

УДК 532.517.4, 517.957

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА БУКСИРУЕМЫМ ТЕЛОМ В ПАССИВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

О. В. Капцов, А. В. Фомина*, Г. Г. Черных**, А. В. Шмидт

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660041 Красноярск

* Кузбасская государственная педагогическая академия, 654066 Новокузнецк

** Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: kaptsov@icm.krasn.ru, fav@rdtc.ru, chernykh@ict.nsc.ru, schmidt@icm.krasn.ru

Рассматривается математическая модель дальнего турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде, основанная на известной полуэмпирической $(e-\varepsilon)$ -модели турбулентности. Выполнен теоретико-групповой анализ исследуемой модели. С помощью метода В-определяющих уравнений осуществлена редукция модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно. Проведено сопоставление полученного решения с автомоделным решением, найденным путем непосредственного численного интегрирования дифференциальных уравнений модели на больших расстояниях от тела.

Ключевые слова: математическая модель дальнего турбулентного следа, буксируемое тело вращения, пассивно стратифицированная среда, $(e-\varepsilon)$ -модель турбулентности, теоретико-групповой анализ, метод В-определяющих уравнений, автомоделное вырождение.

Введение. Турбулентные следы за телами вращения в устойчиво стратифицированных жидкостях рассматривались в ряде работ (см., например, работы [1–9] и библиографию к ним). С использованием различных моделей турбулентности (иерархии математических моделей) изучались следы как за буксируемыми, так и за самодвижущимися телами. Представляет интерес исследование течения в следе за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде, когда жидкость остается неоднородной, а влиянием силы тяжести можно пренебречь. Турбулентные следы в пассивно стратифицированной жидкости рассматривались в работах [1, 2, 4, 5, 7, 8]. Наиболее подробный численный анализ безымпурсного следа в пассивно стратифицированной среде выполнен в [7].

Анализ работ о пространственных турбулентных следах в пассивно стратифицированной жидкости показал, что отсутствуют известные авторам результаты теоретико-группового анализа полуэмпирических моделей следов и исследования на его основе автомоделности вырождения дальних следов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00435-а, 11-01-09368-моб.з) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (гранты № НШ-544.2012.1, НШ-6293.2012.9), а также в рамках совместного Интеграционного проекта СО РАН, ДВО РАН, УрО РАН № 103.

© Капцов О. В., Фомина А. В., Черных Г. Г., Шмидт А. В., 2012

Теоретико-групповой анализ ряда полуэмпирических моделей дальних турбулентных следов выполнен в [10–12]. В настоящей работе с использованием простейшей $(e-\varepsilon)$ -модели турбулентности рассмотрена задача о вырождении дальнего турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде.

1. Постановка задачи. Для описания течения в дальнем турбулентном следе за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде используется простейшая математическая модель, основанная на классической $(e-\varepsilon)$ -модели турбулентности:

$$U_0 \frac{\partial U_d}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_u \frac{\partial U_d}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_u \frac{\partial U_d}{\partial z}; \quad (1)$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_e \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_e \frac{\partial e}{\partial z} + P - \varepsilon; \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}; \quad (3)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_\rho \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_\rho \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} + \frac{d\rho_s}{dz} \frac{\partial K_\rho}{\partial z}; \quad (4)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_{1\rho} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{1\rho} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial z} + 2K_\rho \left[\left(\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)^2 \right] - c_T \frac{\langle \rho'^2 \rangle \varepsilon}{e}. \quad (5)$$

Здесь U_0 — скорость набегающего невозмущенного потока; $U_d = U_0 - U$ — дефект осредненной продольной компоненты скорости; $\langle \rho_1 \rangle$ — осредненный дефект плотности $\rho_1 = \rho - \rho_s$; $\rho_s = \rho_s(z)$ — плотность невозмущенной жидкости, которая полагается линейной: $\rho_s(z) = \rho_0(1 - az)$, $a = \text{const} > 0$; штрихом отмечены пульсационные составляющие; $\langle \rho'^2 \rangle$ — дисперсия флуктуаций плотности; e — энергия турбулентности; ε — скорость диссипации; слагаемые, содержащие коэффициенты молекулярной вязкости и диффузии, опущены вследствие их предполагаемой малости. Коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии определяются следующим образом:

$$K_u = K_e = c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad K_\varepsilon = \frac{K_e}{\sigma}, \quad K_\rho = c_\rho \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad K_{1\rho} = c_{1\rho} \frac{e^2}{\varepsilon}.$$

Величина P в уравнениях баланса энергии турбулентности и переноса скорости диссипации определяется формулой

$$P = K_u \left[\left(\frac{\partial U_d}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_d}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Величины $c_\mu = 0,09$, $\sigma = 1,3$, $c_\rho = 0,208$, $c_{1\rho} = 0,087$, $c_T = 1,25$, $c_{\varepsilon 1} = 1,44$, $c_{\varepsilon 2} = 1,92$ — известные эмпирические постоянные.

В выбранной системе координат переменная x играет роль времени. На расстоянии $x = x_0$ от тела задавались следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} e(x_0, y, z) &= \Phi_1(r), & \varepsilon(x_0, y, z) &= \Phi_2(r), & U_d(x_0, y, z) &= \Phi_3(r), \\ r^2 &= y^2 + z^2, & 0 &< r < \infty, \\ \langle \rho_1 \rangle &= \langle \rho'^2 \rangle = 0, & -\infty &< y < \infty, & -\infty &< z < \infty, & x &= x_0. \end{aligned}$$

Функции $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$, $\Phi_3(r)$ — финитные колоколообразные функции, согласующиеся с экспериментальными данными об эволюции турбулентного следа в однородной жидкости [3]. При $r^2 = y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ ставились условия $U_d = e = \varepsilon = \langle \rho_1 \rangle = \langle \rho'^2 \rangle = 0$, $x \geq x_0$.

При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие условию $r \rightarrow \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника. Вследствие симметрии задачи решение отыскивается в первом квадранте плоскости (y, z) . На осях симметрии ставились следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_d}{\partial y} = \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z \geq 0, \\ \frac{\partial U_d}{\partial z} = \langle \rho_1 \rangle = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Переменные задачи могут быть обезразмерены с использованием характерных масштабов длины D (диаметр тела), скорости U_0 и плотности $aD\rho_0$. Целесообразно также ввести в рассмотрение время после прохода тела $t = x/U_0$. В дальнейшем безразмерные величины будем обозначать так же, как размерные; t обозначим через x .

2. Конечно-разностный алгоритм решения задачи. Алгоритм решения задачи сводится к последовательному интегрированию системы уравнений (1)–(5) на каждом слое по x , играющем роль времени. В качестве примера приведем конечно-разностный аналог уравнения (1). В системе координат $x' = x$, $\xi = \chi_1(y)$, $\eta = \chi_2(z)$ уравнение (1) (как и другие уравнения математической модели) записывается в виде

$$\frac{\partial U_d}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{z_\eta}{y_\xi} K_u \frac{\partial U_d}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_\xi}{z_\eta} K_u \frac{\partial U_d}{\partial \eta} \right).$$

Здесь $J = \partial(x, y, z)/\partial(x', \xi, \eta) = (\partial y/\partial \xi)(\partial z/\partial \eta) = y_\xi z_\eta$ — якобиан преобразования, осуществляющего переход от переменных x, y, z к переменным x', ξ, η ; z_η, y_ξ — производные по переменным η, ξ соответственно. Применяемая неявная схема расщепления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{(U_d)_{i,j}^{n+1/2} - (U_d)_{i,j}^n}{h_x} &= \\ &= \frac{1}{J_{i,j}} \frac{(\hat{K}_u^n)_{i+1/2,j}((U_d)_{i+1,j}^{n+1/2} - (U_d)_{i,j}^{n+1/2}) - (\hat{K}_u^n)_{i-1/2,j}((U_d)_{i,j}^{n+1/2} - (U_d)_{i-1,j}^{n+1/2})}{h_\xi^2}, \\ \frac{(U_d)_{i,j}^{n+1} - (U_d)_{i,j}^{n+1/2}}{h_x} &= \\ &= \frac{1}{J_{i,j}} \frac{(\hat{K}_u^n)_{i,j+1/2}((U_d)_{i,j+1}^{n+1} - (U_d)_{i,j}^{n+1}) - (\hat{K}_u^n)_{i,j-1/2}((U_d)_{i,j}^{n+1} - (U_d)_{i,j-1}^{n+1})}{h_\eta^2}, \\ \hat{K}_u &= \frac{z_\eta}{y_\xi} K_u, \quad (\hat{K}_u)_{i\pm 1/2,j} = \frac{(\hat{K}_u)_{i\pm 1,j} + (\hat{K}_u)_{i,j}}{2}, \quad (\hat{K}_u)_{i,j\pm 1/2} = \frac{(\hat{K}_u)_{i,j\pm 1} + (\hat{K}_u)_{i,j}}{2}, \\ (z_\eta)_{i,j+1/2} &= \frac{z_{j+1} - z_j}{h_\eta}, \quad (y_\xi)_{i+1/2,j} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\xi}. \end{aligned}$$

Конечно-разностные уравнения решаются последовательно с использованием метода прогонки.

Тестирование алгоритма осуществлялось путем сравнения результатов расчетов на последовательно измельчающихся сетках характеристик турбулентного следа с результатами решения задачи о следе за буксируемым телом в однородной жидкости в одномерной постановке (результаты тестирования подробно изложены в [9]).

Целью настоящей работы является получение автомодельного решения задачи о вырождении турбулентного следа на больших расстояниях от тела (больших временах вырождения). С учетом заданных выше начальных условий проводился численный эксперимент, в ходе которого анализировалась возможность автомодельного представления решения. Затем это решение сравнивалось с решением, полученным на основе теоретико-группового анализа.

3. Теоретико-групповой анализ модели. Стандартными методами [13] находим базис алгебры Ли системы (1)–(5):

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial U_d}, \\ X_5 &= \frac{\partial}{\partial \langle \rho_1 \rangle}, & X_6 &= -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial \langle \rho_1 \rangle}, \\ X_7 &= x \frac{\partial}{\partial x} - U_d \frac{\partial}{\partial U_d} - 2e \frac{\partial}{\partial e} - 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, & X_8 &= (\langle \rho_1 \rangle - z) \frac{\partial}{\partial \langle \rho_1 \rangle} + 2\langle \rho'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \langle \rho'^2 \rangle}, \\ X_9 &= y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + U_d \frac{\partial}{\partial U_d} + 2e \frac{\partial}{\partial e} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \langle \rho_1 \rangle \frac{\partial}{\partial \langle \rho_1 \rangle} + 2\langle \rho'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \langle \rho'^2 \rangle}. \end{aligned}$$

Поскольку в дальнейшем турбулентном следе в пассивно стратифицированной среде в численных экспериментах наблюдаются автомодельные режимы, представляют интерес автомодельные решения системы (1)–(5). Рассмотрим линейную комбинацию операторов X_7, X_9

$$\begin{aligned} Z &= x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha z \frac{\partial}{\partial z} + (\alpha - 1)U_d \frac{\partial}{\partial U_d} + 2(\alpha - 1)e \frac{\partial}{\partial e} + (2\alpha - 3)\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \\ &\quad + \alpha \langle \rho_1 \rangle \frac{\partial}{\partial \langle \rho_1 \rangle} + 2\alpha \langle \rho'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \langle \rho'^2 \rangle}, \end{aligned}$$

где α — произвольная постоянная. Решение системы (1)–(5), инвариантное относительно преобразования, порожденного оператором Z , имеет вид

$$\begin{aligned} U_d &= x^{\alpha-1}U(\xi, \eta), & e &= x^{2\alpha-2}E(\xi, \eta), & \varepsilon &= x^{2\alpha-3}G(\xi, \eta), \\ \langle \rho_1 \rangle &= x^\alpha H(\xi, \eta), & \langle \rho'^2 \rangle &= x^{2\alpha}R(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi = y/x^\alpha, \eta = z/x^\alpha$ — автомодельные переменные.

Исходя из физических соображений функции U, E, G должны быть симметричны относительно оси следа:

$$U(\xi, \eta) = U(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \quad E(\xi, \eta) = E(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \quad G(\xi, \eta) = G(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}). \quad (7)$$

Подставляя представления (6), (7) в уравнения (1)–(5) и переходя к полярным координатам $\xi = r \cos \varphi, \eta = r \sin \varphi$, получаем редуцированную систему, первые три уравнения которой являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Остальные уравнения редуцированной системы имеют вид

$$\begin{aligned} C_\rho \frac{E^2}{G} \left(H_{rr} + \frac{H_{\varphi\varphi}}{r^2} \right) + C_\rho \frac{EH_r}{G} \left(2E' - \frac{EG'}{G} + \frac{E}{r} \right) + \\ + \alpha r H_r - \alpha H + C_\rho \sin \varphi \frac{E}{G} \left(\frac{EG'}{G} - 2E' \right) = 0, \end{aligned}$$

$$C_{\rho 1} \frac{E^2}{G} \left(R_{rr} + \frac{R_{\varphi\varphi}}{r^2} \right) + C_{\rho 1} \frac{ER_r}{G} \left(2E' - \frac{EG'}{G} + \frac{E}{r} \right) + \alpha r R_r - \left(C_T \frac{G}{E} + 2\alpha \right) R + \quad (8)$$

$$+ 2C_{\rho} \frac{E^2}{G} \left(H_r^2 + \frac{H_{\varphi}^2}{r^2} - 2 \sin \varphi H_r - 2 \cos \varphi \frac{H_{\varphi}}{r} + 1 \right) = 0,$$

где $E = E(r)$; $G = G(r)$; $H = H(r, \varphi)$; $R = R(r, \varphi)$.

При интегрировании уравнений (8) использовался метод В-определяющих уравнений [14], процедура решения которых практически не отличается от решения классических определяющих уравнений [13]. В-определяющее уравнение, соответствующее уравнениям (8), выбрано в виде

$$D_{\varphi}^2 h + r^2 D_r^2 h + b_1(r, \varphi) D_r h + b_2(r, \varphi) h = 0, \quad (9)$$

где D_{φ} , D_r — операторы полного дифференцирования по переменным φ , r соответственно; b_1 , b_2 — произвольные функции, которые находятся в процессе решения.

Приравнивая к нулю найденные решения уравнения (9), получаем дифференциальные связи

$$H_{\varphi\varphi} + \operatorname{tg} \varphi H_{\varphi} = 0, \quad R_{\varphi\varphi} - 2 \operatorname{ctg} (2\varphi) R_{\varphi} = 0,$$

интегрируя которые, с учетом (6), (7) находим представление

$$U_d = x^{\alpha-1} U(\sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}), \quad e = x^{2\alpha-2} E(\sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}), \quad \varepsilon = x^{2\alpha-3} G(\sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}),$$

$$\langle \rho_1 \rangle = z H(\sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}), \quad \langle \rho'^2 \rangle = z^2 R_1(\sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}) + x^{2\alpha} R_2(\sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}),$$

позволяющее редуцировать исходную модель (1)–(5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C_{\mu} \frac{E^2 U''}{G} + C_{\mu} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + \frac{E^2}{\tau G} \right) U' + \alpha \tau U' - (\alpha - 1) U = 0,$$

$$C_{\mu} \frac{E^2 E''}{G} + C_{\mu} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + \frac{E^2}{\tau G} \right) E' + \alpha \tau E' - 2(\alpha - 1) E + G + C_{\mu} \frac{E^2 U'^2}{G} = 0,$$

$$\frac{C_{\mu}}{\sigma} \frac{E^2 G''}{G} + \frac{C_{\mu}}{\sigma} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + \frac{E^2}{\tau G} \right) G' + \alpha \tau G' - (2\alpha - 3) G + \frac{C_{\varepsilon 2} G^2}{E} + C_{\mu} C_{\varepsilon 1} E U'^2 = 0,$$

$$C_{\rho} \frac{E^2 H''}{G} + C_{\rho} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + 3 \frac{E^2}{\tau G} \right) H' + \alpha \tau H' + C_{\rho} \frac{H - 1}{\tau} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} \right) = 0,$$

$$C_{1\rho} \frac{E^2 R_1''}{G} + C_{1\rho} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + 5 \frac{E^2}{\tau G} \right) R_1' + \alpha \tau R_1' + 2C_{\rho} \left(\frac{2(H - 1)}{\tau} + H' \right) H' + \quad (10)$$

$$+ \frac{2C_{1\rho}}{\tau} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + \frac{C_T \tau G}{2C_{1\rho} E} \right) R_1 = 0,$$

$$C_{1\rho} \frac{E^2 R_2''}{G} + C_{1\rho} \left(2 \frac{EE'}{G} - \frac{E^2 G'}{G^2} + \frac{E^2}{\tau G} \right) R_2' + \alpha \tau R_2' - \left(C_T \frac{G}{E} + 2\alpha \right) R_2 +$$

$$+ 2C_{1\rho} \frac{E^2 R_1}{G} + 2C_{\rho} \frac{E^2}{G} (H - 1)^2 = 0,$$

где $\tau = \sqrt{y^2 + z^2}/x^{\alpha}$.

Заметим, что в плоском и осесимметричном случаях система уравнений (1)–(3) изучалась в работе [11], в которой с помощью закона сохранения определено значение показателя $\alpha = 1/3$ для осесимметричного случая, совпадающее с полученным ранее (см., например, работу [15] и библиографию к ней).

4. Результаты расчетов. На рисунке представлены автомодельные профили функций, полученные путем решения задачи в исходной постановке в соответствии с конечно-разностным алгоритмом. В работах, посвященных численному моделированию дальних турбулентных следов, через $L_{1/2}$ принято обозначать полуширину этих следов, характеризующую закон расширения турбулентного следа в дальних областях. На основе расчетов по модели (1)–(5) характерная полуширина в рассматриваемой задаче определяется по формуле $L_{1/2} = 0,214x^{1/3}$.

Система (10), удовлетворяющая краевым условиям

$$\begin{aligned} \tau = 0: \quad U' = E' = G' = H' = R'_1 = R'_2 = 0, \\ \tau \rightarrow \infty: \quad U = E = G = H = R_1 = R_2 = 0, \end{aligned}$$

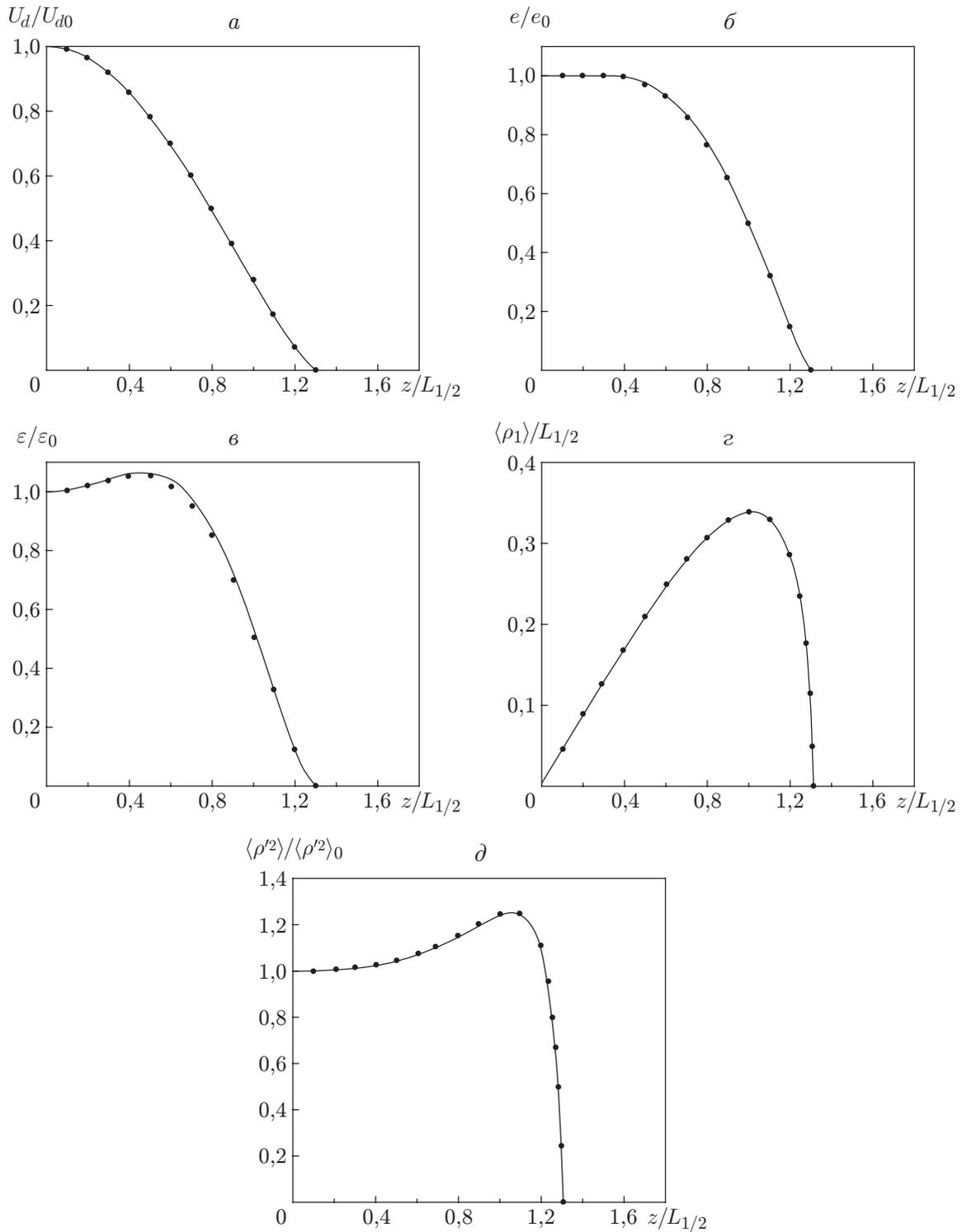
решалась численно. Дополнительные трудности обусловлены тем, что коэффициенты системы (10) имеют особенности. Задача решалась с использованием модифицированного метода стрельбы и асимптотического разложения решения в окрестности особой точки.

Сравнение результатов расчетов модели (1)–(5), полученных с помощью конечно-разностного алгоритма и метода стрельбы, показывает, что они практически совпадают, так же как и законы вырождения (6) характерных параметров следа в зависимости от расстояния от тела.

Представляет интерес анализ автомодельного профиля дефекта плотности $\langle \rho_1 \rangle / L_{1/2}$ на рисунке. Распределение дефекта плотности соответствует неполному перемешиванию жидкости в турбулентном следе (в случае полного перемешивания максимум приведенной функции был бы равен единице). Значение максимума в определенной мере зависит от применяемой модели турбулентности. В случае безымпурсного турбулентного следа подробный анализ процесса перемешивания жидкости в следе с использованием иерархии современных полуэмпирических моделей турбулентности проведен в работах [5, 7], в которых также показана зависимость степени перемешивания от применяемой математической модели. Авторы настоящей работы выполнили также численные эксперименты на основе более сложной математической модели с использованием алгебраических представлений рейнольдсовых напряжений и потоков (модель 1 в [9]). Максимальное значение автомодельного дефекта плотности оказалось приближенно равным 0,25 (см. также [8]). В условиях “активной” стратификации на относительно небольших расстояниях от тела след развивается так же, как и в пассивно стратифицированной среде [2]. Турбулентное перемешивание в области следа приводит к формированию области с перемешанной жидкостью. Воздействие силы тяжести на эту область вызывает генерацию внутренних волн [1, 2].

Анализируя результаты сравнения полученных решений, следует отметить два обстоятельства. В исходной постановке математическая модель течения представляет собой систему вырождающихся параболических уравнений (с соответствующими начальными и краевыми условиями). Для численного решения начально-краевой задачи применяется конечно-разностный алгоритм сквозного счета, основанный на интегроинтерполяционном методе (см. работу [16] и библиографию к ней). Результаты сравнения свидетельствуют об эффективности работы этого алгоритма. Кроме того, рассмотренный в настоящей работе способ анализа автомодельности вырождения, основанный на численном интегрировании задачи в исходной постановке (с проверкой условий автомодельности), достаточно хорошо известен и применяется при анализе автомодельности течения при проведении экспериментальных исследований (измерений). В настоящей работе, по сути, предпринята попытка обоснования такого подхода.

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему. С использованием $(e-\varepsilon)$ -модели турбулентности рассмотрена задача об автомодельном вырождении даль-



Характеристики потока для дальнего турбулентного следа:

a — профиль функции U_d/U_{d0} , *б* — профиль функции e/e_0 , *в* — профиль функции $\varepsilon/\varepsilon_0$, *г* — профиль функции $\langle \rho_1 \rangle / L_{1/2}$, *д* — профиль функции $\langle \rho'^2 \rangle / \langle \rho'^2 \rangle_0$; линии — автомодельное решение на основе (1)–(5), точки — результаты решения системы (10)

него турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде. Выполнен теоретико-групповой анализ модели. Исследовано автомодельное вырождение дальнего следа. При этом уравнения исходной математической модели с помощью теоретико-группового анализа и метода В-определяющих уравнений редуцируются к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача для этой системы решалась с использованием модифицированного метода стрельбы и асимптотического разложения решения в окрестности особой точки. Построенное решение хорошо согласуется с решением, полученным путем непосредственного численного интегрирования дифференциальных уравнений математической модели (на больших расстояниях от тела).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев О. Ф., Кузнецов Б. Г., Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 45–52.
2. **Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 47. С. 70–89.
3. **Hassid S.** Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronaut. 1980. V. 14, N 1. P. 25–32.
4. **Мошкин Н. П., Федорова Н. Н., Черных Г. Г.** О численном моделировании турбулентных следов // Вычисл. технологии. 1992. Т. 1, № 1. С. 70–92.
5. **Воропаева О. Ф., Черных Г. Г.** О численном моделировании динамики областей турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Вычисл. технологии. 1992. Т. 1, № 1. С. 93–104.
6. **Chernykh G. G., Voropaeva O. F.** Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Comput. Fluids. 1999. V. 28, N 3. P. 281–306.
7. **Воропаева О. Ф.** Дальний безымпультный турбулентный след в пассивно стратифицированной среде // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 3. С. 32–46.
8. **Chernykh G. G., Fomina A. V., Moshkin N. P.** Numerical models of turbulent wake dynamics behind a towed body in a linearly stratified medium // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2006. V. 21, N 5. P. 395–424.
9. **Мошкин Н. П., Фомина А. В., Черных Г. Г.** Численное моделирование динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде // Мат. моделирование. 2007. Т. 19, № 1. С. 29–56.
10. **Ефремов И. А., Капцов О. В., Черных Г. Г.** Автомодельные решения двух задач свободной турбулентности // Мат. моделирование. 2009. Т. 21, № 12. С. 137–144.
11. **Капцов О. В., Ефремов И. А.** Инвариантные свойства модели дальнего турбулентного следа // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 45–51.
12. **Капцов О. В., Ефремов И. А., Шмидт А. В.** Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 74–78.
13. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. **Kartsov O. V.** B-determining equations: applications to nonlinear partial differential equations // Eur. J. Appl. Math. 1995. V. 6. P. 265–286.
15. **Pope S. B.** Turbulent flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
16. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1972.

*Поступила в редакцию 3/XI 2011 г.,
в окончательном варианте — 28/XII 2011 г.*