

УДК 532.529.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С МАЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ

И. М. Васенин, Н. Н. Дьяченко, К. Е. Ёлкин, Р. К. Нариманов

Томский государственный университет, 634050 Томск  
E-mail: dekanat@ftf.tsu.ru

Рассматривается двухфазное конвективное течение, конвекция в котором вызвана концентрационными неоднородностями частиц твердой фазы. Применение предлагаемой математической модели иллюстрируется на примере расчета течений двухфазной среды в жалюзийном отстойнике.

Ключевые слова: конвективное течение, двухфазная среда, концентрация частиц.

**Введение.** Настоящее исследование посвящено моделированию двухфазного течения, дисперсная фаза которого представляет разряженное “облако” малых твердых частиц. Малыми будем называть такие частицы, время установления скорости которых (или время релаксации) при свободном падении в рассматриваемой жидкости пренебрежимо мало по сравнению с характерным временем оседания таких частиц в пределах расчетной области.

Уравнение гравитационного осаждения твердой малой частицы в жидкой среде запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = \frac{C_R}{m} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) + \mathbf{g} \left( 1 - \frac{\rho_l^0}{\rho_s^0} \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}_s, \rho_s^0$  — скорость и плотность частицы;  $\mathbf{u}, \rho_l^0$  — скорость и плотность жидкости;  $t$  — время;  $m$  — масса частицы;  $C_R$  — коэффициент сопротивления движению частицы. В общем случае  $C_R$  — величина переменная:  $C_R = C_D \rho_l^0 s |\mathbf{u} - \mathbf{u}_s| / 2$ , где  $C_D = C_D(\text{Re})$  — коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса;  $s$  — площадь миделева сечения частицы;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса.

Введем обозначения:  $\tau = m/C_R$  — время релаксации;  $\mathbf{F} = \mathbf{g}(1 - \rho_l^0/\rho_s^0)$  — сила плавучести. В принятых обозначениях уравнение (1) запишется в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{u}_s}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{u}_s = \frac{1}{\tau} \mathbf{u} + \mathbf{F}.$$

Отсюда искомую функцию можно выразить аналитически:

$$\mathbf{u}_s = \exp \left( - \int_0^t \frac{dt}{\tau} \right) \left[ \mathbf{u}_{s0} + \int_0^t \left( \frac{1}{\tau} \mathbf{u} + \mathbf{F} \right) \exp \left( \int_0^t \frac{dt}{\tau} \right) dt \right].$$

Интегрируя это выражение по частям, получим асимптотическое разложение по параметру  $\tau$ . Ограничившись членами второго порядка по  $\tau$ , будем иметь

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u} + \tau \mathbf{F} - \tau \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \exp \left( - \int_0^t \frac{dt}{\tau} \right) \left[ \mathbf{u}_{s0} - (\mathbf{u} + \tau \mathbf{F})_0 + \tau \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_0 + \theta(\tau^2) \right] + \theta(\tau^2). \quad (2)$$

В настоящее время приближенные подходы, использующие малость времени релаксации частиц, применяются в математических моделях глубокой конвекции, разрабатываемых для локального прогноза погоды. Система уравнений глубокой конвекции представлена впервые в работе [1]. Как в самой работе [1], так и в последующих исследованиях [2–4], базирующихся на этих уравнениях, вопрос границ применимости модели не обсуждается. Вместе с тем двухфазные течения с малыми частицами широко используются в технических приложениях. Поэтому имеет смысл выделить класс конвективных течений с малыми частицами, рассмотрев возможные упрощения и допущения, при которых могут быть сформулированы адекватные математические модели.

**Математическая модель двухфазной конвекции.** Перейдем к построению модели. Заметим, что в формуле (2) производная по времени берется вдоль траектории частицы, т. е.  $d\mathbf{u}/dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u}_s \cdot \nabla\mathbf{u}$ . Предполагая далее, что время релаксации  $\tau$  достаточно мало, отбросим в (2) члены второго порядка малости по  $\tau$ . По истечении времени релаксации можно также не учитывать и влияние начальных условий. В результате несложных преобразований над оставшимися членами уравнения (2) получим

$$m \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} + (\mathbf{u}_s - \mathbf{u})] \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \approx \frac{1}{2} C_D(\text{Re}) s g |\mathbf{u} - \mathbf{u}_s| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) + m \mathbf{g} \left( 1 - \frac{\rho_l^0}{\rho_s^0} \right).$$

Легко заметить, что для заданного поля скоростей жидкости из него путем решения системы алгебраических уравнений можно вычислить все проекции вектора  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)$  запаздывания частиц по скоростям.

Для простоты анализа предположим, что двухфазный конвективный поток является ламинарным, двумерным в плоскости  $(x, z)$  со скоростями  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $\mathbf{u}_s = (u_s, v_s)$ , а жидкость несжимаемая. Ось  $z$  направим вертикально в направлении, противоположном направлению силы тяжести. С учетом сделанных допущений запишем проекции уравнений движения двухфазной смеси на оси  $x$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} \rho_l \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u \right) + \rho_s \left( \frac{\partial u_s}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla u_s \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta u, \\ \rho_l \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v \right) + \rho_s \left( \frac{\partial v_s}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla v_s \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta v - g(\rho_l + \rho_s). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\rho_l = \rho_l^0 (1 - \rho_s/\rho_s^0)$  — масса жидкости в единице объема;  $\rho_s$  — масса частиц в единице объема;  $p$  — давление;  $\mu$  — вязкость жидкости.

Введем новые переменные  $\delta u_s = u_s - u$ ,  $\delta v_s = v_s - v$  и вектор  $\mathbf{w} = (\delta u_s, \delta v_s)$ . Систему (3) перепишем с учетом новых переменных:

$$\begin{aligned} (\rho_l + \rho_s) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u \right) + \rho_s \left( \frac{\partial \delta u_s}{\partial t} + \mathbf{w}_s \cdot \nabla u + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \delta u_s \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta u, \\ (\rho_l + \rho_s) \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v \right) + \rho_s \left( \frac{\partial \delta v_s}{\partial t} + \mathbf{w}_s \cdot \nabla v + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \delta v_s \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta v - g(\rho_l + \rho_s). \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u}{V}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V}, \quad \bar{u}_s = \frac{u_s}{V}, \quad \bar{v}_s = \frac{v_s}{V}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \left( \frac{u}{V}, \frac{v}{V} \right), \quad \bar{\mathbf{w}}_s = \left( \frac{\delta u_s}{\delta V}, \frac{\delta v_s}{\delta V} \right), \\ \bar{\delta u}_s &= \frac{\delta u_s}{\delta V}, \quad \bar{\delta v}_s = \frac{\delta v_s}{\delta V}, \quad \bar{\mathbf{u}}_s = (\bar{u}_s, \bar{v}_s), \quad \bar{\rho}_l = \frac{\rho_l}{\rho_l^0}, \quad \bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{\rho_l^0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_l^0 V^2}, \\ \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L/V}, \end{aligned}$$

где  $L$  — масштаб длины;  $V$  — масштаб скорости;  $\delta V$  — масштаб запаздывания частиц по скоростям, приведем уравнение (4) к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{u} \right) + \frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\delta V}{V} \left( \frac{\partial \bar{\delta u}_s}{\partial t} + \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \nabla \bar{u} + \bar{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \bar{\delta u}_s \right) + \frac{1}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u}, \\ \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{v} \right) + \frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\delta V}{V} \left( \frac{\partial \bar{\delta v}_s}{\partial t} + \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \nabla \bar{v} + \bar{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \bar{\delta v}_s \right) + \frac{1}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{v} - \frac{1}{\text{Fr}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\text{Re} = (\rho_l + \rho_s)VL/\mu$  — число Рейнольдса;  $\text{Fr} = V^2/(gL)$  — число Фруда. Из уравнений (5) видно, что в области больших чисел Рейнольдса при выполнении неравенства

$$\frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\delta V}{V} \ll 1 \quad (6)$$

в левой части этих уравнений можно пренебречь вторыми слагаемыми по сравнению с первыми и решать систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{v} - \frac{1}{\text{Fr}}. \end{aligned} \quad (7)$$

В окрестности твердых границ, в силу условий прилипания жидкости, ее скорость стремится к нулю вместе с инерционными членами. В то же время частицы продолжают падать под действием силы тяжести. Следовательно, в уравнениях (5) вблизи твердых стенок из-за наличия слагаемых вида  $\bar{\mathbf{w}}_s \cdot \nabla \bar{u}$  и  $\bar{\mathbf{w}}_s \cdot \nabla \bar{v}$  поправки к инерционным членам могут стать сравнимыми и даже больше первых слагаемых. Такая же ситуация может возникнуть и в случае течений с малыми числами Рейнольдса, которые характерны для различных типов отстойников и очистных сооружений.

В указанных случаях в движении жидкости определяющую роль начинают играть вязкие силы. Поэтому значение различных слагаемых в уравнениях (5) следует оценивать в сравнении с вязкими членами. Нетрудно видеть, что в области малых  $\text{Re}$  отброшенные выше слагаемые будут малы, если будет выполнено неравенство

$$\frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\delta V}{V} \ll \frac{1}{\text{Re}} = \frac{\mu}{(\rho_l + \rho_s)LV}. \quad (8)$$

При одновременном выполнении неравенств (6) и (8) уравнения (7) можно использовать во всей области течения. Если в качестве масштаба длины в (8) выбрать такое расстояние  $L$ , на котором в окрестности твердой границы  $\text{Re} = 1$ , то оба неравенства совпадут по форме. Однако по смыслу эти неравенства совершенно различны и выполняются для разных масштабов. В неравенстве (6) параметры  $V$  и  $L$  относятся к области течения при больших числах Рейнольдса, в неравенство (8) входят масштабы, характеризующие область течения при малых  $\text{Re}$ .

В случае медленного стоксовского течения во всей области решения задачи в уравнениях (7) можно пренебречь инерционными членами, таким образом, при  $\text{Re} \ll 1$  ограничимся решением простой системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{v} - \frac{1}{\text{Fr}}. \end{aligned}$$

Заключая рассмотрение движения двухфазной смеси, заметим, что полученная выше система уравнений (7) описывает равновесную (без отставания частиц по скорости) конвекцию двухфазной смеси, обусловленную различным воздействием силы тяжести на элементы смеси с различной суммарной локальной плотностью  $\rho_l + \rho_s$ .

Таким образом, свободная конвекция двухфазной смеси, состоящей из малых частиц и несжимаемой жидкости, при условиях (6) и (8) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \rho_s + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_s &= 0, \\ (\rho_l + \rho_s) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \Delta u, \\ (\rho_l + \rho_s) \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \Delta v - g(\rho_l + \rho_s), \\ u_s &= u - \tau \frac{du}{dt}, & v_s &= v - \tau \left[ \frac{dv}{dt} - g \left( 1 - \frac{\rho_l^0}{\rho_s^0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае, когда неравенства (6) и (8) выполнены ввиду малости массовой концентрации частиц  $\rho_s$ , возможны дальнейшие упрощения этих уравнений.

Система уравнений (9) в части учета влияния частиц на конвекцию двухфазной смеси напоминает уравнения глубокой конвекции [1–4]. Однако, в отличие от последних, она обоснована с учетом неравенств (6) и (8) для всех чисел Рейнольдса.

**Практическое приложение модели.** В качестве примера использования предлагаемой модели рассмотрим осаждение частиц угольного шлама в жалюзийном отстойнике [5]. Схема ячейки отстойника изображена на рис. 1. Она представляет собой параллелограмм высотой 1 м и шириной 0,1 м, угол наклона пластин  $60^\circ$ . Входной канал высотой 0,1 м находится снизу на левой стороне, выходной канал того же размера — вверху на правой стороне. Вода поднимается вдоль планок жалюзи. Размер частиц от 2 до 60 мкм, их концентрация от 0,2 до 5 кг/м<sup>3</sup>. Частицы осаждаются по всей высоте планок жалюзи: на нижней части — тяжелые, на верхней — более легкие. Согласно экспериментам число Рейнольдса при обтекании частиц  $Re \approx 1$ . Поэтому сопротивление жидкости движению частиц можно описывать законом Стокса.

Оценим время релаксации частиц угля в воде. В случае стоксовского сопротивления оно будет выражаться формулой  $\tau = d_s^2 \rho_s^0 / (18\mu)$ . Плотность угля  $\rho_s^0 = 1700$  кг/м<sup>3</sup>, диаметр частиц  $d_s = 5 \cdot 10^{-5}$  м, вязкость воды  $\mu = 1,42 \cdot 10^{-3}$  Па·с (при  $T = 280$  К). Время релаксации частиц угля  $\tau \approx 1,7 \cdot 10^{-4}$  с. Учитывая малость параметра  $\tau$ , в формуле (2) можно пренебречь всеми членами, содержащими время релаксации во второй степени.

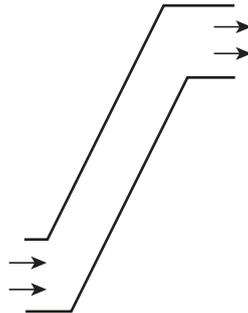


Рис. 1. Схема ячейки отстойника очистной установки

Таким образом, в задачах об осаждении частиц угля диаметром до 50 мкм в воде движение частиц можно считать стационарным и скорость частицы вычислять по формуле  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u} + \tau \mathbf{F} - \tau d\mathbf{u}/dt$ . Заметим далее, что, как правило, в отстойниках ускорение несущей жидкости пренебрежимо мало по сравнению с ускорением свободного падения. Следовательно, скорость частиц можно определять по формуле

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{ss},$$

где  $\mathbf{u}_{ss} = \tau \mathbf{g}(1 - \rho_l^0/\rho_s^0)$  — равновесная скорость осаждения частицы.

Помимо времени релаксации необходимо проверить выполнение неравенств (6) и (8). В этих неравенствах в роли масштаба запаздывания частиц по скоростям будет установившаяся скорость падения  $\delta V = u_{ss} = 1,9 \cdot 10^{-4}$  м/с. Масштаб скорости жидкости можно получить, зная расход взвеси через установку ( $0,16$  м<sup>3</sup>/ч). Средняя скорость потока жидкости составляет  $u = 4,4 \cdot 10^{-5}$  м/с. Число Рейнольдса течения между жалюзи будет  $Re \approx 3$ . Сделав необходимые вычисления, получим, что неравенство (6) соответствует соотношению  $1,3 \cdot 10^{-2} \ll 1$ , а (8) эквивалентно неравенству  $0,013 \ll 0,32$ . Таким образом, для течения между жалюзи при заданном расходе взвеси неравенства (6) и (8) выполняются во всей области решения. Малость времени релаксации частиц и выполнение указанных соотношений позволяют применять систему уравнений (9) для описания движения взвеси частиц в воде. Эта система, в отличие от исходной, не содержит малых параметров при производных (не является “жесткой”), что позволяет в случае малых частиц значительно сократить время расчета.

В переменных завихренность — функция тока в декартовых координатах система уравнений (9), описывающая процесс осаждения мелких частиц с учетом обратного влияния частиц на жидкость, может быть записана в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} = g \frac{1 - \rho_s^0/\rho_l^0}{\rho_l^0} \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + v \Delta \zeta,$$

$$\Delta \psi = \zeta,$$

где  $\zeta = \partial u/\partial z - \partial v/\partial x$  — завихренность;  $\psi$  — функция тока, заданная по законам  $\partial \psi/\partial z = u$ ,  $\partial \psi/\partial x = -v$ . Функция  $\rho_s$  удовлетворяет уравнению переноса субстанции

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s u_s)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_s v_s)}{\partial z} = 0.$$

Расчет уравнений переноса вихря и твердой фракции проводился по конечно-разностной схеме Мак-Кормака с введением в алгоритм искусственной вязкости [6]. Уравнение для функции тока решалось явным конечно-разностным методом верхней релаксации. Достоверность результатов контролировалась путем расчета входного и выходного потоков частиц, причем выходной поток складывался из осевших и вышедших из канала частиц. На сетке  $10 \times 100$  их различие не превышало 10 %.

На рис. 2 показаны линии тока жидкости между жалюзи отстойника при различной концентрации частиц. Видно, что более тяжелая двухфазная смесь стремится распространиться по дну отстойника. На рис. 3 приведены граничные траектории частиц, движущихся между жалюзи. Верхняя траектория соответствует частицам размером 7 мкм, средняя — 15 мкм, нижняя — 30 мкм. Видно, что вблизи жалюзи частицы, вследствие стремления к нулю скорости несущего вязкого потока, начинают падать под действием силы тяжести.

Эффективность отстойника определяется минимальным размером улавливаемых частиц. Поэтому основное внимание уделяется анализу гранулометрического состава частиц, осевших на верхней части планок жалюзи (10 % от их площади). Результаты расчета

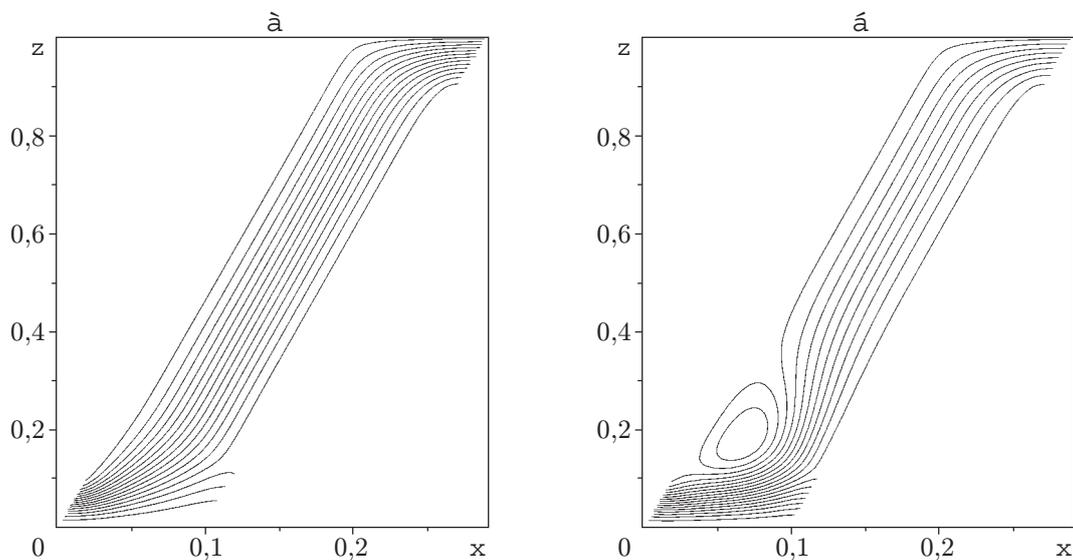


Рис. 2. Линии тока жидкости при концентрации частиц  $1 \text{ кг/м}^3$  (а) и  $5 \text{ кг/м}^3$  (б)

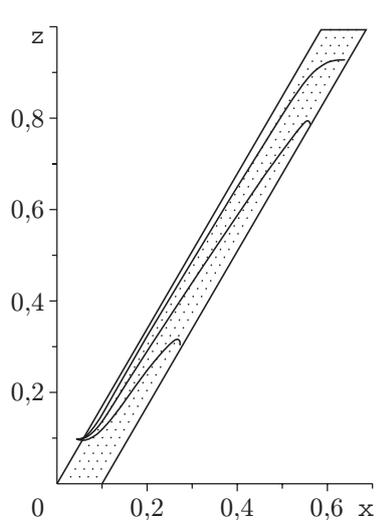


Рис. 3. Траектория частиц

Рис. 3. Траектория частиц

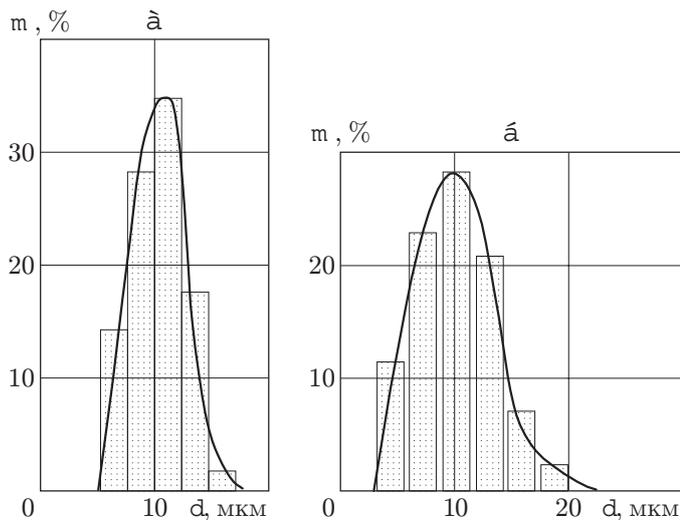


Рис. 4

Рис. 4. Гранулометрический состав частиц, осевших в контрольном месте:

а — расчет; б — эксперимент

осаждения частиц на верхней части планок жалюзи показаны на рис. 4,а. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов (рис. 4,б) показывает их качественное соответствие.

**Заключение.** Разработанная математическая модель достаточно хорошо описывает осаждение крупнодисперсной твердой фракции в жидкости и может быть использована при проектировании очистных сооружений в угледобывающей, горно-обогатительной отраслях промышленности и тонкослойных сгустителей различного применения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ogura V., Phillips N. A.** Scale analysis at deep and shallow convection in the atmosphere // J. Atm. Sci. 1962. V. 19, N 2. P. 173–179.
2. **Алаудинов М.** Численное моделирование процесса глубокой конвекции // Метеорология и гидрология. 1979. № 10. С. 41–50.
3. **McCaffery S. J., Elliott L., Ingham D. B.** Enhanced sedimentation in inclined fracture channels // Topics in Engineering. V. 32. Southampton (UK); Boston (USA): Comput. Mech. Publ., 1998. P. 87–94.
4. **Дрофа О. В.** Двухмерная численная модель конвекции с параметризацией микрофизических процессов // Метеорология и гидрология. 1998. № 9. С. 41–50.
5. **Дьяченко Н. Н., Пермяков О. Е., Андреев Г. Г. и др.** Анализ работы очистных сооружений и экспериментальных данных // Отчет НИР. 1995. № ГР02.9.60002192.
6. **MacCormac R. W.** The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper. 1969. N 354. P. 1–8.

*Поступила в редакцию 25/XII 2003 г.,  
в окончательном варианте — 13/IV 2004 г.*

---