

3. Napolitano L. G., Golia C. Marangoni boundary layers. Applications of space developments: Selection Paper 31 st. International Astronaut. Congress, Tokyo, 1980 // Acta Astronautica.— 1981.— V. 8, N 5—6.
4. Pukhnachov V. V. Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers.— Dublin: Bool Press, 1982.
5. Кузнецов В. В. Термокапиллярная конвекция в ампуле в условиях невесомости // Тр. I Всесоюз. шк.-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды.— Красноярск, 1983.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН.— 1957.— Т. 12, № 5 (77).
7. Кузнецов В. В. О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 67.

Поступила 9/VI 1986 г.

УДК 532.526

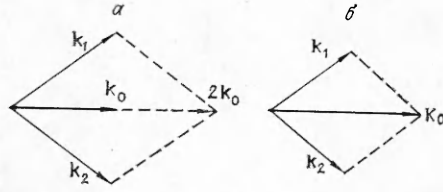
## НЕЛИНЕЙНЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛОЙ И ФОРМИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВИХРЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В. П. Реутов  
(Горький)

В последние годы в гидромеханике значительно возрос интерес к проблеме перехода от ламинарного течения к турбулентному [1—3]. Большое значение для объяснения процессов, протекающих при переходе к турбулентности в сдвиговых течениях, имеет анализ нелинейных структур, возникающих в результате развития гидродинамической неустойчивости. Эксперименты показывают, что в пристеночных течениях, таких как пограничный слой и течение Пуазейля, возникновение турбулентности связано с формированием  $\Lambda$ -вихрей, характеризующихся значительной продольной (по отношению к направлению течения) составляющей завихренности [4—9]. В [10] обращено внимание на родственную связь этих вихрей с крупномасштабными организованными структурами, наблюдающимися в пристеночной области развитого турбулентного течения.

Теория Бинни и Линя [11, 12] связывает осцилляции продольной завихренности в переходном течении с нарастанием в нем пар наклонных (трехмерных) волн, имеющих одинаковые фазовые скорости и продольные составляющие волновых векторов. Мгновенный профиль поперечной скорости, определенный в [12] в рамках линейного приближения, демонстрирует два реверса скорости за период волны, тогда как в экспериментах [5, 10] наблюдались последовательности профилей с одним реверсом, что соответствует прохождению через неподвижного наблюдателя одного вихревого образования за период волны. В данной работе исследуются существенно нелинейные вихревые структуры, возникающие в критическом слое (КС) ламинарного течения при резонансном взаимодействии нарастающих в нем двумерных и наклонных волн. Анализ строится в рамках асимптотического подхода, опирающегося на использование малости толщины КС. При этом нелинейность может быть большой лишь в пределах тонкого КС. До настоящего времени основное внимание уделялось изучению двумерных КС (см., например, [13—15]). Задача о структуре КС в случае одной наклонной волны также сводится к двумерной [13]. Предлагаемое ниже объяснение механизма формирования  $\Lambda$ -вихрей основывается на анализе динамики трехмерного нелинейного КС в идеальном течении.

Механизм возникновения волнового триплета, эвристически введенного Бинни и Линем, выяснен в [16]. Согласно [16], генерация наклонных волн обусловлена их резонансным взаимодействием с второй гармоникой двумерной волны, находящейся в синхронизме с этой волной. Диаграмма сложения волновых векторов при таком процессе показана на рис. 1,  $a$  ( $k_0$  и  $k_{1,2}$  — волновые векторы двумерной и наклонных волн соответственно). В случае одинаковых углов наклона между векторами  $k_{1,2}$  и  $k_0$  (симметричный триплет) из условий синхронизма следует равенство частот и фазовых скоростей волн  $k_{0,1,2}$  (оно достигается путем выбора угла между волновыми векторами двумерной и наклонных волн). В эксперименте зачастую возникает ситуация, когда собственная волна течения с волновым вектором  $2k_0$  сильно затухает. При этом условия синхронизма для генерации второй гармоники нарушаются и ее следует рассматривать как вынужденную волну. Возникает четырехволновой процесс, который описывается в третьем порядке теории возмущений по амплитудам волн. Поскольку амплитуда второй гармоники в данном случае мала, пульсации скорости и давления в потоке приближенно определяются волновым триплетом  $k_0, k_1, k_2$ , все волны которого имеют одинаковые частоты. В [17] теоретически рассматривалась возможность гене-



Р и с. 1

рации пары наклонных волн при их непосредственном резонансном взаимодействии с двумерной волной.

При симметричном расположении волновых векторов  $k_{1,2}$  относительно  $k_0$  частоты наклонных волн равны половине частоты двумерной волны. Сложение волновых векторов при таком «субгармоническом» взаимодействии показано на рис. 1, б. Экспериментальное доказательство реализации субгармонического взаимодействия в пограничном слое дано в

[18]. В [19] получены «тригармонические» автоколебательные режимы, соответствующие насыщению взрывной неустойчивости волновых триплетов в плоском канале. Упомянутые процессы основные при классическом и субгармоническом режимах разрушения ламинарного течения в пограничном слое [9, 18]. Классический (одночастотный) режим обычно возникает при больших значениях амплитуды двумерной волны, что можно объяснить меньшей эффективностью четырехволнового взаимодействия по сравнению с трехволновым при малых амплитудах волн.

При реализации в потоке одночастотного и субгармонического взаимодействия волн все они имеют одинаковую фазовую скорость и на профиле скорости течения  $U(y)$  возникает одна (общая для всех волн) резонансная точка  $y = y_c$  ( $U(y_c) = c$ ). Ниже рассматривается эволюция КС, возникающего в идеальном течении в малой окрестности сечения  $y = y_c$ . Приближение идеального течения позволяет сделать важные качественные заключения, относящиеся к процессам при наличии малой вязкости и, кроме того, представляет интерес в связи с его использованием при численном моделировании течений [20]. Амплитуды всех волн предполагаются постоянными. Учет медленной зависимости амплитуд от времени не отражается на виде уравнений для самого КС (см. аналогично [14]) и необходим при описании обратного воздействия КС на волны, которое в данной работе не рассматривается. При конечной вязкости и изменении амплитуд волн во времени можно ввести иерархию толщин КС [14]. Случаю нелинейного КС в идеальном течении соответствует преобладание нелинейной толщины КС. Отметим, что приближение тонкого КС оправдано при слабой неустойчивости, характерной в основном для пристеночных течений. В течениях с сильной неустойчивостью (например, в сдвиговом слое) уже на линейной стадии развития неустойчивости толщина КС, вычисленная по формуле для тонкого КС [14], оказывается сравнимой с масштабом сдвига скорости в первичном течении.

1. Воспользуемся безразмерной формой записи уравнений гидродинамики для идеальной несжимаемой жидкости (нормировки вводятся в обычном для теории устойчивости виде). Оси  $x, z$  декартовой системы координат направим вдоль и поперек течения, ось  $y$  — по нормали к плоскости течения. Представляя продольную компоненту вектора скорости  $v$  в виде  $v_1 = U(y) + \tilde{v}_1$ , получим

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \tilde{v}_2 \frac{dU}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} &= -\tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} - v_3 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial z} \equiv F_1, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + U \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\tilde{v}_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} - v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \equiv F_2, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + U \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} &= -\tilde{v}_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \equiv F_3, \\ \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

( $p$  — безразмерное давление). Введем малый параметр  $\epsilon$ , характеризующий порядковое значение амплитуды колебаний, и будем строить решение (1.1) в виде разложения по степеням  $\epsilon$ :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \epsilon \tilde{v}_1^{(1)} + \epsilon^2 \tilde{v}_1^{(2)} + \dots, \quad v_j = \epsilon v_j^{(1)} + \epsilon^2 v_j^{(2)} + \dots \quad (j = 2, 3), \\ p &= \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Для нелинейных членов в (1.1) получим соответственно  $F_j = \epsilon F_j^{(1)} + \epsilon^2 F_j^{(2)} + \dots$ . В силу преобразований Сквайра отыскание  $y$ -компоненты скорости в наклонной волне сводится к решению аналогичной задачи для двумерной волны с волновым числом  $\alpha_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — компоненты волнового вектора по осям  $x$  и  $z$ ). Задаваясь в первом прибли-

жении одним из триплетов волн, показанных на рис. 1, имеем

$$(1.3) \quad v_2^{(1)} = \sum_{\alpha, \beta} (A_{\pm} \varphi_{\alpha} + B_{\pm} \varphi_{\beta}) e^{i\theta} + \text{к.с.},$$

где  $\theta = \alpha(x - ct) + \beta z$ ;  $\varphi_{\alpha}$  и  $\varphi_{\beta}$  — функции Толлмина [13], образующие фундаментальную систему собственных функций уравнения Рэлея для двумерной волны с волновым числом  $\alpha_0$  и фазовой скоростью  $c$ ;  $A_{\pm}(\alpha, \beta)$  и  $B_{\pm}(\alpha, \beta)$  — постоянные; суммирование производится по значениям  $\alpha$  и  $\beta$ , отвечающим одному из волновых триплетов; индексы  $+$  и  $-$  относятся к областям  $y > y_c$  и  $y < y_c$ , находящимся по разные стороны от резонансной точки, в которой терпят разрыв производные  $\varphi_{\beta}$  по  $y$ . Будем обозначать символом  $\wedge$  амплитуды фурье-гармоник переменных:  $\widehat{v}_j = \langle v_j \exp(-i\theta) \rangle$  и т. п. ( $\langle \dots \rangle$  — среднее по пространственно-временным осцилляциям). Подставляя (1.3) в (1.2), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и выражая амплитуды  $\widehat{p}^{(l)}$ ,  $\widehat{v}_1^{(l)}$  и  $\widehat{v}_3^{(l)}$  через  $\widehat{v}_2^{(l)}$ , находим

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\widehat{v}_2}{dy} - \left( \alpha_0^2 + \frac{U''}{U-c} \right) \widehat{v}_2 &= \frac{1}{U-c} \left( \frac{i\alpha_0^2}{\alpha} \widehat{F}_2 - \frac{d\widehat{F}_1}{dy} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{d\widehat{F}_3}{dy} \right), \\ \widehat{p} &= \frac{\alpha}{i\alpha_0^2} \left[ (U-c) \frac{d\widehat{v}_2}{dy} - U' \widehat{v}_2 \right] + \frac{\alpha}{i\alpha_0^2} \left( \widehat{F}_1 + \frac{\beta}{\alpha} \widehat{F}_3 \right), \\ \widehat{v}_1 &= -\frac{1}{i\alpha_0^2 \alpha} \left( \alpha^2 \frac{d\widehat{v}_2}{dy} + \frac{\beta^2 U'}{U-c} \widehat{v}_2 \right) - \frac{\beta}{i\alpha_0^2 (U-c)} \left( \widehat{F}_3 - \frac{\beta}{\alpha} \widehat{F}_1 \right), \\ \widehat{v}_3 &= \frac{\beta}{i\alpha_0^2} \left( -\frac{d\widehat{v}_2}{dy} + \frac{U'}{U-c} \widehat{v}_2 \right) + \frac{\alpha}{i\alpha_0^2 (U-c)} \left( \widehat{F}_3 - \frac{\beta}{\alpha} \widehat{F}_1 \right), \end{aligned}$$

где штрихами показаны производные  $U$  по  $y$  и для краткости у всех амплитуд опущен верхний индекс  $(l)$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ . Последовательность преобразований при переходе от (1.1) к (1.4) легко восстанавливается по виду комбинаций  $\widehat{F}_j$  в правых частях (1.4). Поскольку  $F_j^{(1)} \equiv 0$ , при  $l = 1$  из (1.4) следуют результаты линейной теории. Используя соотношения (1.4) для гармоник с  $\alpha \neq 0$  и вытекающие непосредственно из (1.1) выражения для компонент с  $\alpha = 0$ , можно определить члены разложений (1.2) в явном виде.

Из (1.3), (1.4) видно, что вблизи от резонансной точки ( $y - y_c \rightarrow 0$ ) нелинейность уже нельзя учесть в рамках обычного метода возмущений по  $\varepsilon$ . В потоке возникает нелинейный КС с толщиной  $\sim \varepsilon^{1/2}$ . Определяя асимптотики двух первых членов в разложениях (1.2) при  $y - y_c \rightarrow 0$  и переходя в них к переменной КС  $Y = (y - y_c)/\varepsilon^{1/2}$ , получим разложения для амплитуд гармоник при  $Y \rightarrow \pm\infty$  (внешние разложения для КС):

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \widehat{p} &= \varepsilon B_{p\pm} + \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{1/2} C_{\pm} + O(\varepsilon^2), \\ \widehat{v}_2 &= \varepsilon \left[ -\frac{i\alpha_0^2}{\alpha U_c'} B_{p\pm} + O(1/Y^2) \right] + O(\varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon^{1/2}), \\ \widehat{v}_1 &= \varepsilon^{1/2} \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2 U_c' Y} B_{p\pm} + O(1/Y^3) \right] + O(\varepsilon \ln \varepsilon^{1/2}), \\ \widehat{v}_3 &= \varepsilon^{1/2} \left[ -\frac{\beta}{\alpha U_c' Y} B_{p\pm} + O(1/Y^3) \right] + O(\varepsilon \ln \varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Здесь  $B_{p\pm} = (i\alpha U_c' / \alpha_0^2) B_{\pm}$  — комплексная амплитуда давления в волне  $(\alpha, \beta)$  при  $y \rightarrow y_c \pm 0$  в единицах  $\varepsilon$ ;  $C_{\pm}$  — постоянные, которые выражаются через значения  $B_{p\pm}$  при различных  $\alpha$  и  $\beta$ . Оценки остаточных

членов в главной части разложений (1.5) для компонент скорости даны для случая субгармонического триплета.

Для описания нелинейного КС перейдем в (1.1) к переменным  $Y$ ,  $\xi = x - ct$  и «медленному» времени  $\tau = \varepsilon^{1/2}t$  ( $\xi$  — координата вниз по течению в системе отсчета, связанной с волнами; нормировка времени вводится из условия равенства по порядку величины нелинейных и нестационарных членов в уравнениях для КС). Используя разложение для скорости первичного течения в системе отсчета волн  $U - c = \varepsilon^{1/2}U'_c Y + \frac{1}{2}\varepsilon U''_c Y^2 + \dots$  и принимая во внимание (1.5), будем строить решение полученных уравнений:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} p &= \varepsilon P^{(0)} + \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{1/2} P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \dots, \\ v_2 &= \varepsilon V_2^{(0)} + \varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon^{1/2} V_2^{(1)} + \varepsilon^{3/2} V_2^{(2)} + \dots, \\ \tilde{v}_1 &= \varepsilon^{1/2} \tilde{V}_1^{(0)} + \varepsilon \ln \varepsilon^{1/2} \tilde{V}_1^{(1)} + \varepsilon \tilde{V}_1^{(2)} + \dots, \\ v_3 &= \varepsilon^{1/2} V_3^{(0)} + \varepsilon \ln \varepsilon^{1/2} V_3^{(1)} + \varepsilon V_3^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что переменная  $P^{(0)}$  удовлетворяет уравнению  $\partial P^{(0)}/\partial Y = 0$  и, следовательно, не зависит от  $Y$ . Из условия срачивания (1.6) с внешними разложениями (для амплитуд гармоник) получим  $B_{p+}(\alpha, \beta) = B_{p-}(\alpha, \beta) \equiv B_p$ . Это правило автоматически обеспечивает срачивание для переменной  $P^{(1)}$ , которая также удовлетворяет уравнению  $\partial P^{(1)}/\partial Y = 0$ . Выражение для  $P^{(0)}$  имеет вид

$$(1.7) \quad P^{(0)} = \sum_{\alpha, \beta} B_p(\alpha, \beta) e^{i\alpha\xi + i\beta z} + \text{к.с.}$$

Таким образом, поле давления в тонком КС определяется волновыми возмущениями, распространяющимися в основной части потока. Система уравнений, связывающих главные члены разложений (1.6), принимает вид

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}_1^{(0)}}{\partial \tau} + (U'_c Y + \tilde{V}_1^{(0)}) \frac{\partial \tilde{V}_1^{(0)}}{\partial \xi} + V_2^{(0)} \left( U'_c + \frac{\partial \tilde{V}_1^{(0)}}{\partial Y} \right) + V_3^{(0)} \frac{\partial V_1^{(0)}}{\partial z} &= - \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \tau} + (U'_c Y + \tilde{V}_1^{(0)}) \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi} + \tilde{V}_2^{(0)} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial Y} + \\ + V_2^{(0)} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial z} &= - \frac{\partial P^{(0)}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{V}_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2^{(0)}}{\partial Y} + \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Следуя общей схеме метода срачиваемых асимптотических разложений, необходимо найти решение (1.8), которое срачивается с главной частью разложений (1.5) при  $Y \rightarrow \pm\infty$ . Можно видеть, что такое решение является одновременно решением краевой задачи с граничными условиями  $\tilde{V}_1^{(0)} \rightarrow 0$ ,  $V_3^{(0)} \rightarrow 0$ ,  $V_2^{(0)} \rightarrow V_c^{(0)}$  при  $Y \rightarrow \pm\infty$ , где  $V_c^{(0)}$  — осцилляции  $y$ -компоненты скорости  $V_{(2)}$  в потоке со скоростью  $U'_c Y$  в приближении линейной теории ( $V_c^{(0)}$  совпадает с пределом  $v_2^{(1)}$  при  $y \rightarrow y_c$ ). Для построения асимптотик решения этой краевой задачи при больших  $|Y|$  положим  $Y = \eta/\mu$  и воспользуемся теорией возмущений по малому параметру  $\mu \ll 1$ . При возвращении от переменной  $\eta$  к  $Y$  ряды теории возмущений по параметру  $\mu$  дают разложения по  $1/Y$ , содержащиеся в главной части (1.5). Постановка краевой задачи для (1.8) позволяет говорить о резонансном возбуждении и развитии вихревых возмущений в однородно завихренном несжимаемом газе не взаимодействующих друг с другом частиц.

После введения полной продольной скорости течения в КС  $V_1^{(0)} = U'_c Y + \tilde{V}_1^{(0)}$  и перехода к переменным Лагранжа первые два уравне-

ния системы (1.8) переходят в замкнутую систему уравнений для «горизонтальной» (с компонентами в плоскости течения) составляющей движения индивидуальных частиц:

$$(1.9) \quad \frac{\partial V_1^{(0)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = V_1^{(0)}, \quad \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial z}, \quad \frac{dz}{d\tau} = V_3^{(0)}.$$

Ввиду отсутствия зависимости поля давления от  $Y$  и отсутствия самосогласованного давления горизонтальное движение жидких частиц автономно и подобно движению системы материальных точек в потенциале  $P^{(0)}(\xi, z)$ . Нормальная компонента скорости в КС определяется из уравнения непрерывности в системе (1.8).

Используя (1.6), можно написать разложения для завихренности  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ :  $\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon^{1/2} \omega_1^{(1)} + \dots$ ,  $\omega_3 = \omega_3^{(0)} + \varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon^{1/2} \omega_3^{(1)} + \dots$ ,  $\omega_2 = \varepsilon^{1/2} \omega_2^{(0)} + \varepsilon \ln \varepsilon^{1/2} \omega_2^{(1)} + \dots$ . При этом  $\omega_1^{(0)} = \partial V_3^{(0)} / \partial Y$ ,  $\omega_3^{(0)} = -\partial V_1^{(0)} / \partial Y$ ,  $\omega_2^{(0)} = \partial V_1^{(0)} / \partial z - \partial V_3^{(0)} / \partial \xi$ , т. е. связь между касательными к плоскости течения составляющими скорости и завихренности оказывается такой же, как для одномерного вихревого слоя. Из закона сохранения вихря следует связь распределения завихренности с относительным изменением длины материального элемента  $\delta l$ , лежащего на вихревой линии [21]:

$$(1.10) \quad \frac{\omega(\tau)}{|\omega(\tau_0)|} = \frac{\delta l(\tau)}{|\delta l(\tau_0)|}$$

( $\tau_0$  — момент начала движения). С учетом разложений для компонент  $\omega$  и координат индивидуальных частиц из (1.10) вытекает приближенное соотношение

$$(1.11) \quad \frac{\omega_{1,3}^{(0)}(\tau)}{\omega_h^{(0)}(\tau_0)} = \frac{\delta l_{1,3}(\tau)}{\delta l_h(\tau_0)},$$

где  $\omega_h^{(0)}(\tau_0) = \sqrt{\omega_1^{(0)2} + \omega_3^{(0)2}}|_{\tau=\tau_0}$ ;  $\delta l_h(\tau_0) = \sqrt{(\delta l_1)^2 + (\delta l_3)^2}|_{\tau=\tau_0}$ . Решая (1.9) для частиц, находящихся на одной вихревой линии, можно найти изменение проекции ее материальных элементов на плоскость  $\xi, z$  и с помощью (1.11) восстановить распределение горизонтальных компонент завихренности вдоль этой вихревой линии в любой момент времени  $\tau$ .

В двумерном случае ( $\partial/\partial z = 0$ ) краевая задача для КС имеет тривиальное решение, совпадающее с известным в теории двумерного КС [13, 14]:  $V_2^{(0)} = V_c^{(0)}$ ,  $V_1^{(0)} = U_c' Y$ ,  $V_3^{(0)} = 0$  ( $\omega_3^{(0)} = -U_c'$ ,  $\omega_{1,2}^{(0)} = 0$ ). При этом линии тока течения в КС имеют форму «кошачьих глаз». Нелинейная задача для одной наклонной волны также сводится к двумерной (аналогично см. [13]). При наличии пары наклонных волн возмущения завихренности  $\omega_{1,3}$  сравнимы с завихренностью первичного течения  $-U_c'$  и продольная скорость в системе отсчета, связанной с волнами, не совпадает с  $U_c' Y$ . Кроме того, в случае нелинейного КС первые два уравнения системы (1.8) определяют отличное от нуля производное дивергенции горизонтальной скорости:  $d/dt (\partial V_1^{(0)} / \partial \xi + \partial V_3^{(0)} / \partial z) \neq 0$ . В соответствии с уравнением непрерывности это приводит к изменению скорости  $V_2^{(0)}$  поперек КС. Нарастание отклонения  $V_2^{(0)}$  от  $V_c^{(0)}$  при подходе к резонансной точке прослеживается также в разложениях (1.5).

Для описания обратного воздействия возмущений завихренности в КС на эволюцию амплитуд волн необходимо найти скачок коэффициента  $A$  в (1.3), что приводит к задаче о сращивании разложений для  $v_2$  в порядке  $\varepsilon^{3/2}$ . Движение главного порядка с возмущениями завихренности в КС  $O(1)$  не дает скачков ни одной из компонент скорости при переходе через КС, и, следовательно, не возникают скачки волновых напряжений Рейнольдса, определяющих эволюцию амплитуд волн. Поэтому скорость

изменения амплитуд будет иметь такой же порядок по  $\varepsilon$ , как и в случае одной двумерной или одной наклонной волны.

2. Рассмотрим эволюцию вихревых линий в нелинейном КС при наличии в потоке одного из волновых триплетов, показанных на рис. 1. Будем считать, что в начальный момент  $\tau_0 = 0$  возмущения горизонтальной скорости в области резонанса  $|Y| \ll 1$  отсутствуют:  $V_1^{(0)} = U'_c Y$ ,  $V_3^{(0)} = 0$ . При этом вихревые линии, определяемые полем завихренности  $\omega^0$ , имеют вид прямых, вытянутых поперек течения, и в выражении (1.11) следует положить  $|\omega^{(0)}(0)| = U'_c$  и  $|\delta l(0)| = |\delta l_3(0)|$ . Распределение давления в КС представим как  $P^{(0)} = s_1 \cos(\alpha\xi - \beta z) + s_2 \cos(\alpha\xi + \beta z) + s_0 \cos(K\alpha\xi + \Delta)$ , где  $s_j = |2B_p(\alpha_j, \beta_j)|$  — амплитуды волн,  $\Delta$  — фазовый сдвиг (фазы наклонных волн всегда можно исключить путем изменения начала отсчета по осям  $\xi$  и  $z$ );  $K = 1$  соответствует одночастотному триплету,  $K = 2$  — субгармоническому (см. рис. 1, а, б). Введем для решения системы (1.9) нормированные переменные

$$(2.1) \quad \tau_N = (\Omega/2\pi)\tau, \quad \xi_N = \alpha\xi/2\pi, \quad z_N = \alpha z/2\pi, \\ u = U'_c dV_1^{(0)}, \quad w = U'_c dV_3^{(0)},$$

где  $\Omega = \alpha \sqrt{2s_1 + s_0}$  — характерная частота малых колебаний захваченных частиц;  $d = \sqrt{2s_1 + s_0}/U'_c$  — характерный размер области захвата по  $Y$ , который находится при замене  $V_2^{(0)}$  его предельным значением  $V_c^{(0)}$ . Подставляя (2.1) в (1.9) и опуская индекс  $N$  у переменных  $\tau_N$ ,  $\xi_N$ ,  $z_N$ , получим

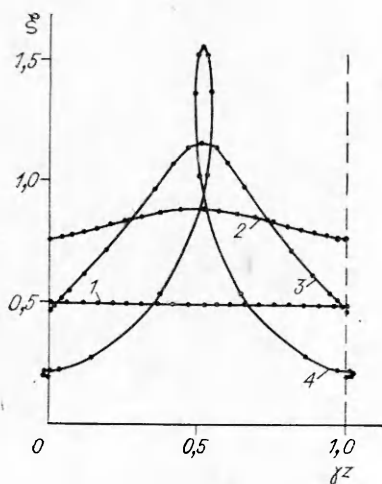
$$(2.2) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi}, \\ dz/d\tau = w, \quad dw/d\tau = -\partial P/\partial z,$$

$$P(\xi, z) = e \cos(2\pi\xi) \cos(2\pi\gamma z) + (1 - e) \cos(2\pi K\xi + \Delta).$$

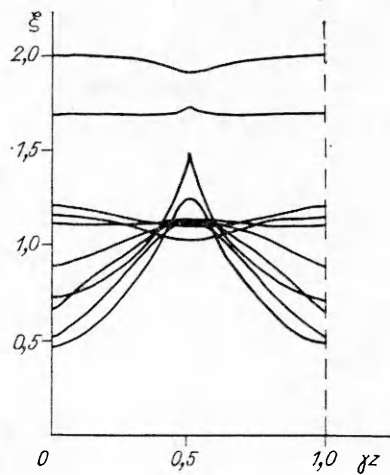
Здесь  $\gamma = \beta/\alpha$  — тангенс угла наклона косых волн;  $e = 2s_1/(2s_1 + s_0)$ .

Система (2.2) имеет интеграл энергии  $u^2/2 + w^2/2 + P(\xi, z) = E$ . Каждая линия уровня потенциала  $P = E$  есть граница области захвата на плоскости  $\xi, z$  для частицы с энергией  $E$  (запрещено движение при  $P > E$ ). Будем следить за частицами, расположенными при  $\tau = 0$  на какой-либо вихревой линии невозмущенного течения:  $u(0) = Y(0)/d = \text{const}$ ,  $\xi(0) = \text{const}$ ,  $w(0) = 0$  ( $z(0)$  — параметр). Любое решение (2.2) с такими начальными условиями инвариантно относительно преобразований  $\gamma z \rightarrow \gamma z + 1$  и  $\xi \rightarrow \xi + 1$  либо относительно двойной замены  $\gamma z \rightarrow n - \gamma z$ ,  $w \rightarrow -w$  ( $n$  — целое), что отвечает периодической повторяемости траекторий по  $\xi, z$  и их зеркальной симметрии относительно линий  $\gamma z = n - 1/2$ . Поэтому достаточно построить траектории частиц, находящихся при  $\tau = 0$  в пределах одного периода по  $\xi$  и  $z$ . Начальное расположение вихревой линии задает неоднородное по  $z$  распределение энергии частиц. При этом на одной вихревой линии могут оказаться «захваченные» и «пролетные» частицы, совершающие соответственно финитное и инфинитное движение в направлении течения  $\xi$ .

На такой вихревой линии будет происходить растяжение материальных элементов и их разворот в направлении течения, что, согласно (1.11), приводит к появлению большой продольной завихренности. Условие разбегания частиц на одной вихревой линии можно получить из анализа движения частиц с координатами  $\gamma z(0) = n$ ,  $n - 1/2$ , которые перемещаются на плоскости  $\xi, z$  вдоль прямых  $z = \text{const} = z(0)$  ( $w \equiv 0$ ). Границы областей захвата для этих частиц на плоскости  $(u^2(0), \xi)$  определяются выражением вида  $(1/2)u^2(0) = \max_{\xi} [P(\xi, z(0))] - P(\xi, z(0))$ . В случае одночастотного триплета ( $K = 1$ ) при  $\Delta = 0$ ,  $e < 0,5$  взаимное расположение этих границ таково, что разбегание частиц на линиях



Р и с. 2



Р и с. 3

$\gamma z = n, n - 1/2$  при любых  $\xi(0)$  происходит с уходом на бесконечность тех частиц, которые находятся на линиях  $\gamma z = n - 1/2$ .

Движение частиц на одной из таких вихревых линий показано на рис. 2 ( $\gamma = 1, e = 0,3, u(0) = 1,5$ , кривые 1—4 отвечают моментам времени, сдвинутым на  $\Delta\tau \approx 0,31$ ). Видно, что растяжение материальных элементов приводит к образованию  $\Lambda$ -образного излома, на склонах которого возникает большая продольная завихренность с противоположными знаками. При пересечении частицами плоскостей симметрии  $\gamma z = n, n - 1/2$ , на которых  $w = 0$ , на вихревых линиях возникают петли. Условие непроницаемости этих плоскостей не нарушается, так как имеется симметричный исходному встречный поток частиц из смежных областей, который позволяет отождествить пересечение плоскостей симметрии с упругим отражением падающих на них частиц.

На рис. 3 представлены 10 вихревых линий в момент  $\tau = 0,65$ , которые при  $\tau = 0$  находились в сечениях  $\xi = 0,1(l - 1)$  ( $l = 1-10$ ) на одном уровне по  $Y$  ( $u(0) = 1,5$ ). Этот рисунок показывает, что концентрация продольной завихренности происходит за счет линий, на которых выполняется условие разбегания жидких частиц. Приведенные на рис. 2 и 3 отрезки вихревых линий следует продолжить периодически, сдвигая начало координат в направлении осей  $\xi$  и  $\gamma z$  с периодом, равным единице. При  $\Delta \neq 0$  или  $e > 0,5$  на вихревых линиях с различными  $\xi(0)$  головки изломов могут находиться также на прямых  $\gamma z = n$ . Экспериментальным данным в большей степени отвечает картина линий с изломами одного типа, возникающая при  $\Delta = 0, e < 0,5$  [4, 9]. Условие  $\Delta = 0$  может рассматриваться как результат синхронизации двумерной и наклонных волн при образовании нелинейной вихревой структуры в КС. Решения (2.2) при  $\Delta = 0$  инвариантны относительно замены  $x \rightarrow -x, u \rightarrow -u$ . Поэтому на вихревых линиях, находящихся при  $\tau = 0$  под слоем совпадения ( $u(0) < 0$ ) возникают  $\Lambda$ -образные изломы, направленные против течения. Оба типа изломов на вихревых линиях получены также в [20] при прямом численном моделировании идеального пристеночного течения с помощью системы вихревых нитей.

В случае субгармонического триплета ( $K = 2$ ) свойство периодичности расположения траекторий с периодом субгармоники дополняется свойством симметрии шахматного типа (решения (2.2) инвариантны относительно замены  $\gamma z \rightarrow \gamma z + 1/2, \xi \rightarrow \xi + 1/2$ ). Анализ экспериментальных данных, приведенных в [18], дает значение  $\Delta \approx \pi$ . Движение частиц на отрезке одной вихревой линии при  $\Delta = \pi$  показано на рис. 4 ( $\gamma = 1, e = 0,5, u(0) = 1,1$ ; кривые 1—4 соответствуют моментам, сдвинутым на  $\Delta\tau = 0,22$ ). Полученную картину следует продолжить пери-

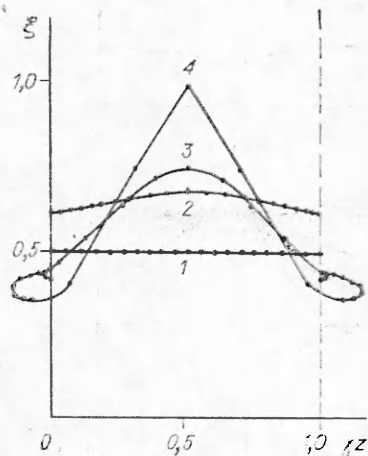


Рис. 4

одически, сдвигая начало координат в направлении осей  $\xi$  и  $\zeta$  с периодом 1. Кроме того, учитывая шахматную симметрию в расположении траекторий частиц, эту картину можно продолжить путем смещения начала координат по осям  $\xi$  и  $\zeta$  на  $1/2$  одновременно. Таким образом, для субгармонического взаимодействия характерен шахматный порядок следования  $\Lambda$ -образных изломов.

Полученные результаты для КС в идеальном течении можно связать с установлением стационарного (или квазистационарного) КС при взаимодействии волн в вязком течении. Эта связь относится к случаю достаточно больших амплитуд волн, когда масштаб нелинейного КС превышает толщину линейного вязкого КС [14]. Неоднородное растяжение

материальных элементов вихревых линий приводит к росту градиентов завихренности поперек КС и вступлению в игру сил вязкого трения. Естественно предположить, что в КС возникает вихревая структура, качественно сходная с невязкой на том этапе ее развития, когда вязкие члены в уравнениях КС становятся одного порядка с невязками. Эти соображения подтверждаются результатами решения невязкой и стационарной вязкой задачи для двумерного КС [14, 15].

Из приведенного анализа видно, что концентрация завихренности в продольных вихрях обусловлена растяжением материальных элементов на вихревых линиях в неоднородном поперек течения поле давления, возникающем при резонансном взаимодействии двумерной волны с парой наклонных. Теория объясняет некоторые закономерности, наблюдаемые в экспериментах по визуализации течений в переходной области [6—9]. Так, продольная завихренность имеет противоположные знаки на соседних склонах  $\Lambda$ -вихрей; в случае одночастотного волнового триплета вихри выстраиваются последовательно и возможен отрыв головки вихря на заключительной стадии его развития (см. рис. 2); при субгармоническом типе перехода вихри выстраиваются в шахматном порядке и отрыв головки отсутствует (см. рис. 4). В то же время теория предсказывает образование обратных вихрей, лежащих ниже слоя совпадения, которые в экспериментах не наблюдались. Сравнение с результатами [20] позволяет заключить, что появление обратных вихрей есть результат использования идеальной модели течения. При амплитудах волн, соответствующих формированию сильнонелинейного КС, область захваченных частиц расширяется практически до стенки [15]. Можно предположить, что отсутствие обратных вихрей связано с вязким характером течения вблизи стенки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бетчов Р. Переход // Турбулентность. Принципы и применения.— М.: Мир, 1980.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое.— Новосибирск: Наука, 1982.
3. Маслоу С. А. Неустойчивость и переход в сдвиговых течениях // Гидродинамическая неустойчивость и переход к турбулентности.— М.: Мир, 1984.
4. Noma R. F. On transition from laminar to turbulent flow // J. Appl. Phys.— 1957.— V. 28, N 4.
5. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three dimensional nature of boundary-layer instability // J. Fluid Mech.— 1962.— V. 12, pt 1.
6. Knapp C. F., Roache P. J. A combined visual and hotwire anemometer investigation of boundary-layer transition // AIAA J.— 1968.— V. 6, N 1.
7. Козлов В. В., Рамазанов М. П. Резонансное взаимодействие возмущений в течении Пуазейля // ДАН СССР.— 1984.— Т. 275, № 6.



8. Thomas A. S. W. The control of boundary-layer transition using a wave-superposition principle // *J. Fluid Mech.*— 1983.— V. 137.
9. Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С. Образование трехмерных структур при переходе к турбулентности в пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1984.— № 6.
10. Blackwelder R. F. Analogies between transitional and turbulent boundary layers // *Phys. Fluids.*— 1983.— V. 26, N 10.
11. Benney D. J., Lin C. C. On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow // *Phys. Fluids.*— 1960.— V. 3, N 4.
12. Benney D. J. Finite amplitude effects in an unstable laminar boundary layer // *Phys. Fluids.*— 1964.— V. 7, N 3.
13. Benney D. J., Bergeron R. F. A new class of nonlinear waves in parallel flows // *Stud. Appl. Math.*— 1969.— V. 48, N 3.
14. Реутов В. П. Нестационарный критический слой и нелинейная стадия неустойчивости в плоском течении Пуазейля // *ПМТФ.*— 1982.— № 4.
15. Реутов В. П. Нелинейные волны и стабилизация двумерной неустойчивости в пограничном слое // *ПМТФ.*— 1985.— № 4.
16. Craik A. D. Nonlinear resonant instability in boundary layers // *J. Fluid Mech.*— 1971.— V. 50, pt 2.
17. Володин А. Г., Зельман М. Б. Трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1978.— № 5.
18. Качанов Ю. В., Левченко В. Я. Резонансное взаимодействие возмущений при переходе к турбулентности в пограничном слое // *Препринт № 10-82.*— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
19. Гольдштик М. А., Лифшиц А. М., Штери В. Н. Число Рейнольдса перехода в плоском канале // *ДАН СССР.*— 1983.— Т. 273, № 1.
20. Leonard A. Vortex simulation of three-dimensional spotlike disturbances in a laminar boundary layer // *Turbulent shear flows.*— Berlin: Springer, 1980.— V. 2.
21. Бэтчелор Дж. Введение в механику жидкости.— М.: Мир, 1973.

*Поступила 16/VI 1986 г.*

УДК 532.527 + 551.515.3

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СМЕРЧА

*В. Г. Макаренко, В. Ф. Тарасов*

*(Новосибирск)*

В работе представлены результаты экспериментального исследования движения жидкости, заполняющей вращающийся с постоянной угловой скоростью цилиндрический сосуд, часть внутренней поверхности которого колеблется заданным образом. Установлено, что при определенных условиях в жидкости образуется система вихрей. Основные свойства этих вихрей — колебательный характер движения жидкости в них и высокий уровень завихренности, значительно превышающий удвоенную угловую скорость вращения сосуда. При постановке экспериментов существенным образом были использованы данные [1, 2], где в линейном приближении приведены сведения о собственных колебаниях твердотельно вращающегося цилиндрического столба жидкости. Обнаружено, что свойства лабораторных вихрей аналогичны известным свойствам природных атмосферных вихрей — смерчей. Установленная аналогия позволяет дать объяснение многочисленным фактам, обусловленным прохождением смерча.

1. Опыты проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Прозрачный вертикальный цилиндрический сосуд *I*, в котором находилась жидкость, вращался с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Движение первоначально твердотельно вращавшейся жидкости возмущалось посредством генератора *2*, состоявшего из диска, либо кольца, либо из диска и кольца. Поверхность жидкости *3* между дисками, кольцами и боковой поверхностью сосуда свободная. Диски и кольца вращались вместе с сосудом и в окрестности свободной поверхности жидкости совершали гармонические вертикальные колебания с частотой  $\omega_r = \omega$ . Данным способом в жидкости возбуждались осесимметричные инерционные волны (нулевая гармоника по азимутальной координате). Использовался резонансный режим возбуждения волн, который позволял выделить нужную моду и давал возможность получить волны большой амплитуды. Для обеспечения резонанса уровень жидкости в сосуде выбирался так, чтобы при заданной частоте колебаний генератора высота столба жидкости равнялась целому числу *N* полуволн исследуемой моды. Края дисков и колец генератора двигались по цилиндрическим поверх-