

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ГОРЕНИЕ ГАЗА

Ю. М. Лаевский

(Новосибирск)

В работе [1] предлагается двухтемпературная модель распространения волны горения в химически инертной пористой среде при фильтрации горючей газовой смеси. Полученное приближенное решение вполне удовлетворительно описывает результаты соответствующих экспериментов, проведенных в Институте химической кинетики и горения СО АН СССР. Физическую основу процесса составляет рекуперация энергии, являющаяся следствием кондуктивного переноса по каркасу и межфазного теплообмена. При этом в соответствии с условиями эксперимента пренебрегается градиентом давления.

Одним из вопросов, возникающих при качественном исследовании модели, является вопрос о существовании решения соответствующей системы уравнений. Имеется много работ, в которых эта задача решается для однотемпературных моделей распространения фронта экзотермической реакции (см. [2] и библиографию к ней).

В тех или иных предположениях относительно подобия полей концентрации и температуры и функции скорости реакции идеи доказательств восходят к работе [3], в которой существенно используется монотонность решения от скорости волны. В данной работе будет показано существование решения системы уравнений процесса, речь о котором шла выше. При этом монотонность решения от скорости отсутствует, что не позволяет использовать при доказательстве идеи работы [3]. Будет приведена асимптотическая формула для скорости волны, которая соответствует приближенному решению [1].

1. Постановка задачи. В соответствии с [1] стационарные уравнения распространения волны горения в инертной пористой среде при фильтрации горючей газовой смеси имеют вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} a_{\Theta} d^2\Theta/dx^2 + u d\Theta/dx + \alpha_{\Theta}(T - \Theta) &= 0, \\ (v - u)dT/dx + \alpha_T(T - \Theta) &= (Q/c_T)w(n, T), \\ (v - u)dn/dx &= -w(n, T), \quad u \neq v, \end{aligned}$$

где Θ и T — температуры каркаса и газового потока; n — относительная весовая концентрация недостающего компонента; v — скорость потока; u — скорость волны; $\alpha_{\Theta} = \alpha_0 S / (1 - \epsilon) c_{\Theta} \rho_{\Theta}$; $\alpha_T = \sigma \alpha_{\Theta}$; $\sigma = (1 - \epsilon) c_{\Theta} \rho_{\Theta} / (\epsilon c_T \rho_T)$; α_0 — коэффициент теплообмена; S — удельная поверхность; ϵ — пористость; c_{Θ} , ρ_{Θ} и c_T , ρ_T — удельные теплоемкости и плотности каркаса и газа соответственно; a_{Θ} — коэффициент теплопроводности каркаса; Q — тепловой эффект реакции; $w(n, T)$ — функция скорости реакции. Параметры v и ρ_T берутся для исходной смеси (следует из уравнения неразрывности). Далее предполагается, что $\sigma \gg 1$, т. е. тепловая инерционность твердой фазы намного превосходит тепловую инерционность газовой фазы. Именно по этой причине в модель не включен кондуктивный перенос в потоке.

Уравнения (1.1) рассматриваются на бесконечном интервале с условиями:

$$(1.2a) \quad x = -\infty, \quad \Theta = T_0, \quad T = T_0, \quad n = 1;$$

$$(1.2b) \quad x = +\infty, \quad \text{температура каркаса } \Theta \text{ ограничена, } n = n_e < 1.$$

Корректность условий (1.2a) следует из равенства $w(n, T_0) = 0$. Только в этом случае значения решения при $x = -\infty$ являются стационарной точкой системы (1.1). В дальнейшем относительно функции скорости реакции будем предполагать:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w(n, T) &= 0, \quad T \leq T_1, \quad T_1 > T_0, \\ w(n, T) &> 0, \quad T > T_1, \quad n > 0, \quad w(0, T) = 0. \end{aligned}$$

Т. е. имеется отрезок прямой $\Theta = T$ стационарных точек, для которого точка $\Theta = T_0$, $T = T_0$ является внутренней. Условия (1.2a) позволяют понизить порядок системы (1.1). Умножая первое уравнение на $-\sigma$,

третье на Q/c_T , складывая все три уравнения и интегрируя результат от $-\infty$ до x , приходим к следующей системе уравнений:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\Theta}{dx} &= -\frac{u}{a_\Theta} (\Theta - T_0) + \frac{v-u}{\sigma a_\Theta} \left(T + \frac{Q}{c_T} n - T_0 - \frac{Q}{c_T} \right), \\ \frac{dT}{dx} &= \frac{\alpha_T}{v-u} (\Theta - T) - \frac{Q}{c_T} \frac{dn}{dx}, \quad \frac{dn}{dx} = -\frac{1}{v-u} w(n, T). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $T(0, u) = T_1$ (уравнения (1.4) обладают группой сдвига). Это позволяет выписать решение при $x < 0$:

$$\begin{aligned} \Theta(x, u) &= T_0 + r_1 (T_1 - T_0) e^{\mu_1 x}, \\ T(x, u) &= T_0 + (T_1 - T_0) e^{\mu_1 x}, \quad n(x, u) = 1, \end{aligned}$$

где $\mu_1 > 0$. Здесь и далее используются обозначения: $r_i = 1 + (v-u)\mu_i/\alpha_T$, μ_i — корни характеристического уравнения

$$\mu^2 + \left(\frac{u}{a_\Theta} + \frac{\alpha_T}{v-u} \right) \mu - \frac{\alpha_\Theta}{a_\Theta} \frac{v - (1+\sigma)u}{v-u} = 0.$$

Для того чтобы существовал положительный корень μ_1 (корни уравнения вещественные), необходимо выполнение неравенства $u < v/(1+\sigma)$. Неравенство $u > v$ противоречит результату интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ третьего уравнения системы (1.4) с учетом условий (1.3). Таким образом, задача свелась к задаче Коши для системы (1.4) с начальными условиями

$$(1.5) \quad \Theta(0, u) = T_0 + r_1 (T_1 - T_0), \quad T(0, u) = T_1, \quad n(0, u) = 1.$$

Требуется решить вопрос о существовании $u < v/(1+\sigma)$ такого, что температура каркаса Θ при $x \rightarrow +\infty$ ограничена (условие (1.2б)). В дальнейшем будет показано существование конечных пределов функций Θ и T . Кроме указанных выше, система (1.4) имеет стационарную точку

$$(1.6) \quad \Theta = T = T_0 + \frac{Q}{c_T} \frac{v-u}{v-(1+\sigma)u}, \quad n = 0.$$

Как будет показано, именно к ней и стремится ограниченное решение задачи: Зависимость стационарной точки от скорости волны является особенностью рассматриваемой модели в отличие от традиционных постановок.

2. Существование решения. Введем переменные y_1 и y_2 по формулам:

$$(2.1) \quad r_1 y_1 + r_2 y_2 = \Theta - T_0, \quad y_1 + y_2 = T + Qn/c_T - T_0 - Q/c_T.$$

Это преобразование невырождено, так как определитель $r_1 - r_2 = [(v-u)/\alpha_T](\mu_1 - \mu_2) > 0$. Уравнения для y_1 и y_2 примут вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \mu_1 y_1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \frac{\alpha_T}{v-u} \frac{Q}{c_T} (1-n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= \mu_2 y_2 - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \frac{\alpha_T}{v-u} \frac{Q}{c_T} (1-n). \end{aligned}$$

Начальные условия, согласно (1.5), имеют вид

$$(2.3) \quad y_1(0, u) = T_1 - T_0, \quad y_2(0, u) = 0.$$

Введем функцию $\varphi(u) = -\frac{v-u}{\alpha_T} \frac{\mu_1}{r_2} (r_1 - r_2)$ и безразмерный параметр $q = (Q/c_T)/(T_1 - T_0)$. Видно, что решение задачи (2.2), (2.3) удовлетворяет интегральным соотношениям:

$$(2.4) \quad y_1 = \frac{T_1 - T_0}{\varphi} e^{\mu_1 x} \left(\varphi - q \mu_1 \int_0^x e^{-\mu_1 s} (1-n) ds \right),$$

$$y_2 = \frac{T_1 - T_0}{\varphi} q \frac{r_1}{r_2} \mu_1 \int_0^x e^{\mu_2(x-s)} (1-n) ds.$$

Так как $0 \leq n(x, u) \leq 1$ (следует из условий (1.3)) и $r_2 < 0$ (следует из неравенства $\mu_2 < -\alpha_T/(v-u)$), то имеет место $\varphi(u) > 0$ и

$$(2.5) \quad \frac{T_1 - T_0}{\varphi} q \frac{r_1 \mu_1}{r_2 \mu_2} (e^{\mu_2 x} - 1) \leq y_2(x, u) \leq 0.$$

Пусть $m(x, u) = \mu_1 \int_0^x e^{-\mu_1 s} n ds$. Тогда первое из равенств (2.4) может быть переписано в виде

$$(2.6) \quad y_1 = \frac{T_1 - T_0}{\varphi} [(\varphi - q(1-m)) e^{\mu_1 x} + q].$$

Из равенства (2.6) следует, что функция $y_1(x, u)$ ограничена тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(2.7) \quad |\varphi(u) - q(1-m(x, u))| \leq \text{const } e^{-\mu_1 x}.$$

Введем функцию $m_\infty(u) = \lim_{x \rightarrow \infty} m(x, u) = \mu_1 \int_0^\infty e^{-\mu_1 x} n dx$. При $u < v/(1 + \sigma)$ эта функция непрерывна и $0 \leq m_\infty(u) \leq 1$, причем $m_\infty(u) = 1$ тогда и только тогда, когда $n(x, u) \equiv 1$. Можно показать, что выполнение неравенства (2.7) эквивалентно с точки зрения ограниченности решения следующему равенству:

$$(2.8) \quad \varphi(u) = q(1 - m_\infty(u)).$$

Не останавливаясь пока на вопросе о существовании решения уравнения (2.8), покажем, что ответ на него дает решение поставленной в первом

пункте задачи. Пусть $n \rightarrow n_e$ при $x \rightarrow +\infty$, тогда $\mu_1 \int_x^\infty e^{-\mu_1 s} n ds \rightarrow n_e$,

и из равенства (2.8) следует

$$(2.9) \quad y_1 \rightarrow [(T_1 - T_0)/\varphi] q(1 - n_e).$$

Теперь покажем, что если u удовлетворяет уравнению (2.8), то температура каркаса Θ монотонно возрастает по x . Действительно, из (2.1), (2.2) следует $d\Theta/dx = \mu_1 r_1 y_1 + \mu_2 r_2 y_2$. Подставляя в это равенство выражения (2.4) и учитывая (2.8), получим

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{T_1 - T_0}{\varphi} \frac{\mu_1 r_1}{v-u} q \left[\int_x^\infty e^{\mu_1(x-s)} w(n, T) ds + \int_0^x e^{\mu_2(x-s)} w(n, T) ds \right].$$

Условия (1.3) дают требуемое. Так как функции y_1 и y_2 ограничены, то ограничены Θ и T . Из монотонности Θ следует, что $\Theta \rightarrow \Theta_e$. Так как y_1 имеет конечный предел (2.9), то y_2 также имеет конечный предел, а следовательно, $T \rightarrow T_e$. Как известно (см. [4]), Θ_e , T_e и n_e являются стационарной точкой. Из монотонности Θ следует, что $\Theta_e > \Theta(0, u) > T_1$, т. е. эта стационарная точка задается равенствами (1.6).

Осталось выяснить, разрешимо ли уравнение (2.8) в области $u < v/(1 + \sigma)$. В [5] показано, что $\varphi(v/(1 + \sigma)) = 0$ и $\varphi(u) \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow -\infty$. Тогда при $u_0 = v/(1 + \sigma) - \delta$ имеет место $\varphi(u_0) = O(\delta)$. Функция $m_\infty(u)$ представима в виде

$$m_\infty(u) = \mu_1 \int_0^\infty e^{-\mu_1 x - \frac{1}{v-u} \int_0^x w(n, T) ds} dx.$$

Учитывая, что $\mu_2(u_0) = O(\delta)$ и $T(1, u_0) = T_1 + O(\delta)$, получим

$$m_\infty(u_0) \leq O(\delta) \left[1 + \int_1^\infty e^{-O(\delta)(1+k_0 w'_T(1, T_1))^x} dx \right].$$

Потребуем выполнения неравенства

$$(2.10) \quad w'_T(1, T_1 + 0) \geq k_1 > 0.$$

Здесь k_0 и k_1 — некоторые положительные константы. Из этого неравенства следует существование не зависящей от δ положительной константы k_2 такой, что $m_\infty(u_0) \leq 1 - k_2$. Отсюда сразу следует разрешимость уравнения (2.8). Ограничение (2.10) на функцию w'_T не является обременительным. В проведенном рассмотрении имеется определенный произвол, связанный с заданием точки «обрезания» T_1 (фактически рассматривается аррениусовский источник тепла). Задавая T_1 максимально возможным, можно добиться неравенства (2.10). Ограничения на T_1 рассмотрены в [6].

Таким образом, показано существование решения задачи (1.1), (1.2). Условиями существования являются требования на функцию скорости реакции (1.3), (2.10).

3. Скорость волны при большой энергии активации. Большая энергия активации химической реакции означает выполнение сильного неравенства $E/RT_1 \gg 1$. Это, в свою очередь, приводит к выполнению приближенного равенства $m_\infty(u) \approx 0$. Тогда уравнение для скорости волны принимает вид

$$(3.1) \quad \varphi(u) = q.$$

* В [5] показано, что при $\sigma > 1$ функция $\varphi(u)$ монотонно убывает от ∞ до 0 при изменении u от $-\infty$ до $v/(1 + \sigma)$. Отсюда следует единственность решения уравнения (3.1). В [1] это же уравнение было получено как условие непрерывности температуры твердой фазы Θ при переходе из зоны подогрева в зону охлаждения. Заметим, что решение уравнения (3.1) является нижней оценкой для решения уравнения (2.8). При использовании (3.1) существенно, что T_1 максимально возможное. В [1] этому соответствует требование узости зоны химической реакции по сравнению с зоной изменения температуры Θ , что позволяет считать переход из зоны подогрева в зону охлаждения в твердой фазе непрерывным. Фактически это означает, что если в качестве точки «обрезания» взять $T'_1 < T_1$ и вычислить соответствующую функцию $m'_\infty(u)$, то нельзя полагать $m'_\infty(u) \approx 0$. Действительно, пусть $T(x_0, u) = T'_1$, где $x_0 < 0$. Тогда $q' = \frac{Q}{c_T} (T'_1 - T_0) = e^{-\mu_1 x_0} q$. Далее, $m'_\infty(u) = \mu_1 \int_{x_0}^\infty e^{-\mu_1(x-x_0)} n ds$. Учитывая, что $n(x, u) \equiv 1$ при $x_0 \leq x \leq 0$, получим $m'_\infty(u) = 1 - e^{\mu_1 x_0} (1 - m_\infty(u))$. Тогда имеет место

$$\varphi(u) = q(1 - m_\infty(u)) = q'(1 - m'_\infty(u)).$$

Однако если $m_\infty(u) \approx 0$, то этого уже нельзя сказать о $m'_\infty(u) \approx 1 - e^{\mu_1 x_0}$. Расчеты по формуле (3.1), приведенные в [1], показали ее хорошую работоспособность в широком диапазоне параметров при сравнении с экспериментальными данными.

Поступила 11 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабкин В. С., Дробышев В. И. и др. О распространении волны горения в инертной пористой среде при фильтрации газа. — ДАН СССР, 1982, т. 265, № 5.
2. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.

3. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. — ЖФХ, 1948, т. 22, вып. 1.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л.: ОГИЗ, 1947.
5. Лавский Ю. М. О распространении фронта пламени в пористых инертных средах: Препринт № 299. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981.
6. Мержанов А. Г. Тепловые волны в химии. Препринт. Черногоровка: ОИХФ АН СССР, 1978.

УДК 533.6.011.55.011.6 : 629.7.025.1

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРЫЛА ПОТОКОМ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

А. И. Голубинский, В. Н. Голубкин

(Москва)

Известно (например, [1]), что при входе в верхние слои атмосферы со скоростями порядка второй космической и выше излучение может существенно влиять на обтекание тела газом, а радиационные тепловые потоки сравнимы с конвективными или даже превосходят их. Теоретические исследования обтекания тел гиперзвуковым потоком излучающего газа проводились в основном численно (см. библиографию в [1]). В [2] в нулевом приближении метода тонкого ударного слоя [3] рассмотрено гиперзвуковое обтекание клина и конуса с учетом излучения (соответственно плоское и осесимметричное течения). Наряду с этим важно исследовать особенности обтекания пространственных тел излучающим газом.

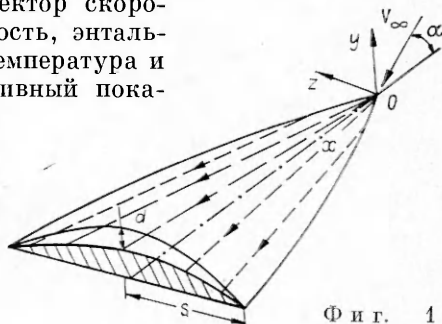
В данной работе исследовано трехмерное нестационарное гиперзвуковое течение излучающего газа в ударном слое вблизи наветренной поверхности крыла малого удлинения с переменной во времени формой поверхности. Применение метода тонкого ударного слоя [3, 4] позволило получить общее решение уравнений газовой динамики, выражающее все параметры течения через форму головной ударной волны. Сформулирована задача ее определения. Получен класс точных решений. Изучено влияние излучения на толщину ударного слоя, плотность, температуру, распределение давления. Рассчитано распределение радиационного теплового потока к крылу.

1. Рассмотрим трехмерное обтекание крыла гиперзвуковым потоком под конечным углом атаки α с учетом излучения при высокой температуре. Будем считать, что прилегающий к наветренной поверхности крыла сжатый слой газа является оптически прозрачным, т. е. средняя длина свободного пробега излучения L_r много больше характерной толщины сжатого слоя d (оптическая толщина слоя $r = d/L_r \ll 1$).

При этом поглощением излучения в газе пренебрегаем, что оправдано для не слишком малых высот полета [1]. Состояние газа до и после головной ударной волны примем равновесным. Систему уравнений нестационарного движения излучающего газа запишем в виде [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} d\mathbf{V}/dt &\equiv \partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -(1/\rho)\nabla p, \\ \partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) &= 0, \quad \rho dh/dt - dp/dt + 4\pi k_p B = 0, \\ p/\rho h &= (\kappa_* - 1)/\kappa_*, \quad \kappa_*(p, h) = h/e(p, h), \\ \rho\mu &= \rho RT, \quad B = (\sigma/\pi)T^4, \end{aligned}$$

где x, y, z — декартовы координаты в связанной с крылом системе (фиг. 1); t — время; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости; p, ρ, h, e, T, μ — давление, плотность, энтальпия, удельная внутренняя энергия, температура и молекулярный вес газа; κ_* — эффективный показатель адиабаты; R — универсальная газовая постоянная; σ — постоянная Стефана — Больцмана; выражение для дивергенции вектора потока лучистой энергии записано с использованием планковского среднего коэффициента поглощения $k_p(p, T)$ [1]



Ф и г. 1