явное, полностью аналитическое, справедливое во всей области течения решение системы трех связанных сильнонелинейных уравнений комбинированного тепло-массопереноса смешанной конвекции в пористой среде. Справедливость аналитического решения подтверждается результатами численных расчетов. Насколько известно авторам данной работы, аналитическое решение в таком виде получено впервые. В смешанном режиме конвекции термофоретическое осаждение частиц в присутствии магнитного поля оказывает существенное влияние на течение и, таким образом, на скорость тепло-массопереноса от пластины к жидкости. Таким образом, представленное явное аналитическое решение может найти широкое применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Goren S. L.** Thermophoresis of aerosol particles in laminar boundary layer on flat plate // J. Colloid Interface Sci. 1977. V. 61. P. 77–85.
2. **England W. G., Emery A. F.** Thermal radiation effects on laminar free convection boundary layer of an absorbing gas // J. Heat Transfer. 1969. V. 31. P. 37–44.
3. **Raptis A.** Flow of a micro polar fluid past a continuously moving plate by the presence of radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1988. V. 4. P. 2865–2866.
4. **Mbeledogu I. U., Ogulu A.** Heat and mass transfer of an unsteady MHD natural convection flow of a rotating fluid past a vertical porous flat plate in the presence of radiative heat transfer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2007. V. 50. P. 1902–1908.
5. **Alam M. S., Rahman M. M., Sattar M. A.** Effects of variable suction and thermophoresis on steady MHD combined free-forced convective heat and mass transfer flow over a semi-infinite

- permeable inclined plate in the presence of thermal radiation // Intern. J. Thermal Sci. 2008. V. 47. P. 758–765.
6. **Hossain M. A., Takhar H. S.** Radiation effects on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature // Heat Mass Transfer. 1996. V. 31. P. 243–248.
 7. **Duwairi H. M., Damesh R. A.** Magnetohydrodynamic natural convection heat transfer from radiate vertical porous surface // Heat Mass Transfer. 2004. V. 40. P. 787–792.
 8. **Duwairi H. M., Damesh R. A.** MHD boundary aiding and opposing flows with viscous dissipation effects from radiate vertical surfaces // Canad. J. Chem. Engng. 2004. V. 82. P. 1–6.
 9. **Duwairi H. M.** Viscous and joule heating effects on forced convection flow from radiate isothermal porous surfaces // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2005. V. 15. P. 429–440.
 10. **Damesh R. A., Duwairi H. M., Al-Odat M.** Similarity analysis of magnetic field and thermal radiation effects on forced convection flow // Turkish J. Engng Environmental Sci. 2006. V. 30. P. 83–89.
 11. **Goldsmith P., May F. G.** Diffusiophoresis and thermophoresis in water vapour systems // Aerosol science / Ed. by C. N. Davies. L.: Acad. Press, 1966. P. 163–194.
 12. **Jayaraj S., Dinesh K. K., Pallai K. L.** Thermophoresis in natural convection with variable properties // Heat Mass Transfer. 1999. V. 34. P. 469–475.
 13. **Selim A., Hossain M. A., Rees D. A. S.** The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis // Intern. J. Thermal Sci. 2003. V. 42. P. 973–982.
 14. **Hales J. M., Schwendiman L. C., Horst T. W.** Aerosol transport in a naturally-convected boundary layer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 15. P. 1837–1849.
 15. **Chamkha Ali J., Pop I.** Effects of thermophoresis particle deposition in free convection boundary layer from a vertical flat plate embedded in a porous medium // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2004. V. 31. P. 421–430.
 16. **Nield D. A.** Convection in porous media / D. A. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer, 1998.
 17. **Murthy P. V. S. N., Singh P.** Heat and mass transfer by natural convection in a non-Darcy porous medium // Acta Mech. 1999. V. 38. P. 243–254.
 18. **Liao S. J.** The proposed homotopy analysis techniques for the solution of nonlinear problems: Ph. D. diss. Shanghai, 1992.
 19. **Liao S. J.** An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special example // Intern. J. Nonlinear Mech. 1995. V. 30. P. 371–380.
 20. **Liao S. J.** A uniformly valid analytic solution of two dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate // J. Fluid Mech. 1999. V. 385. P. 101–128.
 21. **Liao S. J.** An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius-viscous flow problems // Intern. J. Nonlinear Mech. 1999. V. 34. P. 759–778.
 22. **Liao S. J.** An analytic approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere // Intern. J. Nonlinear Mech. 2002. V. 37. P. 1–18.
 23. **Liao S. J., Campo A.** Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems // J. Fluid Mech. 2002. V. 453. P. 411–425.
 24. **Kafoussias N. G., Nanousis N. D.** Magnetohydrodynamic laminar boundary layer flow over a wedge with suction or injection // Canad. J. Phys. 1997. V. 75. P. 733–741.
 25. **Gill S.** A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine // Math. proc. of the Cambridge philos. soc. 1951. V. 47, iss. 1. P. 96–108.