

А. Ж. Абденов
(Новосибирск)

ПЛАНИРОВАНИЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Поставлена и решена задача планирования автокорреляционной функции (АКФ) входного сигнала для линейных стационарных непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Рассмотрена также задача восстановления D-квазиоптимального входного сигнала по его D-оптимальной АКФ. Приводятся результаты численного моделирования.

Введение. Одной из центральных проблем при решении задач управления, связи, фильтрации, прогнозирования является проблема построения математической модели динамического объекта в заданном классе по результатам наблюдений за входными и выходными сигналами. Различают пассивную и активную идентификацию [1]. При этом для оценивания динамических параметров можно рассмотреть достаточное количество подходов. Все зависит от целей исследования. В частности, целью теоретических исследований является изучение асимптотических свойств оценок. Если исследователя интересует еще и скорость сходимости оценок параметров, тогда для получения несмещенных последовательных оценок динамических параметров с равномерно ограниченной дисперсией можно использовать идею последовательного оценивания Вальда [2, 3]. Но численная реализация для идентификации параметров (см. процедуры в [3]) требует подбора специальных величин, характеризующих пороговые уровни. Назначение пороговых уровней состоит в том, что для каждого параметра строится некоторая статистика, представляющая собой в определенном смысле суммарное отношение сигнал/шум, и оценивание отдельного параметра заканчивается в тот момент, когда его статистика достигнет порога, косвенно характеризующего точность оценивания.

Если нас не интересуют асимптотические свойства и скорость оценок параметров, то можно использовать подходы с малым уровнем требований к исходной информации. В данной работе представлен один из таких подходов – метод последовательных приближений.

Если при пассивной идентификации построение модели ведется в режиме нормальной эксплуатации, то при активной идентификации построение ведется на основе заранее спланированного эксперимента. На практике используются различные рычаги активного воздействия на систему для повы-

шения чувствительности выхода измерительной системы по отношению к неизвестным параметрам в модели динамики объекта. При этом планирование эксперимента можно проводить в двух областях: временной и частотной [1, 4].

В работе предлагается методика решения задачи планирования эксперимента для стохастических непрерывно-дискретных динамических систем [5] во временной области с помощью оптимизации автокорреляционной функции (АКФ) входного сигнала.

1. Постановка задачи. Пусть динамическая система представлена в виде линейных стационарных непрерывно-дискретных уравнений динамики и измерителя [5]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad x(t_0) = \bar{x}_0, \quad (1)$$

$$y(t_{k-1}) = Hx(t_{k-1}) + v(t_{k-1}), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad t, t_k \in [t_0, t_N], \quad (2)$$

где x – n -мерный вектор переменных состояния; \bar{x}_0 – n -мерный вектор оценок математического ожидания случайного вектора $x(t_0)$ с ограниченной неотрицательно-определенной матрицей ковариации $P(t_0)$; u – r -мерный вектор входных сигналов; $\{w(t), t_0 \leq t \leq t_N\}$ – белый гауссовский процесс с нулевым средним и равномерно ограниченной неотрицательно-определенной матрицей ковариации Q ; A, B, H – $(n \times n)$ -, $(n \times r)$ -, $(m \times n)$ -матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно; y – m -мерный вектор наблюдения; N – объем выборки; $\{v(t_{k-1}), t_0 \leq t_k \leq t_N, k = \overline{0, N-1}\}$ – белая гауссовская последовательность с нулевым средним и равномерно ограниченной положительно-определенной ковариацией R . Предполагается, что система устойчива, полностью управляема и наблюдаема, входные сигналы ограничены по амплитуде. Заданы порядок модели динамики, порядок модели измерителя, а также матрица наблюдения H . Известно [6], что только обновленное представление системы (1), (2) идентифицируемо на основе фильтрационных оценок по схеме Калмана.

Обозначим оценки предсказания и фильтрации вектора состояния через $\hat{x}(t_k | t_{k-1})$ и $\hat{x}(t_k | t_k)$ соответственно, т. е.

$$\hat{x}(t_k | t_{k-1}) = E[x(t_k) | y(t_1), \dots, y(t_{k-1})];$$

$$\hat{x}(t_k | t_k) = E[x(t_k) | y(t_1), \dots, y(t_k)].$$

Нормализованную ошибку предсказания обозначим через

$$(t_k) = (HPH^T + R)^{1/2}(y(t_k) - H\hat{x}(t_k | t_{k-1})), \quad (3)$$

где

$$P(t | t_{k-1}) = E[(x(t) - \hat{x}(t | t_{k-1}))(x(t) - \hat{x}(t | t_{k-1}))^T];$$

$$P(t_k | t_k) = E[(x(t_k) - \hat{x}(t_k | t_k))(x(t_k) - \hat{x}(t_k | t_k))^T].$$

Приведем теперь соотношения калмановской фильтрации для системы (1), (2) (см. работу [5]):

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t|t_k) &= A\hat{x}(t|t_k) + Bu(t), \quad x(t_0) = \bar{x}_0; \\
 \dot{P}(t|t_k) &= AP(t|t_k) + P(t|t_k)A^T - \tilde{Q}_0, \quad P(t_0) = P_0; \\
 P(t_{k+1}|t_k) &= (HP(t_{k+1}|t_k)H^T + R_0)^{1/2}; \\
 K(t_{k+1}) &= P(t_{k+1})H^T P^{-1}(t_{k+1}); \\
 \hat{y}(t_{k+1}|t_k) &= H\hat{x}(t_{k+1}|t_k); \\
 P(t_{k+1}) &= P^{-1}(t_{k+1})(y(t_{k+1}) - \hat{y}(t_{k+1}|t_k)); \\
 \hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1})(y(t_{k+1}) - \hat{y}(t_{k+1}|t_k)); \\
 P(t_{k+1}|t_{k+1}) &= P(t_{k+1}|t_k) - K(t_{k+1})P^{-1}(t_{k+1})HP(t_{k+1}|t_k)
 \end{aligned} \tag{4}$$

при $t_k = t_{k+1}$, $k = \overline{0, N-1}$. Алгоритм непрерывно-дискретной фильтрации начинает свою работу со следующих начальных условий:

$$x(t_0) = \hat{x}(t_0|t_0) = \bar{x}_0, \quad P(t_0) = P(t_0|t_0) = P_0.$$

Обозначим через θ p -мерный вектор постоянных идентифицируемых параметров в системе (1), (2) или в калмановской фильтрации (4), входящих в матрицы A и B . Требуется синтезировать такой входной сигнал (задача планирования входного сигнала) на основе соответствующей D -оптимальной АКФ, чтобы по входу–выходу исследуемого объекта наиболее точно оценить входящие в матрицы A и B параметры (динамические параметры) и восстановить элементы ковариационных матриц начального состояния, помех динамики исследуемого объекта и измерительной системы.

2. Алгоритмы пассивной идентификации для модели в пространстве состояний. Исходя из множества реализаций (каждая из которых объема N), для некоторого эргодического процесса можно оценить ковариационную матрицу помех измерительной системы из соотношения

$$R_0 = \frac{1}{(N_1 - 1)N} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^N (y_i(t_k) - \bar{y}(t_k))(y_i(t_k) - \bar{y}(t_k))^T, \tag{5}$$

где $\bar{y}(t)$ – оценка математического ожидания, которую можно построить на основе N_1 повторных запусков системы при независимых гауссовских начальных условиях:

$$\bar{y}(t_k) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} y_i(t_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad t_k \in [t_0, t_N]. \tag{6}$$

Осуществим еще один «запуск» системы для набора данных наблюдений одной реализации (или выберем одну любую из N_1 реализаций), чтобы иметь возможность оценить динамические параметры в модели (1). Измерения будем осуществлять в моменты времени $t_k \in [t_0, t_N]$, $k = 1, N$. Для решения задачи пассивной идентификации сначала отфильтруем данные выхода измерителя с помощью регуляризирующего сглаживающего кубического сплайна [7], а затем на основе метода наименьших квадратов (МНК) оценим параметры, входящие в матрицы А и В [8, 9].

Применение такого подхода во многом зависит от того, насколько удачно сглажен процесс, от частоты шумов, ширины коридора фильтрации, использования критериев оптимальности, методики повторного оценивания, методики преодоления проблем, которые возникают при решении систем нормальных уравнений [1, 7–9] и т. д. Результатом данного этапа является восстановление начальных оценок для вектора \bar{x}_i . На практике полученная точность предварительных оценок может быть далека от истинной. Поэтому далее предлагается подход уточнения полученных динамических параметров.

Пусть начальные оценки динамических параметров восстановлены на основе МНК (например, на основе субоптимального подхода [9]), которые обозначим через $a_{ij}^{(0)}$, $b_{ik}^{(0)}$, $i, j = 1, n$, $k = 1, r$, а затем, имея в виду ошибку округлений и другие помехи, поставим задачу уточнения этих параметров, оценивая при этом добавки Δa_{ij} , Δb_{ik} , т. е. построим итерационный процесс, пока все добавки не станут меньше наперед заданного малого положительного ϵ .

Заметим здесь, что поскольку информация о параметрах $\{a_{i1}, \dots, a_{in}, b_{i1}, \dots, b_{ir}\}$ каждого i -го уравнения в системе (1) заключена в процессах $\{\dot{x}_i(t), x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), w_i(t)\}$, то при оценивании этих параметров в принципе можно ограничиться i -м уравнением системы (1). Тем самым задача сводится к рассмотрению скалярного процесса

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{in}x_n(t) \\ b_{i1}u_1(t) + \dots + b_{ir}u_r(t) &= w_i(t), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad t \in [t_0, t_N], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим функционал для i -го уравнения через

$$\begin{aligned} J_i &= \min_{\substack{a_{i1}, b_{i1} \\ \vdots \\ a_{in}, b_{ir}}} \int_{t_0}^{t_N} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(0)} x_j(t) - \sum_{k=1}^r b_{ik}^{(0)} u_k(t) - \dot{x}_i(t) \\ &\quad \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(0)} x_j(t) - \sum_{k=1}^r b_{ik}^{(0)} u_k(t) \quad dt, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение внутри скобки обозначим через $J_i^{(0)}$. Исходя из принципа МНК, будем иметь

$$\frac{J_i^{(0)}}{a_{ij}^{(0)}} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} x_j(t) - \sum_{k=1}^r b_{ik}^{(1)} u_k(t) - \dot{x}_i(t)$$

$$\int_{j-1}^n a_{ij}^{(\cdot)} x_j(t) - \int_{k-1}^r b_{ik}^{(\cdot)} u_k(t) dt = 0, \quad i, j \in \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$\frac{J_{i0}^{(\cdot)}}{b_{ik}^{(\cdot)}} - \int_{j-1}^n a_{ij}^{(\cdot)} x_j(t) - \int_{k-1}^r b_{ik}^{(\cdot)} u_k(t) = \dot{x}_i(t)$$

$$\int_{j-1}^n a_{ij}^{(\cdot)} x_j(t) - \int_{k-1}^r b_{ik}^{(\cdot)} u_k(t) dt = 0, \quad i \in \overline{1, n}, k \in \overline{1, r},$$

где l – номер итерации, $\overline{1, l}$. На каждом l -м шаге уточняются $a_{ij}^{(\cdot)}, b_{ik}^{(\cdot)}$ в результате оценивания $a_{ij}^{(\cdot)}, b_{ik}^{(\cdot)}$, пока все эти величины не станут меньше наперед заданного положительного малого ϵ , характеризующего желаемую точность в процедуре восстановления коэффициентов в (1).

Ясно, что процесс $x(t)$ случайный, гауссовский [10]. Если учесть, что оператор дифференцирования по своей физической природе усиливает помехи измерений, то чем выше частота помех, тем больше погрешности. Поэтому, чтобы не определять численно производные $\dot{x}(t)$ (как в [9]) в выражении (1), можно взять интеграл от соотношений в (9), причем в элементарных интервалах без учета помех динамики. Эта формальная процедура позволяет обойти процедуру вычисления производных. Далее имеем

$$x_i(t_{k-1}) - x_i(t_k) = \int_{j-1}^n a_{ij}^{(\cdot)} x_j(\tau) d\tau - \int_{l-1}^r b_{il}^{(\cdot)} u_l(\tau) d\tau, \quad i \in \overline{1, n}, k \in \overline{1, r}. \quad (10)$$

Используя (10), запишем систему нормальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{J_i}{a_{ij}} - \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\cdot)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_j(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^r b_{il}^{(\cdot)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_l(\tau) d\tau - x_i(t_{k-1}) - x_i(t_k) = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{J_i}{b_{il}} - \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\cdot)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x_j(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^r b_{il}^{(\cdot)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_l(\tau) d\tau - x_i(t_{k-1}) - x_i(t_k) = 0.$$

Вычисление интегралов на элементарных участках можно выполнить с помощью известных формул численного интегрирования. Если для $x_j(\tau)$ или $u_l(\tau)$ на участках $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, N-1$, недостаточно дискретных значений, то при желании можно «заготовить» необходимое число дискретных оценок состояния с помощью аппарата сплайн аппроксимации на этапе сглаживания откликов наблюдения выхода измерительной системы [7, 9].

После восстановления динамических параметров следующей неопределенностью в схеме Калмана является ковариационная матрица помех дина-

мики Q . Соотношение (7) представим в виде

$$\begin{aligned} w_i(t) &= \dot{x}_i(t) - a_{i1}x_1(t) - a_{i2}x_2(t) - \dots - a_{in}x_n(t) \\ &= b_{i1}u_1(t) - \dots - b_{ir}u_r(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_N]. \end{aligned}$$

Исходя из того что $w_i(t)$ – гауссовский белый процесс, можно получить предварительную оценку для ковариационной матрицы помех динамики. Запишем соотношения для функции правдоподобия и производные от этой функции:

$$\begin{aligned} L_i &= (2\pi)^n |\hat{Q}_{ii}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{w}_i(t_k) \hat{Q}_{ii}^{-1} \tilde{w}_i(t_k) \right\}, \\ \log L_i &= Nn \log(2\pi) - N \log |\hat{Q}_{ii}| - N \text{tr}(C_{0i} \hat{Q}_{ii}^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$C_{0i} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_i^2(t_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\frac{\log L_i}{ij} = N \text{tr}(E_{ij} \hat{Q}_{ii}^{-1}) - N \text{tr}(C_{0i} \hat{Q}_{ii}^{-1} E_{ij} \hat{Q}_{ii}^{-1}), \quad (13)$$

откуда $\hat{Q}_{ii}^{-1} = (\hat{Q}_{ii}^{-1} C_{0i} \hat{Q}_{ii}^{-1})$. Здесь E_{ij} – матрица, у которой все элементы – нули, кроме одного элемента E_{ii} , $i = \overline{1, n}$, равного единице. Из этого следует, что $\hat{Q}_{ii} = C_{0i}$. На основании (12) можно получить ковариацию в виде диагональной матрицы. Обозначим эту матрицу через \tilde{Q}_0 .

После восстановления оценок динамических параметров и ковариационной матрицы помехи динамического процесса можно восстановить и ковариационную матрицу начального состояния (при условии, что процесс устойчивый) из следующих рекуррентных соотношений [10]:

$$\dot{P}_0^{(k)} = AP_0^{(k)} - P_0^{(k)} A^T - \tilde{Q}_0, \quad P_0^{(0)} = 0, \quad (14)$$

$$P_0^{(k-1)} = P_0^{(k)} - \dot{P}_0^{(k)} t. \quad (15)$$

Здесь t – шаг дискретизации, который связан с вычислением переходной матрицы $F = \exp\{A t\}$. В работе [11] получены ограничения на шаг дискретизации для линейных дифференциальных уравнений, при выполнении которых устойчивому дифференциальному уравнению (1) будет соответствовать устойчивое разностное уравнение. Условия эти таковы:

$$t < \frac{2 \text{Re}[\lambda_i]}{|\lambda_i|^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

где λ_i – собственные значения матрицы A .

Теперь можно восстановить ковариационную матрицу помех динамики Q_{ii} для дискретного фильтра исходя из соотношения [10, 12]:

$$P_0^{(k-1)} = FP_0^{(k)}F^T - Q_0, \quad P_0^{(0)} = 0, \quad (16)$$

откуда

$$Q_0 = P_0^{(k-1)} - FP_0^{(k)}F^T. \quad (17)$$

Вновь полученные оценки должны пройти проверку на «оптимальность». Идеология такой проверки относительно характеристик помех динамики и измерителя приведена и обоснована в работах Кайлатца [6] и Мехры [12]. Она основана на свойстве обновленной последовательности: быть белым процессом для оптимального фильтра. Для этого строится автокорреляционная функция обновленной последовательности (АКФ ОП)

$$\hat{C}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=k}^N v(t)v^T(t-k). \quad (18)$$

Для наглядности вычисляют нормализованные оценки АКФ ОП \hat{c}_k , которые получаются с помощью деления элементов оценок матрицы \hat{C}_k на элементы матрицы \hat{C}_0 , т. е.

$$[\hat{c}_k]_{ij} = \frac{[\hat{C}_k]_{ij}}{\{[\hat{C}_0]_{ii}[\hat{C}_0]_{jj}\}^{1/2}}. \quad (19)$$

Проверка состоит в анализе множества значений для $[\hat{c}_k]_{ii}$, $k = 0$. При этом проверяется число элементов \hat{c}_k , лежащих вне полосы $1,96/\{N^{1/2}\}$. Если это число меньше 5 % по всей глубине памяти, где $k = 1, 2, \dots, n$, то обновленный процесс белый и, следовательно, фильтр оптимальный, и оценки R_0, Q_0 в достаточной степени точны. Если искомое число элементов, лежащих вне полосы $1,96/\{N^{1/2}\}$, больше 5 % по отношению к числу n , то фильтр субоптимальный и ковариационные матрицы R_0 и Q_0 должны подвергнуться процедуре переоценки. Попутно заметим, что проверка применима в случае достаточно больших значений объема выборки N , в противном случае в работе [12] предлагается использовать подходы из [13, 14].

Вернемся к рассуждениям, когда N в достаточной степени большой и фильтр субоптимальный. Предлагаемый в работе [10] подход состоит в следующем.

Требуется получить оценки PH^T , используя следующие соотношения:

$$C_k = HPH^T - R_0 \quad \text{для } k = 0, \quad (20)$$

$$C_k = H[F(I - KH)]^{k-1}F[PH^T - KC_0] \quad \text{для } k = 0. \quad (21)$$

Перепишем развернуто соотношение (21) для $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} C_1 & HFPH^T HF^0K_0, \\ C_2 & HF^2PH^T HF^0K_1 HF^2K_0, \\ & \vdots \\ C_n & HF^nPH^T HF^0K_{n-1} \dots HF^nK_0. \end{aligned}$$

Далее определим

$$PH^T B^* = \begin{pmatrix} C_1 HF^0K_0 \\ C_2 HF^0K_1 HF^2K_0 \\ \dots \\ C_n HF^0K_{n-1} \dots HF^nK_0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где B^* – псевдообратная матрица по отношению к B , которая имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} F, \quad B^* = (B^T B)^{-1} B^T.$$

Обозначая через $\hat{P}\hat{H}^T$ оценки PH^T с учетом (18) и (22), запишем

$$\hat{P}\hat{H}^T B^* = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 HF^0\hat{K}_0 \\ \hat{C}_2 HF^0\hat{K}_1 HF^2\hat{K}_0 \\ \dots \\ \hat{C}_n HF^0\hat{K}_{n-1} \dots HF^n\hat{K}_0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

После всех вычислений оценку R получим, используя выражение (20):

$$\hat{R}_0 = \hat{C}_0 H(\hat{P}\hat{H}^T). \quad (24)$$

Оценку Q_0 можно найти с помощью соотношения, которое получается из уравнений фильтра Калмана [10]:

$$\hat{x}(t_{k-1}|t_k) = F\hat{x}(t_k|t_k) - Gu(t_k), \quad \hat{x}(t_0|t_0) = \bar{x}_0, \quad (25)$$

$$P(t_{k-1}|t_k) = FP(t_k|t_k)F^T - Q_0, \quad P(t_0|t_0) = P_0, \quad (26)$$

$$K(t_{k-1}) = P(t_{k-1}|t_k)H^T(HP(t_{k-1}|t_k)H^T + R_0)^{-1}, \quad (27)$$

$$\hat{x}(t_{k-1}|t_{k-1}) = \hat{x}(t_{k-1}|t_k) + K(t_{k-1})(y(t_{k-1}) - H\hat{x}(t_{k-1}|t_k)), \quad (28)$$

$$P(t_{k-1}|t_{k-1}) = P(t_{k-1}|t_k) - KHP(t_{k-1}|t_k). \quad (29)$$

В частности, из (25)–(29) можно получить

$$e(t_k) = F(I - KH)e(t_{k-1}) - FKv(t_{k-1}) - w(t_{k-1}), \quad e(t_1) = 0. \quad (30)$$

Рекуррентно повторяя (30) для $k = 2, 3, \dots$, запишем результирующее соотношение

$$e(t_k) = [F(I - KH)]^k e(t_{k-1}) - \sum_{j=1}^k [F(I - KH)]^{j-1} FKv(t_{j-1}) - \sum_{j=1}^k [F(I - KH)]^{j-1} w(t_{j-1}). \quad (31)$$

Умножая соотношение (31) на $e^T(t_{k-1})$ и усредняя, имеем

$$E\{e(t_k)e^T(t_{k-1})\} = [F(I - KH)]^k P.$$

Соотношение для P можно получить с помощью (31):

$$P = F(I - KH)P(I - KH)^T + FKRK^T + Q. \quad (32)$$

Умножая теперь выражение (20) на $v^T(t_{k-1})$ справа и усредняя, будем иметь

$$E\{e(t_k)v^T(t_{k-1})\} = [F(I - KH)]^{k-1} FKR.$$

Следовательно,

$$E\{v(t_k)v^T(t_{k-1})\} = H[F(I - KH)]^{k-1} F[PH^T - K(HPH^T - R)] \text{ при } k > 0,$$

$$E\{v(t_k)v^T(t_k)\} = HPH^T - R \text{ при } k = 0.$$

Для оценки Q воспользуемся соотношением (32).

Вся методика уточнения оценок R и Q применима при условии, что число неизвестных в Q меньше чем $n - m$. Если число неизвестных в Q больше чем $n - m$, предлагаемая выше методика адаптивной корректировки оценки Q не дает достаточных соотношений. Тем не менее матрицу усиления Калмана можно оценивать с помощью итеративной процедуры, представленной в работе [12].

Наконец, знание матрицы усиления Калмана K_{opt} позволит восстановить ковариационную матрицу помех динамики для дискретного фильтра на основе следующих рассуждений. Исходя из знания ковариационной матрицы ошибок оценок предсказания состояния P_{opt} , соответствующего K_{opt} , и используя (29), можем восстановить ковариационную матрицу ошибок фильтрационных оценок состояния:

$$P_f = P_{\text{opt}} - K_{\text{opt}}HP_{\text{opt}}. \quad (33)$$

Применяя соотношение (26), можно восстановить значения ковариационной матрицы помех динамики

$$Q_0 = P_{\text{opt}} - FP_f F^T. \quad (34)$$

Соотношение (16) позволит восстановить (для устойчивой системы) конечный ряд из ковариационных матриц начального состояния $\{P_0^{(0)}, P_0^{(1)}, \dots, P_0^{(m)}\}$, а затем оценить производную исходя из соотношения (15):

$$\dot{P}_0^{(m)} = (P_0^{(m)} - P_0^{(m-1)})/t. \quad (35)$$

Используя матричное дифференциальное уравнение для вычисления ковариационной матрицы ошибок оценок предсказания состояния (из формул (4)), можно вычислить ковариационную матрицу помех динамики для дифференциальной модели динамики процесса:

$$\tilde{Q}_0 = \dot{P}_0^{(m)} - AP_0^{(m)} - P_0^{(m)}A^T. \quad (36)$$

После пересчета всех динамических параметров и характеристик помех начального состояния, помех динамики и измерителя необходимо повторить процедуру проверки оптимальности фильтра. Если фильтр оптимальный, то процесс проектирования модели динамики заканчивается. В противном случае мы имеем возможность применить аппарат планирования уточняющего эксперимента, в частности спланировать входной сигнал для повышения чувствительности откликов измерителя по отношению к динамическим параметрам.

3. Активное оценивание динамических параметров на основе оптимизации АКФ входного сигнала. Известно [1], что точность оценок, полученная в результате параметрической идентификации, определяется статистическими свойствами оценок \hat{a}_{ij} , \hat{b}_{il} , которые зависят, в частности, от вида входного сигнала. Следовательно, выбирая тот или иной тестирующий сигнал, можно получать модели с различными статистическими свойствами. В дальнейшем в качестве меры статистической точности динамической модели возьмем определитель информационной матрицы Фишера (ИМФ). Будем выбирать входной сигнал, чтобы обеспечить максимальное значение определителю ИМФ, который принято называть D-оптимальным.

Пусть $U = \{u(t), t \in [t_0, t_N]\}$ – r-мерная векторная функция входных сигналов, ограниченная так, что принадлежит области U . В работе [4] показано, что оптимальные входные сигналы могут быть выбраны таким образом, что только $k = \frac{p(p-1)}{2} + 1$ точек в U будут иметь ненулевые вероятности.

Следовательно, D-оптимальный план определяется как $\{p_1, U_1; \dots; p_k, U_k\}$, где входные сигналы выбираются для конкретных реализаций путем рандомизации; p_i – доли вероятности, заданные на всем множестве U .

Планирование оптимальных входных сигналов базируется на предположении, что известна априорная оценка \hat{a}_{ij} , \hat{b}_{il} для динамических параметров a_{ij} , b_{il} , $i, j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, r}$. Далее будем считать, что априорные оценки a_{ij} , b_{il} , $i, j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, r}$. Далее будем считать, что априорные оценки a_{ij} , b_{il} , $i, j = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, r}$.

статочны близки к истинным после решения задач устранения «больших» невязок $a_{ij}, b_{il}, i, j \overline{1, n}, l \overline{1, r}$.

Решение задачи планирования входного сигнала предполагает также наличие соотношения для вычисления элементов ИМФ. Такое соотношение дает результат следующего утверждения 1, схему доказательства которого можно найти в [15].

Утверждение 1. ИМФ порядка p для набора параметров θ , плана входных сигналов и набора наблюдений $Y = \{y(t_k), k \overline{1, N}, t_k \in [t_0, t_N]\}$ для линейной непрерывно-дискретной модели (1), (2) выражается с помощью следующего соотношения:

$$\overline{M}(\theta, U) = W(\theta, U) \overline{A}(\theta). \quad (37)$$

Матрицы W квадратичны в U :

$$W_{ij}(\theta, U) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u^T(t_l) w_{ij}(t_l, t_k, \theta) u(t_k), \quad i, j \overline{1, p}, \quad (38)$$

где

$$w_{ij}(t_l, t_k) = \int_{t = \max(t_k, t_l)}^t G_A^T F_A^T(t, t_l) C_i^T H_A^T(t) H_A C_j^T F_A(t, t_k) G_A;$$

$$F_A(t, t_k) = F_A(t-1) F_A(t-2) \dots F_A(t_k);$$

$$F_A = \begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ \frac{F}{p} & F & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{F}{p} & 0 & \dots & F \end{pmatrix}; \quad G_A = \begin{pmatrix} G \\ \vdots \\ \frac{G}{p} \end{pmatrix}; \quad H_A = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ H & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \end{pmatrix};$$

$$\overline{A}_{ij}(\theta) = \sum_{t=1}^N \text{tr} \left[\frac{v(t_k)}{j} \int_{t_k}^t \frac{v(t_k)}{i} \text{tr} \left[\int_{t_k}^t \frac{v(t_k)}{i} \int_{t_k}^t \frac{v(t_k)}{j} \right] \right]. \quad (39)$$

Вычисление элементов ИМФ для модели типа (1), (2) – достаточно трудоемкая процедура. Но чтобы показать эффективность планирования входных сигналов для увеличения информативности выхода измерителя, будем в дальнейшем пренебрегать помехой динамики, возложив некоторые существенные случайные воздействия на входной сигнал. Введя обозначения, определим ИМФ через оценки ковариации функций чувствительности [16]:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^N E \left[\frac{v(t_k)}{j} R^{-1} \frac{v(t_k)}{i} \sum_{k=1}^N [x_A^T(t_k) T_j^T R^{-1} T_i x_A(t_k)] \right] \\ N \text{tr} \{ R_{xx}(0) T_i^T R^{-1} T_j \}, \quad i, j \overline{1, p}, \quad (40)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} H_A & T_0 \\ & T_1 \\ & \vdots \\ & T_p \end{pmatrix}, \quad T_i = (0 \dots 0 \ H \ 0 \dots 0).$$

Далее предлагается соотношение, позволяющее более эффективно вычислять элементы ИМФ на основе оценок АКФ входного сигнала системы [16].

Утверждение 2. Пусть $\{u(t_k), k = \overline{1, N}, t_k \in [t_0, t_N]\}$ – табличное представление входного сигнала, соответствующее дискретным моментам наблюдения выхода измерительной системы. Предположим, что входной сигнал стационарный, удовлетворяет свойствам эргодичности, что все собственные числа переходной матрицы F по модулю строго меньше единицы и что наименьший номер k^* соответствует выражению, для которого $\|F_A^{k^*}\| < 1$, где $k^* \leq N$. Тогда для вычисления оценок ковариации функции чувствительности можно использовать соотношение

$$R_{xx}(0) = \sum_{k=0}^{k^*-1} F_A^k G_A R_{uu}(k) G_A^T (F_A^T)^k, \quad (41)$$

где $R_{uu}(k)$ вычисляется приближенно на основе следующих соотношений при $k \leq k^*$:

$$R_{uu}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=k-1}^N u(t_{j-k+1}) u^T(t_{j-1}) - \frac{1}{N} \sum_{j=k-1}^N u(t_{j-k+1}) u^T(t_{N-j-k+1}), \quad 0 < k < k^* \\ R_{uu}(k^*), \quad 0 < k = k^*.$$

Отсюда следует, что

$$R_{uu}(k) \approx R_{uu}(k^*) \quad \text{при} \quad k \rightarrow k^*. \quad (42)$$

Аналогичное соотношение имеет место для случая, когда $k > k^*$. Теперь формула (41) преобразуется к виду [16]

$$R_{xx}(0) = \sum_{k=0}^{k^*-1} F_A^k G_A R_{uu}(k) G_A^T (F_A^T)^k + \bar{R}(0) = \sum_{k=0}^{k^*-1} (F_A^k \bar{R}(k) \bar{R}^T(k) (F_A^T)^k), \quad (43)$$

$$\bar{R}(s) = F_A^{-1} G_A R_{uu}(s) G_A^T (F_A^T)^{-1}; \quad \overline{0, k^* - 1}. \quad (44)$$

Здесь F_A – расширенная переходная матрица состояния; G_A – расширенная переходная матрица управления; $R_{uu}(s)$ – АКФ входного сигнала.

Результат утверждения 2 позволяет значительно сократить объем «выборки» для АКФ входного сигнала и тем самым сократить размерность оптимизационной задачи в процедуре поиска входного сигнала, максимизирующего определитель ИМФ. Еще более значительное сокращение размерности оптимизационной задачи дает процедура параметризации АКФ входного сигнала [17]. Вышеизложенное позволяет рассмотреть алгоритм синтеза оптимального АКФ входного сигнала, который состоит из этапа оптимизации по точкам плана и этапа оптимизации по весам относительно точек плана.

Алгоритм синтеза D-оптимального плана АКФ.

1. Начинаем с некоторого плана

$$0 \quad \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ p_1^0 & p_2^0 & \dots & p_n^0 \end{matrix},$$

где α_i – параметр, от которого зависит АКФ. Например, можно построить АКФ в форме $R_{uu}(s) = e^{-\alpha_i s}$, $\alpha_i = 0, i = 1, n$, (n – число точек в плане).

Для простоты полагаем α_i скалярами и допустим, в частности, что α_i – интенсивности переключения бинарного сигнала со случайным моментом переключения. Эти числа являются искомыми параметрами данного алгоритма. Веса точек плана (p_i^0) фиксируем, полагая, например, их равновесными: $(p_i^0) = 1/n$.

2. Начинаем оптимизацию методом сопряженных градиентов [18]. При реализации этого метода считаем целевой функцией (подлежащей максимизации) определитель информационной матрицы всего плана. При этом на промежуточных пунктах вычисляем элементы ИМФ для каждой точки плана.

3. Вычисляем информационную матрицу всего плана по формуле

$$M = \sum_{i=1}^n p_i M_i.$$

4. Вычисляем определитель информационной матрицы $\det[M]$. Затем, зная вес точки плана, ее информационную матрицу и производную по параметру от этой матрицы, можно найти производную определителя по параметру α_s [17].

5. После этапа оптимизации по точкам плана необходимо по возможности улучшить его путем изменения весов точек, в него входящих. Для оптимизации по весам применяется метод Розена (проекции градиента) [18]. В качестве начального приближения используется план, полученный на первом этапе (оптимизация по точкам). На каждой итерации изменяются только веса точек (p_i), сами точки (α_i) остаются фиксированными (неподвижными). Далее приведем примеры расчетов для конкретных видов АКФ.

4. Результаты вычислительного эксперимента.

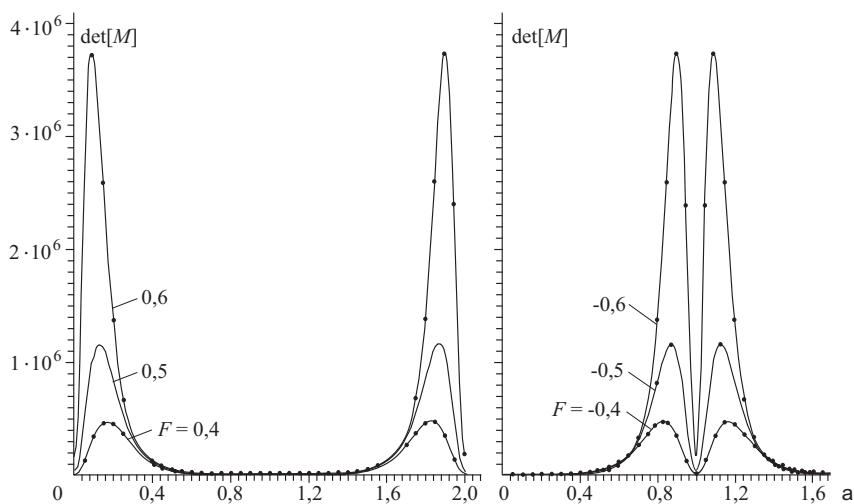
Пример 1. Одномерный случай. Экспоненциальная форма АКФ. Рассмотрим случай, когда в модели одномерной динамической системы неизвестным оцениваемым параметром считается коэффициент управления G , а структура АКФ имеет вид $R_{uu}(s, i) = e^{-i|s|}$, $i = 0, 1, n$. Зависимость определителя информационной матрицы одноточечного плана (в данном случае это дисперсия оценки параметра G) от параметров АКФ i при различных коэффициентах перехода F приводит к выводу [17]: поведение определителя в зависимости от F резко меняется при переходе через 0; определитель имеет максимум в точке $i = 0$ при $F > 0$ или в точке $i = 0$ при $F < 0$. В этом случае применение оптимизационных методов ни к чему не приводит: оптимальным будет одноточечный план, расположенный в точке $i = 0$ при $F > 0$ или в точке $i = 0$ при $F < 0$.

Пример 2. Двумерный случай. Гармоническая форма АКФ. Пусть АКФ имеет вид $R_{uu}(s, i) = \frac{(N-i)}{N} \cos(i\omega)$, $i = 1, n$. Тогда производные $\frac{\partial \bar{R}(s)}{\partial s}$, используемые при вычислении градиента информационной матрицы, будут определяться из соотношения

$$\frac{\partial \bar{R}(s)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n G_A^{-1} \frac{(N-i)}{N} \sin(i\omega) G_A^T (G_A^{-1})^T.$$

На рисунке показана зависимость определителя информационной матрицы одноточечного плана от параметра АКФ при различных коэффициентах перехода F . Приведенный график отражает ее поведение на одном периоде в пределах от 0 до 2 при положительных и отрицательных значениях F .

5. Восстановление сигнала по его АКФ. Так как в описанном методе планирования эксперимента оптимизируется не сам входной сигнал, а его АКФ, то возникает необходимость восстановления самого сигнала, соответствующую



Гармоническая модель АКФ

шего его D-оптимальной АКФ. Предлагается следующий способ восстановления: сначала строится модель авторегрессии [19], а затем по полученной модели восстанавливается сам сигнал [17].

После построения модели авторегрессии задается m начальных значений восстанавливаемого сигнала x_0, \dots, x_{m-1} . Можно, например, использовать имеющиеся значения входного сигнала (неоптимального) или задать их равными значениям, которые могут быть продиктованы профессиональными экспертами. После задания начальных значений восстанавливаем сигнал по формуле

$$x_{k-m} = \sum_{i=1}^m a_i x_{k-m+i-1}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Полученные значения искомого сигнала необходимо пронормировать, чтобы для восстановленного сигнала выполнялось условие

$$\frac{\sum_{k=1}^m x_{k-m}^2}{N} = r_0.$$

Для этого все вычисленные значения x умножаются на коэффициент

$$\sqrt{r_0 N / \sum_{k=1}^m x_{k-m}^2}.$$

В идеальном случае этот коэффициент равен единице, тогда необходимость в нормировке отпадает.

Пример 3. Активное оценивание динамических параметров. Тестовые исследования проводились по следующей схеме.

1. Генерируется АКФ на основании текущего известного значения параметра АКФ.

2. По сгенерированной АКФ восстанавливается сигнал.

3. Восстановленный сигнал подается на вход динамической системы. Генерируется зашумленный отклик системы. При генерации используются истинные значения F и G .

4. Сигнал и отклик подаются на вход алгоритма оценивания параметров. На выходе этого алгоритма получаем уточненные оценки F и G . После чего оптимизируем АКФ по параметру и далее повторяем все описанные выше этапы исследования.

Результаты оценивания для случая, когда АКФ имеет вид $R_{uu}(\omega, \theta)$ $\frac{(N)}{N} \cos(\omega \theta)$, $\theta = \overline{1, n}$, приведены в таблице, где приняты следующие

обозначения: X_0 – начальное значение x ; R – дисперсия ошибки измерения; N – длина входной последовательности; \hat{F} – априорное значение F ; \tilde{F} – новое значение для F ; \hat{G} – априорное значение G ; \tilde{G} – новое значение для G ; \tilde{F}_1, \tilde{G}_1 – новые (полученные на основе квазиоптимального входа) значения для F и G соответственно.

Оценки параметров при $R = 2,0$; $X_0 = 0,5$

F G	\hat{F} \hat{G}	N	Неоптимальный вход	Квазиоптимальный вход
			\tilde{F} \tilde{G}	\tilde{F}_1 \tilde{G}_1
0,4 1,5	0,5 1,5	50	0,2814 1,4579	0,4458 1,6898
		100	0,432 1,328	0,42638 1,64650
		200	0,547 1,049	0,420 1,559

Заключение. В данной работе представлена методология решения задачи активной идентификации для стохастических непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Приведен алгоритм решения задачи пассивной идентификации, позволяющий восстанавливать оценки динамических параметров и оценки значений элементов ковариационных матриц помех динамики, измерителя и начального состояния. Предложенные процедуры оценивания с малым уровнем требований к исходной информации основаны на свойствах устойчивости, идентифицируемости, наблюдаемости, управляемости исследуемой динамической системы и свойстве для обновленного процесса – быть белым для оптимального фильтра.

Развитая методология позволяет рассматривать реалистичные критерии, ограничения и алгоритмы решения задач активной идентификации. Попытки использовать полученную методику для решения задач активной идентификации с применением квазиоптимального входа, полученного на основе D-оптимальной АКФ, выглядят обнадеживающими.

Повышение информативности выхода можно ожидать также и от планирования эксперимента в частотной области на основе оптимизации спектральной плотности мощности входных сигналов [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М. Планирование промышленных экспериментов. Модели динамики. М.: Металлургия, 1978.
2. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960.
3. Конев В. В., Пергаменщиков С. М. Последовательные планы идентификации параметров динамических систем // АИТ. 1981. № 7. С. 84.
4. Mehra R. K. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – Survey and new results // IEEE Trans. Automat. Contr. 1974. AC-19. P. 753.
5. Astrom K. J. Maximum likelihood and prediction error methods // Automatica. 1980. 16. P. 551.
6. Kailath T. An innovations approach to least-squares estimations. Pt. 1: Linear filtering in additive white noise // IEEE Trans. Automat. Contr. 1968. AC-13. P. 646.
7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

8. Демиденко Е. С. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981.
9. Попов А. А., Абденов А. Ж. Субоптимальный алгоритм оценивания параметров в моделях стационарных динамических систем на основе линейного метода наименьших квадратов с регуляризацией. Новосибирск, 1984. 10 с.: Деп. в ВИНТИ 22.06.84 г., № 84.
10. Медич Дж. Статистически-оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
11. Передумов В. П. Об устойчивости моделирования на ЦВМ линейных динамических систем // Вест. Киев. политехн. ин-та. Сер. Техн. кибернетика. 1983. Вып. 7. С. 39.
12. Mehra R. K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Trans. Automat. Contr. 1970. AC-15, N 2. P. 175.
13. Hanuan E. J. Time Series Analysis. N. Y.: Wiley, 1960.
14. Heffes H. The effects of erroneous models on the Kalman filter response // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. AC-11. P. 541.
15. Абденов А. Ж., Попов А. А. Планирование D-оптимальных входных сигналов для непрерывно-дискретных систем при некоррелированных и взаимно коррелированных шумах объекта и измерителях // Алгоритмическое и программное обеспечение задач оптимального планирования и проектирования. Новосибирск: НЭТИ, 1983. С. 7.
16. Абденов А. Ж. Приближенное вычисление элементов информационной матрицы Фишера для линейных непрерывно-дискретных систем на основе автокорреляционной функции входного сигнала // Сб. науч. тр. Новосибирск: НГТУ, 1997. № 2(7). С. 3.
17. Абденов А. Ж., Сазонов М. В. Планирование D-квазиоптимальных входных сигналов для динамических систем на основе процедуры параметризации автокорреляционной функции // Там же. С. 15.
18. Базара М. Г., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
19. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1982.
20. Абденов А. Ж. Теоретические и алгоритмические аспекты D-оптимального планирования входного сигнала линейных дискретных динамических систем на основе оптимизации его спектральной плотности мощности // Сб. науч. тр. Новосибирск: НГТУ, 1997. № 3(8). С. 3.

Новосибирский государственный
технический университет,
E-mail: abdenov@ngs.ru

Поступила в редакцию
12 января 2004 г.