9. **Фидман Б. А.** Поле скоростей в водном потоке при внезапном увеличении глубины.— Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 4.
10. **Богатырев В. Я., Дубнищев Ю. Н. и др.** Экспериментальное исследование течения в траншее.— ПМТФ, 1976, № 2.
11. **Mc Cormack P. O., Welkor M., Kolleher M.** Taylor—Goertler vortices and their effect on heat transfer.— Trans. ASME. Ser. C. J. of Heat Transfer, 1970, vol. 92, N 1.

УДК 532—5

О СПЕКТРАХ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Г. Сазонтов

(*Горький*)

Как известно (см., например, [1]), крупномасштабную турбулентность в океане и атмосфере можно считать квазидвумерной. Интерес к таким движениям в первую очередь определяется тем, что они обладают большой энергией и их роль в общей циркуляции является существенной. В связи с этим представляется важной задача о спектрах двумерной турбулентности.

Динамика турбулентности в плоских течениях существенно отличается от динамики трехмерных течений [2, 3]. Это связано с наличием дополнительного интеграла движения — энстрофии (равной половине средней квадратичной завихренности), который существует только в двумерном случае. При достаточно больших числах Рейнольдса становится определяющим каскадный процесс передачи энстрофии с конечной скоростью ε_2, направленной в область малых масштабов. Тогда в инерционном интервале соображения размерности приводят к спектру турбулентности вида

$$E_k = c_2 \varepsilon_2^{2/3} k^{-3}.$$

Гипотеза о спектральном переносе энстрофии и вытекающий из нее закон «минус три» были впервые сформулированы в работе [2].

1. Получим этот результат как точное решение уравнений движения в приближении прямых взаимодействий. Запишем уравнения Эйлера в фурье-представлении

$$\frac{\partial v_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = -\frac{i}{2} P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma} \int v_{\mathbf{k}_1}^{*\beta} v_{\mathbf{k}_2}^{*\gamma} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \tag{1.1}$$

где

$$P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma} = k_{\gamma}\Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} + k_{\beta}\Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\gamma};\quad \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2};$$

$\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ — преобразование Фурье поля скорости.

Для исследования статистических характеристик уравнения (1.1) удобно пользоваться диаграммной техникой Уайльда [4], которая оперирует двумя рядами — для функции Грина $G_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}$ и парного коррелятора поля скорости $J_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta}$. Первый порядок теории возмущений соответствует модели прямых взаимодействий [5]. В трехмерном случае для пространственного спектра кинетической энергии это приближение дает асимптотическую формулу $J_k \sim k^{-3/2}$, что противоречит колмогоровским гипотезам автомодельности. Недостаток этой схемы состоит в том, что она преувеличивает влияние крупномасштабных движений на эволюцию мелкомасштабных неоднородностей [6].

В работе [7] была просуммирована часть наиболее расходящихся диаграмм, описывающих чистый перенос. Улучшенные уравнения, как показано в [8], имеют точное решение, соответствующее колмогоровскому спектру. В рамках этих же уравнений в работе [9] были найдены индексы стационарного спектра спиральности. В данной работе аналогичная процедура используется для нахождения спектров двумерной турбулентности.

Улучшенные уравнения прямых взаимодействий имеют вид [8]

$$\widetilde{G}_q = (\omega - \widetilde{\Sigma}_q)^{-1}, \quad \widetilde{I}_q = |\widetilde{G}_q|^2 \widetilde{\Phi}_q \quad (q = \mathbf{k},\ \omega),$$

$$\widetilde{\Sigma}_q = \int \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\alpha\gamma}_{\mathbf{k}\,\mathbf{k}_2} \widetilde{G}^*_{q_1} \widetilde{I}_{q_2} [\delta(q + q_1 + q_2) - \delta(q + q_1)]\, dq_1 dq_2,$$

$$\widetilde{\Phi}_q = \int \left[\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\right]^2 \widetilde{I}_{q_1} \widetilde{I}_{q_2} \left[\frac{1}{2}\delta(q + q_1 + q_2) - \delta(q + q_1)\right] dq_1 dq_2,$$

где $\widetilde{G}^{\alpha\beta}_q = \widetilde{G}_q \Delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}}$; $\widetilde{J}^{\alpha\beta}_q = \widetilde{I}_q \Delta^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}}$; $G_q = \langle \widetilde{G}_{\mathbf{k},\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{v}}$; $J_q = \langle \widetilde{I}_{\mathbf{k},\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{v}}$;

$\langle \ldots \rangle_{\mathbf{v}}$—усреднение по случайному полю скорости в произвольной точке $\mathbf{r}$, t с помощью процедуры Уайльда;

$$\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \left[\Delta^{\alpha\alpha_1}_{\mathbf{k}} k_{\beta_1} + \Delta^{\alpha\beta_1}_{\mathbf{k}} k_{\alpha_1}\right] \Delta^{\alpha_1\beta}_{\mathbf{k}_1} \Delta^{\beta_1\gamma}_{\mathbf{k}_2}$$

— вершина, являющаяся однородной функцией своих аргументов степени единица. В двумерном случае она удовлетворяет тождествам

$$\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} + \Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\gamma\alpha}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}} + \Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} = 0; \tag{1.2}$$

$$k^2\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} + k_1^2\Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\gamma\alpha}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}} + k_2^2\Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} = 0, \tag{1.3}$$

которые являются следствиями законов сохранения энергии и энстрофии.

Далее определим следующую комбинацию [10]:

$$L_q = 2i\, \mathrm{Im}\, [\widetilde{\Phi}_q \widetilde{G}^*_q + \widetilde{I}_q \widetilde{\Sigma}_q],$$

причем $L_q = 0$ эквивалентно уравнению Дайсона для $\widetilde{I}_q$. Имеем

$$0 = L_{\mathbf{k}} = \int L_{\mathbf{k}\omega} d\omega = \mathrm{Im} \int d\omega dq_1 dq_2 \delta(q + q_1 + q_2)\, \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \times$$
$$\times \left\{\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \widetilde{G}_q \widetilde{I}_{q_1} \widetilde{I}_{q_2} + \Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} \widetilde{G}_{q_2} \widetilde{I}_q \widetilde{I}_{q_1} + \Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\gamma\alpha}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}} \widetilde{G}_{q_1} \widetilde{I}_{q_2} \widetilde{I}_q\right\}. \tag{1.4}$$

В рассматриваемом случае это уравнение аналогично кинетическому уравнению для волн в теории слабой турбулентности при нераспадном законе дисперсии.

Прежде всего найдем решения уравнения (1.4), описывающие термодинамическое равновесие. Для этого перепишем подынтегральную функцию в (1.4) в виде

$$\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \widetilde{I}_q \widetilde{I}_{q_1} \widetilde{I}_{q_2}\, \mathrm{Im} \left\{\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \widetilde{G}_q \widetilde{I}_q^{-1} + \Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} \widetilde{G}_{q_2} \widetilde{I}_{q_2}^{-1} + \Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\gamma\alpha}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}} \widetilde{G}_{q_1} \widetilde{I}_{q_1}^{-1}\right\} \delta(q + q_1 + q_2),$$

откуда видно, что уравнение (1.4) в силу (1.2) допускает решение

$$\widetilde{I}_q = \frac{T}{\pi}\, \mathrm{Im}\, \widetilde{G}_q.$$

Более общим является решение вида

$$\widetilde{I}_q = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\, G_q \frac{1}{a + bk^2}, \quad a \text{ и } b - \mathrm{const},$$

обращающее (1.4) в нуль в силу сохранения энстрофии.

Другие решения этого уравнения, описывающие неравновесные потоковые распределения, будем искать в масштабно-инвариантном виде

$$\widetilde{G}_q = \frac{1}{k^s}\, g\left(\frac{\omega}{k^s}\right), \quad \widetilde{I}_q = \frac{1}{k^{s+p}}\, f\left(\frac{\omega}{k^s}\right). \tag{1.5}$$

Первое соотношение между искомыми показателями получается из уравнения Дайсона

$$2s + p = 2t + d,$$

где t — степень однородности коэффициента взаимодействия; d — размерность пространства.

Еще одно соотношение между s и p можно найти, применяя процедуру факторизации [8, 11] к уравнению (1.4).

Совершим конформное преобразование

$$k = k''\left(\frac{k}{k''}\right), \quad k_1 = k'\left(\frac{k}{k''}\right), \quad k_2 = k\left(\frac{k}{k''}\right),$$

$$\omega = \omega''\left(\frac{k}{k''}\right)^s, \quad \omega_1 = \omega'\left(\frac{k}{k''}\right)^s, \quad \omega_2 = \omega\left(\frac{k}{k''}\right)^s.$$

При этом второе слагаемое в (1.4) на масштабно-инвариантном спектре (1.5) переходит в первое с множителем $(k/k_2)^x$, где $x = 2t + 2d - s - 2p$.

Аналогичным образом преобразуется третье слагаемое в (1.4). В результате подынтегральная функция имеет вид

$$\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\tilde{G}_q\tilde{I}_{q_1}\tilde{I}_{q_2}\left\{\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} + \left(\frac{k}{k_2}\right)^x\Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} + \left(\frac{k}{k_1}\right)^x\Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\gamma\alpha}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}\right\}.$$

Фигурная скобка может обращаться в нуль как за счет сохранения энергии (решение с $x = 0$), так и за счет сохранения эистрофии (решение с $x = -2$). В результате для пространственных спектров $E_k = 2\pi k\int\tilde{I}_{k\omega}d_{\omega}$ соответственно имеем

$$E_k \sim k^{-5/3}\left(x = 0,\ s = \frac{2}{3},\ p = \frac{8}{3}\right),$$

$$E_k \sim k^{-3}\ (x = -2,\ s = 0,\ p = 4).$$

2. Обсудим направления потоков энергии и энстрофии по спектру. Запишем уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = -\frac{\pi k}{2}\operatorname{Im}\int\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}J^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

где
$$J^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \langle v^{\alpha}_{\mathbf{k}}v^{\beta}_{\mathbf{k}_1}v^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\rangle.$$

Это уравнение сохраняет полную энергию $\int\limits_0^\infty E_k dk$ и полную завихренность $\int\limits_0^\infty k^2 E_k dk$. Оно имеет вид уравнения непрерывности, поэтому правая часть может быть представлена как дивергенция соответствующих потоков

$$\varepsilon_i = \pi\int\limits_0^k dk k^{i+1}\,\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}J^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

где $i = 0$ отвечает потоку энергии, а $i = 2$ отвечает потоку энстрофии.

Выразим $J^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ в виде ряда по степеням $G_{\mathbf{k}}$ и $J_{\mathbf{k}}$. В приближении прямых взаимодействий в стационаре имеем

$$J^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \int d\omega d\omega_1 d\omega_2\delta(\omega + \omega_1 + \omega_2)\left[\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}}\Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}G_q J_{q_1}J_{q_2} + \Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_2}\Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}G_{q_2}J_q J_{q_1} + \Gamma^{\beta}_{\mathbf{k}_1}\Big|^{\gamma\alpha}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}G_{q_1}J_{q_2}J_q\right]. \tag{2.1}$$

В результате для ε_i получаем

$$\varepsilon_i = \pi \int\limits_0^k k^{i+1} L_k dk. \tag{2.2}$$

При степенном распределении для пространственного спектра

$$J_k = c_i k^{-p_i} \tag{2.3}$$

L_k имеет также масштабно-инвариантный вид

$$L_k = D(x) k^{-d+x}.$$

Тогда в случае сходимости L_k на распределении (2.3) для ε_i, согласно (2.2), найдем

$$\varepsilon_i = \pi k^{i+d} L_k/(x+i).$$

При $x = -i$ ε_i содержит особенность типа 0/0, поэтому для потоков на стационарных спектрах получим *

$$\varepsilon_i = \pi k^{i+d} \partial L_k/\partial x|_{x=-i}.$$

Для нахождения производной удобно воспользоваться факторизованной формулой для L_k в виде

$$L_k = \frac{1}{3} k^x \operatorname{Im} \int d\omega dq_1 dq_2 \delta(q + q_1 + q_2) \left[\Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}\Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma} G_q J_{q_1} J_{q_2} + \Gamma_{\mathbf{k}_2}^{\gamma}\Big|_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} G_{q_2} J_q J_{q_1} + \right.$$
$$\left. + \Gamma_{\mathbf{k}_1}^{\beta}\Big|_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\gamma\alpha} G_{q_1} J_{q_2} J_q\right] \left\{k^{-x} \Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}\Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma} + k_2^{-x} \Gamma_{\mathbf{k}_2}^{\gamma}\Big|_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} + k_1^{-x} \Gamma_{\mathbf{k}_1}^{\beta}\Big|_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\gamma\alpha}\right\}.$$

Откуда для ε_i имеем

$$\varepsilon_i = -\frac{\pi}{3} c_i^{3/2} k^d \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \theta_{kk_1k_2} (kk_1k_2)^{-p_i} \times \tag{2.4}$$
$$\times \left[k^{p_i} \Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}\Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma} + k_2^{p_i} \Gamma_{\mathbf{k}_2}^{\gamma}\Big|_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} + k_1^{p_i} \Gamma_{\mathbf{k}_1}^{\beta}\Big|_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\gamma\alpha}\right] \left\{k^i \ln k \Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}\Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma} + \right.$$
$$\left. + k_2^i \ln k_2 \Gamma_{\mathbf{k}_2}^{\gamma}\Big|_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} + k_1^i \ln k_1 \Gamma_{\mathbf{k}_1}^{\beta}\Big|_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\gamma\alpha}\right\},$$

где $\theta_{kk_1k_2} = \int\limits_0^\infty g(k^s t) f(k_1^s t) f(k_2^s t) dt$ — положительно определенная функция (см., например, [13]), которая при соответствующей аппроксимации может быть сделана симметричной относительно перестановки своих аргументов [2, 13, 14]. Из (2.4) видно, что $c_i \sim \varepsilon_i^{2/3}$, это, естественно, также следует из соображений размерности.

В двумерном случае из соотношений (1.2), (1.3) вытекает

$$\Gamma_{\mathbf{k}_2}^{\gamma}\Big|_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} = \frac{k^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2} \Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}\Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma}, \tag{2.5}$$
$$\Gamma_{\mathbf{k}_1}^{\beta}\Big|_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\gamma\alpha} = \frac{k_2^2 - k^2}{k_1^2 - k_2^2} \Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}\Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma}.$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и вводя новые переменные посредством $k_1 = kv$, $k_2 = ku$, для ε_i окончательно получим

$$\varepsilon_i = \frac{\pi}{3} c_i^{3/2} \iint\limits_\Delta \frac{dudv\theta_{1vu} \left[\Gamma_1^{\alpha}\Big|_{vu}^{\beta\gamma}\right]^2 (uv)^{-p_i+1}}{(u^2 - v^2) \sqrt{[(u+v)^2 - 1][1 - (u-v)^2]}} \times \tag{2.6}$$
$$\times \left[u^2 - v^2 + (v^2 - 1) u^{p_i} - (u^2 - 1) v^{p_i}\right] \left\{(v^2 - 1) u^i \ln u - (u^2 - 1) v^i \ln v\right\}.$$

* Аналогичное соотношение для потоков имеется в теории слабой турбулентности [12].

Область интегрирования Δ определяется неравенством треугольника со сторонами u, v и $1 : |u - v| \leqslant 1 \leqslant u + v$. Направления потоков даются знаком интеграла (2.6); при $\operatorname{sign} \varepsilon_i > 0$ поток направлен в область больших волновых чисел, при обратном неравенстве — в сторону малых.

Из анализа следует (см. приложение), что подынтегральная функция в (2.6) знакоопределена, причем

$$\operatorname{sign} \varepsilon_0 = -\operatorname{sign} p_0(p_0 - 2), \quad \operatorname{sign} \varepsilon_2 = \operatorname{sign} p_2(p_2 - 2).$$

При $p_i = 0$ и 2 величины потоков ε_i обращаются в нуль, так как эти значения p_i соответствуют термодинамическим распределениям.

Для неравновесных решений $p_0 = 8/3$ и $p_2 = 4$, при этом

$$\operatorname{sign} \varepsilon_0 < 0, \quad \operatorname{sign} \varepsilon_2 > 0.$$

Полученный результат был найден в работах [15, 16] из других соображений.

3. Для того чтобы полученные решения имели физический смысл, необходимо доказать локальность турбулентности. Последнее физически означает, что взаимодействие вихрей с масштабами одного порядка гораздо сильнее, чем взаимодействие вихрей разных масштабов. Формально свойство локальности требует, чтобы интегралы в (1.4) сходились. Элементарный анализ дает, что интегралы в (1.4) сходятся на верхнем пределе для обоих спектров.

Рассмотрим сходимость в области $q_1 \ll q$ $(q_2 \sim q)$. В этом случае наиболее опасными членами, с которыми связана наибольшая расходимость в (1.4), будут слагаемые, пропорциональные J_{q_1}:

$$\operatorname{Im} \int dq_1 \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}} \Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1 - (\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)} \left\{ \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}} \Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1 - (\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)} G_q J_{-(q+q_1)} + \Gamma^{\gamma}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)} \Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} G_{-(q+q_1)} J_q \right\} J_{q_1}.$$

При малых q_1 с учетом $\Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}} \Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \simeq \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}} \Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ и с использованием тождества (1.2) и свойства $G_q = - G^*_{-q}$ эти слагаемые группируются в выражение

$$\int\limits_0^{2k} \frac{dk_1}{\sqrt{4k^2 - k_1^2}} \Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_1} \Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}} \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}} \Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}_1}. \tag{3.1}$$

Интегрирование производится по области, где подкоренное выражение больше нуля.

Поскольку свертка $\Gamma^{\gamma}_{\mathbf{k}_1} \Big|^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}} \Gamma^{\alpha}_{\mathbf{k}} \Big|^{\beta\gamma}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} \equiv 0$*, то это обеспечивает сходимость интеграла (3.1) и тем самым означает локальность полученных спектров.

4. Поскольку поток энстрофии направлен в область больших волновых чисел, то при подходе волнового вектора к внутреннему колмогоровскому масштабу $\eta_2 = (\nu/\varepsilon_2^{1/3})^{1/2}$ (ν — коэффициент молекулярной вязкости) спектр завихренности должен искажаться. Найдем поправку к спектру завихренности, обусловленную эффектом искажения в области $k\eta_2 < 1$, где непосредственный учет вязкости в уравнениях гидродинамики может еще не проводиться.

Для этого линеаризуем уравнение (1.4) на фоне спектра завихренности. Возмущения представим в виде

$$\delta J_{\mathbf{k}\omega} = k^{-(s_2+p_2+\alpha)} f_2\left(\frac{\omega}{k^{s_2}}\right), \quad \delta G_{\mathbf{k}\omega} = k^{-(s_2+\alpha)} g_2\left(\frac{\omega}{k^{s_2}}\right),$$

где α — искомый индекс, определяющий эффект искажения.

* Такая особенность вершины была отмечена в [9].

Для добавок линеаризованное уравнение $\delta L_q = 0$ после интегрирования по $\mathbf{k}$ примет вид

$$\int \delta L_{\mathbf{k}\omega} d\mathbf{k} = \mathrm{Im} \int \Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} \Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma} \delta J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = 0,$$

где $\delta J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma}$ — линеаризованное выражение для $J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma}$ (2.1). После конформного преобразования по частотам приходим к уравнению

$$\mathrm{Im} \int d\mathbf{k} dq_1 dq_2 \delta(q + q_1 + q_2) \left[\Gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} \Big|_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\beta\gamma} + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^y \Gamma_{\mathbf{k}_1}^{\beta} \Big|_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\gamma\alpha} + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^y \Gamma_{\mathbf{k}_2}^{\gamma} \Big|_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} \right] \delta J_{qq_1q_2}^{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $y = (1/s_2)(2 + \alpha)$, $J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma} = \int \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2)\, d\omega d\omega_1 d\omega_2 J_{qq_1q_2}^{\alpha\beta\gamma}$.

В силу тождества (1.2) это выражение обращается в нуль при $y = 0$. Отсюда $\alpha = -2$. Таким образом, $\delta J_k \sim k^2 J_k$. На вязкой границе $\delta J_k \sim J_k$ и степенной спектр должен обрываться [7]. Тогда при $k\eta_2 < 1$

$$E_k = c_2 \varepsilon_2^{2/3} k^{-3} [1 - c (k\eta_2)^2],$$

где c — положительный безразмерный коэффициент порядка единицы.

Заметим, что вязкая поправка к частоте νk^2 в $(k\eta_2)^2$ меньше, чем колмогоровская частота $\omega_k \sim \varepsilon_2^{2/3} k^0$, поэтому непосредственный учет вязкости приведет к поправке J_k того же порядка:

$$\delta J_k / J_k \sim c_3 (k\eta_2)^2, \quad c_3 \sim 1.$$

Далее обратим внимание на то, что если вязкость ν отлична от нуля, то возникает интервал вязкой диссипации, при этом в области больших волновых чисел появится поток энергии $\tilde{\varepsilon}_0$. При малой вязкости этот поток мал:

$$\tilde{\varepsilon}_0 \sim \eta_2^2 \varepsilon_2$$

и статистический режим в этой области будет в основном определяться потоком энстрофии.

5. Однопотоковые спектры, полученные выше, должны реализоваться в двух инерционных интервалах, причем спектр $E_k \sim \varepsilon_0^{2/3} k^{-5/3}$ осуществляется при $k \ll k_0$, где $k_0^{-1} = L$ — масштаб возбуждения турбулентности, а $E_k \sim \varepsilon_2^{2/3} k^{-3}$ при $k \gg k_0$.

В реальных условиях будут реализоваться двухпотоковые распределения: на фоне колмогоровского спектра с постоянной завихренностью появится добавка с постоянной энергией и наоборот *. Двухпотоковое распределение можно выразить через безразмерную функцию F отношения потоков.

При этом автомодельное решение имеет вид

$$E_k = \varepsilon_2^{2/3} k^{-3} F\left(\frac{k^2 \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right).$$

Выяснение конкретной структуры двухпотоковых распределений требует отдельного рассмотрения.

Приложение. В силу симметрии подынтегральной функции в (2.6) и области интегрирования относительно $u \rightleftarrows v$ для определения знака интеграла достаточно рассмотреть случай $u > v$. При этом необходимо рассмотреть три области: 1) $0 < v < 1$, $u > 1$; 2) $v > 1$, $u > 1$; 3) $0 < v > < 1$, $0 < u < 1$. Знак интеграла (2.6) определяется знаком произведения

$$[u^2 - v^2 + (v^2 - 1) u^{p_i} - (u^2 - 1) v^{p_i}]\{(v^2 - 1) u^i \ln u - (u^2 - 1) v^i \ln v\}.$$

* Об этом свидетельствуют численные расчеты (см., например, [17]).

Определим знаки сомножителей в рассматриваемых областях

$$K(u, v, p_i) \equiv \left[u^2 - v^2 + (v^2-1)\,u^{p_i} - (u^2-1)\,v^{p_i}\right],$$

$$K(u, 1, p_i) = 0,\ \frac{\partial K}{\partial v} = 2v\left(u^{p_i}-1\right) - p_i v^{p_i-1}(u^2-1) \equiv F(u, v, p_i),$$

$$F(1, v, p_i) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial u} = 2p_i uv\left(u^{p_i-2} - v^{p_i-2}\right).$$

При $u > v$ $\operatorname{sign}(\partial F/\partial u) = \operatorname{sign} p_i(p_i - 2)$.
Тогда при $0 < v < 1$, $u > 1$ $\operatorname{sign} F(u, v, p_i) \equiv \operatorname{sign}(\partial K/\partial v) = \operatorname{sign} p_i(p_i - 2)$ и $\operatorname{sign} K(u, v, p_i) = -\operatorname{sign} p_i(p_i - 2)$.
При $v > 1$, $u > 1$ $\operatorname{sign} F(u, v, p_i) \equiv \operatorname{sign}(\partial K/\partial v) = \operatorname{sign} p_i(p_i - 2)$ и $\operatorname{sign} K(u, v, p_i) = \operatorname{sign} p_i(p_i - 2)$.
При $0 < v < 1$, $0 < u < 1$ $\operatorname{sign}(\partial K/\partial v) = -\operatorname{sign} p_i(p_i-2)$ и $\operatorname{sign} K(u, v, p_i) = -\operatorname{sign}(\partial K/\partial v) = \operatorname{sign} p_i(p_i - 2)$.

Рассмотрим знак функции

$$\Phi_i(u, v) \equiv (v^2-1)u^i \ln u - (u^2-1)v^i \ln v \equiv (v^2-1)(u^2-1) \times \times [\varphi_i(u) - \varphi_i(v)],$$

где $\varphi_i(x) = \dfrac{x^i \ln x}{x^2-1}$, $i = 0, 2$.

а) $\varphi_0(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$; так как $\varphi_0'(x) < 0$, то $\varphi_0(u) - \varphi_0(v) < 0$ при $u > v$.

Тогда в областях $u > 1$, $v > 1$ и $0 < v < 1$, $0 < u < 1$ $\Phi_0(u, v) < 0$, при $0 < v < 1$, $u > 1$ $\Phi_0(u, v) > 0$;

б) $\varphi_2(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x^2-1}$; в силу $\varphi_2'(x) > 0$ следует, что $\varphi_2(u) - \varphi_2(v) > 0$ при $u > v$. При этом в областях, где $u > 1$, $v > 1$ и $0 < v < 1$, $0 < u < 1$, $\Phi_2(u, v) > 0$ и $\Phi_2(u, v) < 0$ при $0 < v < 1$, $u > 1$.

Таким образом,

$$\operatorname{sign} \varepsilon_0 = \operatorname{sign} K \cdot \operatorname{sign} \Phi_0 = -\operatorname{sign} p_0(p_0 - 2),\quad \operatorname{sign} \varepsilon_2 = \operatorname{sign} K \cdot \operatorname{sign} \Phi_2 = \operatorname{sign} p_2(p_2 - 2).$$

Поступила 27 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Физика** океана. Под ред. А. С. Монина. Т. 1. М., Наука, 1968.
2. **Kraichnan R. H.** Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 47, N 3.
3. **Batchelor G. K.** Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence.— Phys. Fluids, 1969, vol. 12, Suppl. 11.
4. **Wyld H. W.** Formulation of the theory of turbulence in incompressible fluid.— Ann. Phys., 1961, vol. 14, p. 143—165.
5. **Kraichnan R. H.** The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds number.— J. Fluid. Mech., 1959, vol. 5, N 4.
6. **Кадомцев Б. Б.** Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
7. **Львов В. С.** Теория развитой гидродинамической турбулентности. Препринт № 53. Новосибирск, Ин-т автоматики и электрометрии АН СССР, 1977.
8. **Kuznetsov E. A., L'vov V. S.** On the Kolmogorov turbulent spectrum in the direct interaction model.— Phys. Lett., 1977, vol. 64A, N 2.
9. **Кузнецов Е. Н., Носков Н. Н.** О спектрах гидротропной турбулентности.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 4.
10. **Захаров В. Е., Львов В. С.** О статистическом описании нелинейных полей.— Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1975, т. 18, № 10.
11. **Кац А. В., Контрович В. М.** Дрейфовые стационарные решения в теории слабой турбулентности.— Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, вып. 6.
12. **Кац А. В.** Направление перекачки энергии и числа квазичастиц по спектру в стационарных степенных решениях кинетических уравнений для волн.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, вып. 6.

13. **Kraichnan R. H.** An almost Markovian Galilean-invariant turbulence model.— J. Fluid. Mech., 1971, vol. 47, N 3.
14. **Kraichnan R. H.** Approximations for steady-state isotropic turbulence.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 8.
15. **Новиков Е. А.** Статистическая необратимость турбулентности и передача энергии по спектру.— В сб.: Турбулентные течения. М., Наука, 1974.
16. **Новиков Е. А.** Спектральные неравенства для двумерной турбулентности.— ФАО, 1978, т. 14, № 6.
17. **Rose H. A., Sulen P. L.** Fully developed turbulence and statistical mechanics.— J. de Physique, 1978, vol. 39, N 5.

УДК 621.436

КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ФАКЕЛА ПРИ ВПРЫСКЕ ТОПЛИВА В СРЕДУ С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ ДО 10 АТМ

В. К. Баев, А. Н. Бажайкин, А. А. Бузуков, Б. П. Тимошенко
(Новосибирск)

Исследования процессов, связанных с развитием факела при высоконапорном впрыске топлива в рабочий объем, проведенные методами микрофотографирования с лазерной подсветкой и импульсного рентгенографирования [1, 2], показали, что существенную роль в его формировании играют нестационарные гидро- и газодинамические явления, сопровождающие этот процесс. Нестационарность эта выражается в том, что в течение первых 300—500 мкс с начала впрыска идет формирование струи и стабилизируется кумулятивный механизм ее взаимодействия со средой, а в течение всего остального времени внутри тела факела непрерывно возникают разномасштабные неоднородности. Мелкомасштабные, очевидно, мало влияют на общий характер продвижения струи топливо-воздушной смеси, в то время как крупномасштабные, задаваемые как характером изменения давления в топливной системе, так и нарушениями устойчивости потока [2], несомненно определяют динамику развития топливного факела. С другой стороны, на течение топливо-воздушной струи влияет и состояние среды, в которую осуществляется впрыск, и, в частности, давление в рабочем объеме.

С помощью оптических методов изучение внутренней структуры топливного факела затруднено, так как он представляет собой образование, заполненное большим количеством мелких капелек жидкости, и оптически непрозрачен. Поэтому в настоящих экспериментах был использован рентгеноимпульсный метод по методике [2].

В данной работе представлены результаты качественного изучения особенностей развития топливного факела при впрыске жидкости в среду с избыточным давлением до 10 атм.

Эксперименты проводились на установке, общее описание которой представлено в [2]. Впрыск в рабочий объем смеси дизельного топлива и рентгеноконтрастных присадок (иодистого этила и иодистого бутила в пропорции 1 : 1 : 1) осуществлялся с помощью стандартной дизельной форсунки закрытого типа *1*, оснащенной однодырчатым распылителем с диаметром сопла 0,35 мм (фиг. 1). При этом эпюра давления в топливной системе носила стандартный характер — нарастание давления до 800—900 атм в течение 4 мс и спад в течение 2 мс.

Рабочий объем представлял собой толстостенный цилиндр с внутренним диаметром 150 мм, закрытый с торцов крышками, расстояние между которыми около 50 мм. В связи с тем что установка любого вида крышек для герметизации рабочего объема приводит к такому поглощению рентгеновского излучения, что проведение экспериментов оказывается невозможным, было выбрано следующее методическое решение. Фотопленка в кассете *2*, изготовленной из светонепроницаемой бумаги и защищенной