

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОКА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО КАНАЛУ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Б. Ватажин

(Москва)

Для определения характеристик магнитогидродинамических устройств необходимо решение задач о распределении тока в каналах с диэлектрическими стенками и каналах с электродами конечной длины.

Ряд задач для канала с диэлектрическими стенками без учета анизотропии электропроводности был рассмотрен в работах [1-2]. В работе [2] дано решение для случая постоянной по сечению канала скорости и магнитного поля, постоянного в одной половине канала и равного нулю в другой половине канала. В статье [1] приведено решение для случая произвольного задания магнитного поля и косинусоидального профиля скорости. С. А. Регирером получено общее решение задачи при помощи преобразования Фурье по продольной координате при произвольных профилях скорости и распределении магнитного поля. Во всех перечисленных работах предполагалось, что электропроводность во всем канале постоянна. Это условие оказывается весьма жестким на практике, так как электропроводности в зонах входа (выхода) в магнитное поле и непосредственно в зоне магнитного поля могут сильно отличаться. Один пример учета изменения электропроводности был рассмотрен в работе [1].

В § 1-2 статьи дается метод решения задачи о распределении тока в канале с диэлектрическими стенками при произвольном профиле скорости и произвольных зависимостях электропроводности и магнитного поля от продольной координаты.

Во многих приложениях движущаяся по каналу среда обладает анизотропной электропроводностью. Точные решения для таких течений удается получить лишь в частных случаях, когда граничные электромагнитные условия предполагаются однородными [4-6]. Если же магнитное поле и электропроводность боковых стенок изменяются по длине канала, получение точных решений в большинстве случаев оказывается практически невыполнимо, и тогда для решения таких пространственных задач могут так же, как при отсутствии эффекта Холла, применяться упрощенные модели [8].

Все решения пространственных задач с анизотропной электропроводностью и неоднородными краевыми условиями [7-10] получены или при помощи приближенного задания профиля скорости, или соответствуют специальному случаю, когда уравнения гидродинамики и электродинамики разделяются и могут решаться последовательно.

В работах [7-8] рассмотрен плоский канал $|x| < \infty, |y| < \delta$ с сегментированными электродами без учета выноса или обрыва магнитного поля за область электродов; принято, что $\mathbf{V} = (0, 0, -B_0)$, $B_0 = \text{const}$, $R_m \ll 1$, $\sigma = \text{const}$, параметр Холла $\omega\tau = \text{const}$.

В работе [9] изучается случай, когда стенки в левой половине канала представляют собой диэлектрики, а в правой половине — бесконечно длинные электроды, при предположении $\mathbf{V} = (0, 0, -B_0)$, $R_m \ll 1$, $\sigma = \text{const}$, $\omega\tau = \text{const}$. Случай электродов бесконечной длины при условии $\sigma = 0$ в левой половине канала и выполнении предположений работы [9] для правой половины канала ранее был рассмотрен в работе [2]. В задачах [7-9] электромагнитная сила потенциальна, и поэтому для скорости могли быть использованы гидродинамические профили. В работах [7, 9] скорость $\mathbf{v} = (V = \text{const}, 0, 0)$, в работе [8] предполагался любой профиль скорости.

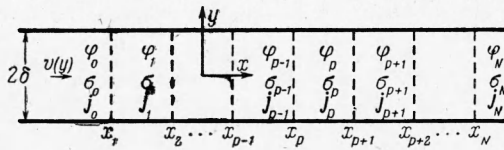
В статье [10] разобран случай, когда в левой половине канала стенки являются диэлектриками, $\mathbf{V} = 0$, $\sigma = \text{const}$, $\omega\tau = 0$, а в правой половине канала $\mathbf{V} = (0, 0, -B_0)$, $R_m \ll 1$, $\sigma = \text{const}$, $\omega\tau = \text{const}$, а на стенках выполняется некоторое приближенное условие, переходящее в предельных случаях в условие для сплошных электродов и в условие для секционированных электродов с бесконечно малым шагом сегментации. Скорость по всей длине канала предполагалась постоянной.

Во всех перечисленных работах длина участка, занятого либо сплошным электродом, либо сегментированными электродами, предполагалась бесконечно большой. Ниже, в § 3-11, приведены решения, учитывающие конечную длину этого участка.

Задача о распределении тока в канале с двумя такими участками на стенках в случае, когда магнитное поле и электропроводность в канале постоянны, рассмотрена в § 3—7, а в случае, когда электропроводность отлична от нуля только в электродной зоне, — в § 8—11.

Распределение тока в канале с диэлектрическими стенками

§ 1. Рассмотрим плоский канал $-\infty < x < +\infty$, $-\delta < y < +\delta$ с диэлектрическими стенками, по которому с известной скоростью $\mathbf{v} = (V(y), 0, 0)$ движется электропроводная среда¹. Предположим, что магнитные числа Рейнольдса намного меньше единицы, а внешнее магнитное поле определяется зависимостью $\mathbf{B} = (0, 0, -B(x))$. Будем также считать, что электропроводность изотропна, изменяется только в осевом направлении и представляется заданной функцией $\sigma(x)$. Распределение электрического тока \mathbf{j} и потенциала при сделанных предположениях описывается уравнениями [3]



Фиг. 1

$$\begin{aligned} j_x &= -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} & (1.1) \\ j_y &= -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} \sigma V B \\ \Delta \varphi &= -\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{dV}{dy} B \end{aligned}$$

К системе (1.1) должны быть добавлены граничные условия непротекания тока через диэлектрические стенки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{c} BV \quad (-\infty < x < +\infty, y = \pm \delta) \quad (1.2)$$

Внутри канала допускаются линии разрыва $x = x_p$, $-\delta < y < \delta$, $p = 1, \dots, N$, которые заменяют узкие области сильного изменения внешнего магнитного поля или электропроводности (фиг. 1). Резкое изменение электропроводности на практике наблюдается при введении через стенки канала легко ионизируемых веществ для увеличения проводимости среды. На линиях разрыва должны выполняться соотношения, следующие из законов сохранения нормальной к поверхности разрыва составляющей вектора плотности электрического тока и касательной составляющей вектора электрического поля. Эти соотношения приводят к условиям

$$\left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x_p-0} = \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x_p+0}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{x_p-0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{x_p+0} \quad (p = 1, \dots, N) \quad (1.3)$$

Относительно определенной при $-\delta \leq y \leq +\delta$ функции $V(y)$ будем предполагать, что она непрерывно дифференцируема, четная и удовлетворяет условию $V(-\delta) = V(+\delta) = 0$. Физический профиль скорости обычно удовлетворяет всем этим требованиям. Построим следующую функцию $\psi(y)$, определенную при $-2\delta \leq y \leq +2\delta$:

$$\psi(y) = \begin{cases} -V(2\delta + y) & (-2\delta \leq y \leq -\delta) \\ V(y) & (-\delta \leq y \leq +\delta) \\ -V(2\delta - y) & (\delta \leq y \leq 2\delta) \end{cases}$$

и периодически продолжим ее с периодом 4δ . Полученная периодическая функция оказывается четной и непрерывной вместе со своей производной.

¹ Задача решается в приближении, изложенном в работе [3].

водной. Поэтому она может быть представлена своим рядом Фурье, один раз допускаящим почленное дифференцирование.

При $-\delta \leq y \leq +\delta$ функция $\psi(y)$ совпадает с $V(y)$. Отсюда легко показать, что $V(y)$ представляется рядом

$$V(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_{0\nu} \cos \frac{r_\nu y}{\delta}, \quad v_{0\nu} = \frac{2}{\delta} \int_0^\delta V(y) \cos \frac{r_\nu y}{\delta} dy, \quad r_\nu = \frac{\pi}{2} (2\nu - 1) \quad (1.4)$$

Пусть канал линиями разрыва $x = x_p$, $-\delta < y < +\delta$ ($p = 1, \dots, N$) разбивается на области

$$x_p < x < x_{p+1}, \quad -\delta < y < +\delta \quad (p = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = -\infty, \quad x_{N+1} = +\infty)$$

Потенциал, вектор плотности электрического тока и электропроводность в этих областях будем обозначать через φ_p , \mathbf{j}_p , σ_p соответственно. Для потенциалов φ_p будем искать решение в виде

$$\varphi_p(x, y) = -\frac{\delta}{c} B_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} v_{0\nu} r_\nu \beta_{p\nu}(\xi) \sin \frac{r_\nu y}{\delta} \quad (B = B_0 f(\xi))$$

$$(\xi = x/\delta; \xi_p \leq \xi \leq \xi_{p+1}; p = 0, 1, \dots, N) \quad (1.5)$$

Граничные условия (1.2) удовлетворяются при этом автоматически. Подставляя (1.5) в (1.1), используя представление (1.4), для функций $\beta_{p\nu}$ получим следующие обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\beta_{p\nu}'' + (\ln \sigma_p)' \beta_{p\nu}' - r_\nu^2 \beta_{p\nu} = f \quad (\xi_p \leq \xi \leq \xi_{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, N) \quad (1.6)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по ξ .

Рассмотрим необходимые для решения системы (1.6) граничные условия. Если $f(-\infty) = 0$ или $f(+\infty) = 0$, то

$$\varphi_0(-\infty) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_N(+\infty) = 0$$

и, следовательно,

$$\beta_{0\nu}(-\infty) = 0 \quad \text{или} \quad \beta_{N\nu}(+\infty) = 0$$

Если $f(-\infty) = \text{const}$ или $f(+\infty) = \text{const}$, то на бесконечности происходит разделение электрического заряда

$$\varphi_0(-\infty, y) = \frac{1}{c} B(-\infty) \int_0^y V dy$$

или

$$\varphi_N(+\infty, y) = \frac{1}{c} B(+\infty) \int_0^y V dy$$

Отсюда следует, что

$$\beta_{0\nu}(-\infty) = -f(-\infty)/r_\nu^2$$

или

$$\beta_{N\nu}(+\infty) = -f(+\infty)/r_\nu^2$$

На линиях разрыва из условий (1.3) находим

$$\beta_{p-1,\nu} = \beta_{p\nu}, \quad \sigma_{p-1} \beta'_{p-1,\nu} = \sigma_p \beta'_{p\nu} \quad (\xi = \xi_p, \quad p = 1, \dots, N) \quad (1.7)$$

Эти $2N$ условия и два условия на бесконечности достаточны для решения $N + 1$ уравнений (1.6), соответствующих каждому индексу ν .

Для определения джоулевой диссипации Q в канале имеем

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{p=0}^N Q_p, \quad Q_p = \iint_{(p)} \frac{j_p^2}{\sigma_p} dx dy = \iint_{(p)} \left\{ -\frac{v}{c} (\mathbf{j}_p \times \mathbf{B}) - \operatorname{div} (\varphi_p \mathbf{j}_p) \right\} dx dy = \\ &= - \iint_{(p)} \frac{v}{c} (\mathbf{j}_p \times \mathbf{B}) dx dy + \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_p(x_p, y) j_{px}(x_p, y) dy - \\ &\quad - \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_p(x_{p+1}, y) j_{px}(x_{p+1}, y) dy \end{aligned}$$

Суммируя все Q_p , предполагая, что токи на бесконечности отсутствуют, и используя условия (1.3), найдем

$$Q = \sum_{p=0}^N \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{V i_{py}}{c} B dx dy$$

Подставляя сюда величину j_{py} , вычисленную согласно (1.5), заменяя $V(y)$ рядом (1.4) и производя интегрирование по y , получим

$$Q = \frac{\delta^2}{c^2} B_0^2 \sum_{p=0}^N \sum_{v=1}^{\infty} v_{0v}^2 \int_{\xi_p}^{\xi_{p+1}} f(\xi) (\sigma_p \beta'_{pv})' d\xi \quad (1.8)$$

Для приближенного решения (1.1) при произвольной непрерывной зависимости $\sigma(x)$ область определения $\sigma(x)$ разбивается на $(N+1)$ участков, в каждом из которых $\sigma(x)$ заменяется постоянной или экспонентой (при этом уравнения (1.6) решаются элементарно).

§ 2. Рассмотрим некоторые частные случаи задания магнитного поля и электропроводности. Пусть магнитное поле постоянно по всей длине канала: $f \equiv 1$. Из (1.5) и (1.6) находим

$$\beta_v = -\frac{1}{r_v^2}, \quad \varphi = \frac{\delta}{c} B_0 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v_{0v}}{r_v} \sin \frac{r_v y}{\delta}, \quad \mathbf{j} \equiv 0 \quad Q = 0$$

В канале происходит разделение электрического заряда и отсутствуют токи. Пусть магнитное поле и электропроводность таковы

$$B(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ B_0 & (x > 0) \end{cases}, \quad \sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 & (x < 0) \\ \sigma_1 & (x > 0) \end{cases}$$

Электропроводность $\sigma_0 = \text{const}$ соответствует величине средней электропроводности в зоне входа (выхода), а $\sigma_1 = \text{const}$ средней электропроводности в зоне магнитного поля. Из уравнений (1.6), соотношений (1.7) и условий на бесконечности получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \beta''_{0v} - r_v^2 \beta_{0v} &= 0 \quad (\xi \leq 0), \quad \beta''_{1v} - r_v^2 \beta_{1v} = 1 \quad (\xi \geq 0) \\ \sigma_0 \beta'_{0v}(0) &= \sigma_1 \beta'_{1v}(0), \quad \beta_{0v}(0) = \beta_{1v}(0), \quad \beta_{0v}(-\infty) = 0, \quad \beta_{1v}(+\infty) = -1/r_v^2 \end{aligned}$$

Решение этой системы элементарно. Для джоулевой диссипации найдем

$$Q = \frac{\sigma_1 \sigma_0 \delta^2 B_0^2}{(\sigma_1 + \sigma_0) c^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v_{0v}^2}{r_v} \quad (2.1)$$

Определим величину Q при различных профилях скорости. Для косинусоидального профиля $V = 0.5 \pi V_0 \cos(\pi y / 2\delta)$, где V_0 — средняя по сечению канала скорость, из (2.1) легко находим

$$v_{01} = 0.5 \pi V_0, \quad v_{0v} = 0 \quad (v = 2, 3, \dots), \quad Q = \frac{\pi \sigma_1 \sigma_0 \delta^2 B_0^2 V_0^2}{2(\sigma_1 + \sigma_0) c^2} \quad (2.2)$$

Рассмотрим, следуя С. А. Региреру, «модельный» профиль скорости

$$V = \frac{V_0 g [\operatorname{ch} q - \operatorname{ch}(qy/\delta)]}{q \operatorname{ch} q - \operatorname{sh} q} \quad (2.3)$$

Здесь q — параметр семейства профилей ($0 \leq q < \infty$), характеризующий их наполненность. Нетрудно заметить, что профиль (2.3) заимствован из задачи Гартмана. Однако параметр q в (2.3) не имеет никакого отношения к магнитному полю. При $q = 0$ профиль (2.3) представляет собой пуазейлевский профиль, при $q = \infty$ скорость не изменяется по сечению канала. При помощи формул (1.4) и (2.1) для профиля (2.3) находим

$$v_{0v} = \frac{V_0 (-1)^{v+1} 2q^3 \operatorname{ch} q}{r_v (r_v^2 + q^2) (q \operatorname{ch} q - \operatorname{sh} q)}, \quad Q = \frac{4\sigma_0 \sigma_1 \delta^2 B_0^2 V_0^2 q^6 \operatorname{ch}^2 q}{(\sigma_0 + \sigma_1) c^2 (q \operatorname{ch} q - \operatorname{sh} q)^2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{r_v^3 (q^2 + r_v^2)^2} \quad (2.4)$$

В случае пуазейлевского профиля ($q = 0$) из (2.4) находим

$$Q = \frac{36 (2^7 - 1) S_7 \sigma_0 \sigma_1 \delta^2 B_0^2 V_0^2}{\pi^3 (\sigma_0 + \sigma_1) c^2} \quad \left(S_7 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^7} = 1.008 \right) \quad (2.5)$$

В случае скорости, постоянной по сечению ($q = \infty$), получаем

$$Q = \frac{32 \Sigma \sigma_0 \sigma_1 \delta^2 B_0^2 V_0^2}{\pi^3 (\sigma_0 + \sigma_1) c^2} \quad \left(\Sigma = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)^3} = 1.052 \right) \quad (2.6)$$

Величины скорости на оси канала при косинусоидальном, пуазейлевском и постоянном профилях скорости относятся как $\pi : 3 : 2$. Соответствующие величины джоулевых диссипаций при одинаковых электропроводностях, магнитном поле и средней скорости, согласно формулам (2.2), (2.5) и (2.6), относятся как $1.57 : 1.53 : 1.09$. С ростом наполненности профиля величина джоулевой диссипации уменьшается.

Отметим, что при произвольном профиле скорости величина диссипации пропорциональна величине $\sigma_0 \sigma_1 / (\sigma_0 + \sigma_1)$. Этот вывод в работе [1] был сделан только для случая $V \equiv \text{const}$.

Пусть зависимости магнитного поля и электропроводности от длины канала имеют вид

$$B(x) = \begin{cases} B_0 e^{\mu x} & (x \leq 0) \\ B_0 & (x \geq 0) \end{cases}, \quad \sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 e^{2\mu x} & (x < 0) \quad (\sigma_0 = \text{const}) \\ \sigma_1 & (x > 0) \quad (\sigma_1 = \text{const}) \end{cases} \quad (2.7)$$

Для решения задачи из (1.6) и (1.7) получаем систему ($\chi \geq 0, \mu \geq 0$)

$$\beta''_{0v} + 2\chi \beta'_{0v} - r_v^2 \beta_{0v} = e^{\xi \mu} \quad (\xi \leq 0), \quad \beta''_{1v} - r_v^2 \beta_{1v} = 1 \quad (\xi \geq 0) \quad (2.8)$$

$$\sigma_0 \beta'_{0v}(0) = \sigma_1 \beta'_{1v}(0), \quad \beta_{0v}(0) = \beta_{1v}(0), \quad \beta_{0v}(-\infty) = 0, \quad \beta_{1v}(+\infty) = -1/r_v^2$$

решив которую, находим джоулеву диссипацию

$$Q = \frac{\sigma_0 \delta^2}{c^2} B_0^2 \sum_{v=1}^{\infty} \mu v_{0v}^2 \left\{ \frac{[\sigma_0 r_v + \sigma_1 (\kappa_v + \chi + \mu)] [(\kappa_v - \chi)(\mu + 2\chi) - r_v^2]}{r_v (\mu^2 + 2\mu\chi - r_v^2) [\sigma_0 (\kappa_v - \chi) + \sigma_1 r_v] (\kappa_v + \chi + \mu)} + \right. \quad (2.9)$$

$$\left. + \frac{(\mu + 2\chi)(\kappa_v - \chi - \mu)}{2(\mu + \chi)(\mu^2 + 2\mu\chi - r_v^2)(\kappa_v + \chi + \mu)} \right\} \cdot \left(\kappa_v = \sqrt{\chi^2 + r_v^2}, \quad r_v = \frac{\pi}{2} (2v-1) \right)$$

Рассмотрим различные частные случаи формулы (2.9). Если $\mu = 0$, то магнитное поле постоянно всюду в канале и $Q = 0$. При $\sigma_0 = 0$ диссипация Q равна нулю: токи не могут перетекать в левую половину

канала, а в правой, вследствие постоянства магнитного поля, происходит разделение электрического заряда. При $\mu = \infty$ имеем

$$B(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ B_0 & (x > 0), \end{cases} \quad Q = \frac{\sigma_0 \sigma_1 \delta^2}{c^2} B_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_{0\nu}^2}{\sigma_0 r_\nu + \sigma_1 (\chi + r_\nu)} \quad (2.10)$$

При $V \equiv \text{const}$ из (2.10) получаем формулу, найденную в работе [1]

$$Q = \frac{32 \sigma_1 \sigma_0 \delta^2 B_0^2 V_0^2}{c^2 \pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{(2\nu-1)^2 [\sigma_0 \pi (2\nu-1) + \sigma_1 (2\chi + \sqrt{4\chi^2 + \pi^2 (2\nu-1)^2})]\}^{-1}$$

С ростом скорости уменьшения электропроводности в зоне входа (увеличением параметра χ) диссипация, как следует из формулы (2.10), монотонно убывает, обращаясь в нуль при $\chi = \infty$.

Наконец, рассмотрим случай постоянной электропроводности $\chi = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Из (2.9) находим

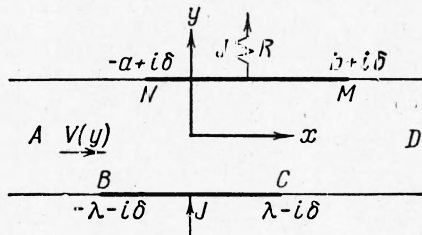
$$Q = \frac{\sigma \delta^2}{c^2} B_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu v_{0\nu}^2}{2r_\nu (\mu + r_\nu)} \quad (2.11)$$

Параметр μ характеризует быстроту спада магнитного поля вне зоны, где поле постоянно: при $\mu = 0$ поле постоянно всюду в канале, при $\mu = \infty$ величина вектора магнитного поля при $\xi < 0$ равна нулю. Как видно из формулы (2.11), величина джоулевой диссипации с ростом μ монотонно возрастает от нуля до значения

$$Q = \frac{\sigma \delta^2}{2c^2} B_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_{0\nu}^2}{r_\nu}$$

Распределение тока в канале с электродами конечной длины при анизотропии электропроводности

§ 3. Рассмотрим плоский канал $-\infty < x < +\infty$, $-\delta < y < +\delta$, стенки которого AB , CD , DM , NA являются диэлектриками, а участки BC и NM моделируют электроды (фиг. 2). Предположим, что внешнее магнитное поле $\mathbf{V} = (0, 0, -B_0)$, $B_0 = \text{const}$ и $R_m \ll 1$, $\sigma = \text{const}$, $\omega\tau = \text{const}$. При наличии такого поля электромагнитная сила потенциальна, и распределение скоростей в случае несжимаемой жидкости определяется из гидродинамических уравнений [3]. Так, если жидкость невязкая, то $\mathbf{v} = (V_0, 0, 0)$, $V_0 = \text{const}$, если же течение вязкой жидкости с постоянным коэффициентом динамической вязкости ламинарное, то



Фиг. 2

профиль скорости пуазейлевский. Для общности будем считать, что распределение скорости определяется некоторой произвольной зависимостью $\mathbf{v} = (V(y), 0, 0)$.

Распределение потенциала ϕ и тока \mathbf{j} в канале определяется из системы уравнений [3]

$$\begin{aligned} i_x &= \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \omega \tau \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c} V B_0 \right) \right] \\ i_y &= \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c} V B_0 + \omega \tau \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введя функцию $u(x, y)$ по формуле

$$u = \varphi - \frac{1}{c} B_0 \int_0^y V dy \quad (3.2)$$

из системы (3.1) получим уравнения (3.3)

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \omega \tau \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad j_y = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \omega \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \Delta u = 0$$

Согласно (3.3) можно ввести аналитическую функцию

$$w = u + iv, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4)$$

Ток J , протекающий через контур, соединяющий какие-либо точки 1 и 2, равен

$$J = \int_1^2 j_n ds = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2} [(v + \omega \tau u)_2 - (v + \omega \tau u)_1] \quad (3.5)$$

где вектор нормали \mathbf{n} получается поворотом вектора касательной, направленного вдоль контура в сторону точки 2, на 90° против направления вращения часовой стрелки.

Рассмотрим граничные условия. На бесконечности ($x \rightarrow \pm \infty$) происходит разделение электрического заряда, токи равны нулю, и, следовательно, $w \rightarrow \text{const}$. Так как функции u и v определяются с точностью до постоянной, можно считать, что

$$w(A) = 0, \quad w(D) = \text{const} \quad (3.6)$$

На стенках-диэлектриках отсутствует ток j_y . При помощи (3.3) находим

$$v + \omega \tau u = 0 \quad \text{на } AB, NA; \quad v + \omega \tau u = m_1 = \text{const} \quad \text{на } CD, DM \quad (3.7)$$

Перейдем к граничным условиям на участках BC и NM . Если стенки на этих участках представляют собой сплошные электроды, то на них потенциал, а, следовательно, и величина u остаются постоянными и равными, например, потенциалу и величине u в точках B и N соответственно

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi(N), \quad u = \varphi(N) - \frac{1}{c} B_0 \int_0^{\delta} V dy & \quad \text{на } NM \\ \varphi = \varphi(B), \quad u = \varphi(B) + \frac{1}{c} B_0 \int_{-\delta}^0 V dy & \quad \text{на } BC \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если эти участки представляют собой секционированные электроды с бесконечно малым шагом сегментации, так что длина электродов и диэлектрических промежутков стремится к нулю, можно поставить условие $j_x = 0$ на BC , NM , или

$$\begin{aligned} u - \omega \tau v = \text{const} = u(B) (1 + \omega^2 \tau^2) & \quad \text{на } BC \\ u - \omega \tau v = \text{const} = u(N) (1 + \omega^2 \tau^2) & \quad \text{на } NM \end{aligned} \quad (3.9)$$

Следуя работе [10], на участках BC и NM можно ввести более общее, «модельное», условие

$$\begin{aligned} u - \gamma \omega \tau v = \text{const} = m_2 & \quad \text{на } BC \\ u - \gamma \omega \tau v = \text{const} = m_3 & \quad \text{на } NM \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \gamma = \text{const} \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \end{array} \right) \quad (3.10)$$

При $\gamma = 0$ из (3.10) получаем условия (3.8) для сплошных электродов, при $\gamma = 1$ условия (3.10) переходят в условия (3.9) для сегментированных электродов с бесконечно малым шагом сегментации.

Дальнейшее рассмотрение проводится применительно к магнитогидродинамическому генератору. Определим его интегральные характеристики: снимаемый ток J , мощность N° , джоулеву диссипацию в канале Q и эффективность η . Суммарный снимаемый ток J находится при помощи (3.5) и (3.10)

$$J = \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, -\delta) dx = \int_{-a}^{+b} j_y(x, \delta) dx = \frac{\sigma(1 + \gamma\omega^2\tau^2)[v(C) - v(B)]}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.11)$$

Для мощности N° имеем

$$\begin{aligned} N^\circ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{j}) dx dy = \int_{-a}^{+b} \varphi(x, \delta) j_y(x, \delta) dx - \int_{-\lambda}^{+\lambda} \varphi(x, -\delta) j_y(x, -\delta) dx = \\ &= J\mathcal{E} + \int_{-a}^b u(x, \delta) j_y(x, \delta) dx - \int_{-\lambda}^{+\lambda} u(x, -\delta) j_y(x, -\delta) dx \\ &\quad \left(\mathcal{E} = \frac{1}{c} B_0 \int_{-\delta}^{+\delta} V dy \right) \end{aligned}$$

При выводе этого соотношения было учтено, что токи слева и справа на бесконечности обращаются в нуль. Воспользовавшись тем, что на BC и NM согласно (3.3) и (3.10)

$$j_y = \frac{\sigma(1 + \gamma\omega^2\tau^2)}{\gamma\omega\tau(1 + \omega^2\tau^2)} \frac{\partial u}{\partial x}$$

получим

$$\begin{aligned} N^\circ &= J\mathcal{E} + \frac{\sigma(1 + \gamma\omega^2\tau^2)}{2\gamma\omega\tau(1 + \omega^2\tau^2)} \{ [u(M) - u(N)] [u(M) + u(N)] + \\ &\quad + [u(B) - u(C)] [u(B) + u(C)] \} \end{aligned}$$

Заменяя разности величин u соответствующими разностями величин v при помощи (3.10), выражая последние через ток J согласно (3.11) и замечая, что $u(B) - u(N) = u(C) - u(M)$, найдем

$$N^\circ = J[\varphi(N) - \varphi(B)] \quad (3.12)$$

Джоулева диссипация

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{j^2}{\sigma} dx dy = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \operatorname{div}(u \mathbf{j}) dx dy = \\ &= \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, -\delta) u(x, -\delta) dx - \int_{-a}^b j_y(x, \delta) u(x, \delta) dx \end{aligned}$$

определяется аналогично предыдущему. Находим

$$Q = J\mathcal{E} - N^\circ \quad \left(\mathcal{E} = \frac{1}{c} B_0 \int_{-\delta}^{+\delta} V dy \right) \quad (3.13)$$

Наконец, эффективность устройства η дается формулой

$$\eta = \mathcal{E}^{-1} [\varphi(N) - \varphi(B)] \quad (3.14)$$

§ 4. Для решения задачи полосу $-\infty < x < +\infty$, $-\delta < y < +\delta$ конформно отобразим на верхнюю полу плоскость плоскости $t = \tau + i\nu$ преобразованием

$$t = i \exp \frac{\pi(z + \lambda)}{2\delta} \quad (4.1)$$

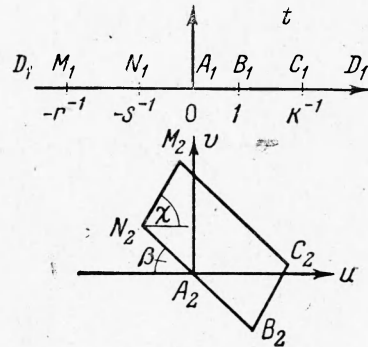
Точки A, B, C, M, N при этом соответственно перейдут в точки $A_1 = (0,0)$, $B_1 = (1,0)$, $C_1 = (k^{-1},0)$, $M_1 = (-r^{-1},0)$, $N_1 = (-s^{-1},0)$ где

$$k = \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{\delta}\right), \quad r = \exp\left(-\frac{\pi(b+\lambda)}{2\delta}\right), \quad s = \exp\left(-\frac{\pi(\lambda-a)}{2\delta}\right) \quad (4.2)$$

Точка D соответствует бесконечно удаленной точке D_1 (фиг. 3). Согласно условиям (3.6), (3.7), (3.10) полоса

$-\infty < x < +\infty$, $-\delta < y < +\delta$ соответствует внутренности параллелограмма $B_2C_2M_2N_2$ в плоскости $w = u + iv$ (фиг. 3). Точка A соответствует точке $A_2(0,0)$, точка D лежит на стороне M_2C_2 .

Решение задачи осуществляется конформным отображением верхней полу плоскости в плоскости t на внутренность параллелограмма в плоскости w при помощи формулы Шварца — Кристоффеля



Фиг. 3

$$w = q e^{i(\pi-\beta)} \int_0^t (t-1)^{\varepsilon-1} (kt-1)^{-\varepsilon} (rt+1)^{\varepsilon-1} (st+1)^{-\varepsilon} dt \quad (4.3)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \omega\tau, \quad \chi = \operatorname{arctg} (1 / \gamma\omega\tau), \quad \varepsilon = 1 - \pi^{-1} (\beta + \chi)$$

По заданной разности $u(B) - u(N) = \mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)]$ определяется постоянная q . Так как $u(B) - u(N) = (N_2A_2 + A_2B_2) \cos \beta$, то

$$q = \frac{\mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)]}{(\theta_1 + \theta_2) \cos \beta} \quad (4.4)$$

Замечая, что $v(C) - v(B) = B_2C_2 \sin \chi$, при помощи формул (3.11), (4.3) и (4.4) получаем

$$J = \frac{\sigma(1 + \gamma\omega^2\tau^2) \theta_3 \{ \mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)] \}}{(\theta_1 + \theta_2) (1 + \omega^2\tau^2)} \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + \gamma^2\omega^2\tau^2}} \quad (4.5)$$

$$\theta_1 = \int_0^1 (1 - \tau)^{\varepsilon-1} (1 - k\tau)^{-\varepsilon} (1 + r\tau)^{\varepsilon-1} (1 + s\tau)^{-\varepsilon} d\tau$$

$$\theta_2 = s^{1-\varepsilon} \int_0^1 (1 - \tau)^{-\varepsilon} (\tau + s)^{\varepsilon-1} (k\tau + s)^{-\varepsilon} (s - r\tau)^{\varepsilon-1} d\tau \quad (4.6)$$

$$\theta_3 = \int_1^{1/k} (\tau - 1)^{\varepsilon-1} (1 - k\tau)^{-\varepsilon} (1 + r\tau)^{\varepsilon-1} (1 + s\tau)^{-\varepsilon} d\tau$$

Величины N°, Q и η определяются по формулам (3.12) — (3.14). Линии электрического тока в канале находятся из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \rho + \omega\tau \cos \rho}{\omega\tau \sin \rho - \cos \rho} \quad (4.7)$$

$$\rho = \frac{\pi y}{2\delta} + \varepsilon (\pi + \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_3) - \alpha_4 - \alpha_2 + \chi - \frac{\pi}{2} \quad (4.8)$$

В формуле (4.8)

$$\alpha_1 = \text{Arc tg} \left\{ -\frac{\cos(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x - \lambda) / 2\delta]}{1 + \sin(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x - \lambda) / 2\delta]} \right\}$$

$$\alpha_2 = \text{Arc tg} \left\{ -\frac{\cos(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x + \lambda) / 2\delta]}{1 + \sin(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x + \lambda) / 2\delta]} \right\}$$

$$\alpha_3 = \text{Arc tg} \frac{\cos(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x + a) / 2\delta]}{1 - \sin(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x + a) / 2\delta]}$$

$$\alpha_4 = \text{Arc tg} \frac{\cos(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x - b) / 2\delta]}{1 - \sin(\pi y / 2\delta) \exp[\pi(x - b) / 2\delta]}$$

$$\left(\text{Arc tg } \xi = \begin{array}{ll} \text{arc tg } \xi & (\xi > 0) \\ \pi - \text{arc tg } |\xi| & (\xi < 0) \end{array} \right)$$

Если зафиксировать величину γ и увеличивать параметр $\omega\tau$ от нуля до бесконечности, то величина ε уменьшается от $\varepsilon = 0.5$ при $\omega\tau = 0$ до $\varepsilon_{\min} = 1 - 2\pi^{-1} \text{arc tg } \gamma^{-0.5}$ при $\omega\tau = \gamma^{-0.5}$ и возрастает до $\varepsilon = 0.5$ при $\omega\tau = \infty$. Рассмотрим частные случаи решения (4.3) — (4.6).

§ 5. Пусть эффект Холла отсутствует ($\omega\tau = 0$, $\varepsilon = 0.5$) и сплошные электроды одинаковой длины расположены симметрично ($r = k$, $s = 1$). Потенциал верхнего электрода по всей длине равен $\varphi(N)$, нижнего — равен $\varphi(B)$, и разность потенциалов, снимаемый ток J и внешняя нагрузка R связаны законом Ома

$$JR = \varphi(N) - \varphi(B) \quad (5.1)$$

Из выражения (4.5) находим J (5.2)

$$J = \sigma\alpha^* \{ \mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)] \} \left(\alpha^* = \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{2K(k)}, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}} \right)$$

В формулах (5.2) величина $K(k)$ представляет собой полный эллиптический интеграл первого рода. Функция $\alpha^*(\lambda/\delta)$ приведена в работе [11]. Объединяя (5.1) и (5.2), найдем выражение для J , а при помощи (3.12) — (3.14) для N° , Q , η найдем известные выражения [11, 12]

$$J = \frac{\sigma\mathcal{E}\alpha^*}{1 + R\sigma\alpha^*}, \quad N^\circ = \frac{\sigma\mathcal{E}^2 R\sigma\alpha^{*2}}{(1 + R\sigma\alpha^*)^2}, \quad Q = \frac{\sigma\mathcal{E}^2\alpha^*}{(1 + R\sigma\alpha^*)^2}, \quad \eta = \frac{R\sigma\alpha^*}{1 + R\sigma\alpha^*} \quad (5.3)$$

§ 6. Пусть на участках BC и NM , имеющих одинаковую длину и расположенных симметрично ($r = k$, $s = 1$), выполняется условие $\gamma = 1$, т. е. $j_x = 0$. Согласно формуле (4.5) найдем, что снимаемый ток J определяется формулой (5.2), полученной без учета эффекта Холла для случая сплошных электродов. Мощность и диссипация даются формулами (3.12), (3.13). Из (4.3), (4.4) находим распределение потенциала

$$w = \frac{\mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)]}{2K(k) \cos \beta} e^{i(\pi - \beta)} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(k^2 t^2 - 1)}} \quad (6.1)$$

Вдоль BC и NM распределение потенциала дается формулами

$$\varphi(x, +\delta) = \frac{1}{c} B_0 \int_0^\delta V dy + u(N) + a(x) \quad \left(\tau = \exp \frac{\pi(x + \lambda)}{2\delta} \right)$$

$$\varphi(x, -\delta) = -\frac{1}{c} B_0 \int_{-\delta}^0 V dy + u(B) + a(x) \quad (|x| < \lambda)$$

$$a(x) = 0.5\omega\tau K^{-1}(k) \{ \mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)] \} \int_1^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2\tau^2)}} \quad (6.2)$$

Как видно из этих формул, разность потенциалов $\varphi(x_1, \delta) - \varphi(x_1, -\delta)$ для симметрично расположенных точек на BC и NM остается постоянной вдоль длины участков BC и NM , в то время как каждый из потенциалов $\varphi(x, \delta)$ и $\varphi(x, -\delta)$ вдоль BC и NM возрастает. Возрастание потенциала приводит к появлению направленного вдоль отрицательной оси x электрического поля, компенсирующего ток Холла.

Ток j_y вдоль BC и NM определяется формулой

$$j_y = \frac{\sigma \pi \{\delta - [\varphi(N) - \varphi(B)]\} \exp[\pi(x + \lambda) / 2\delta]}{4\delta K(k) \sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2\tau^2)}} \quad \left(\tau = \exp \frac{\pi(x + \lambda)}{2\delta} \right) \quad (6.3)$$

и совпадает с током j_y при сплошных электродах и $\omega\tau = 0$. Картина линий тока в канале, как легко показать из (4.7), также полностью совпадает с соответствующей картиной линий тока при $\omega\tau = 0$.

Как уже упоминалось, рассматриваемый режим работы магнито-гидродинамического устройства может соответствовать случаю секционированных электродов с бесконечно малым шагом сегментации. Для его осуществления согласно (6.2) и (6.3) необходимо, чтобы нагрузки распределялись по закону $[\varphi(N) - \varphi(B)] / j_y$. Задание одной из нагрузок определяет величину $\varphi(N) - \varphi(B)$.

§ 7. Пусть участки BC и MN представляют собой сплошные электроды ($\gamma = 0$) и $\omega\tau \neq 0$. При помощи формул (4.5) находим

$$J = \nu \sigma \{\mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)]\}, \quad \nu = \frac{\theta_3}{(\theta_1 + \theta_2) \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (7.1)$$

Здесь θ_i ($i = 1, 2, 3$) определяются формулами (4.6), где

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega\tau} \quad (7.2)$$

Формула (7.1) определяет снимаемый ток через разность потенциалов. Если же считать заданной внешнюю нагрузку R и воспользоваться законом Ома (5.1), то при помощи (7.1), (3.12) — (3.14) получим

$$J = \frac{\sigma \mathcal{E} \nu}{1 + R\nu}, \quad N^0 = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 R \nu^2}{(1 + R\nu)^2}, \quad Q = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 \nu}{(1 + R\nu)^2}, \quad \eta = \frac{R\nu}{1 + R\nu} \quad (7.3)$$

Сравнение формул (7.3) с формулами (5.3) показывает, что роль эффективного внутреннего сопротивления играет величина $1 / \sigma\nu$. При $\nu = 0$ имеем $J = 0$, $\eta = 0$. С увеличением ν мощность и эффективность η монотонно возрастают.

Проанализируем формулы (7.1) — (7.3) в нижеследующих случаях.

1°. Пусть электроды имеют одинаковую фиксированную длину и расположены симметрично. Тогда

$$J = \frac{\sigma \mathcal{E} \nu}{1 + R\nu}, \quad J = \sigma \nu \{\mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)]\}$$

$$\nu = \frac{\theta_3}{(\theta_1 + \theta_2) \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad k = \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{\delta}\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega\tau} \quad (7.4)$$

$$\theta_1 = \int_0^1 (1 + \tau)^{-\varepsilon} (1 - \tau)^{\varepsilon-1} (1 + k\tau)^{\varepsilon-1} (1 - k\tau)^{-\varepsilon} d\tau$$

$$\theta_2 = \int_0^1 (1 + \tau)^{\varepsilon-1} (1 - \tau)^{-\varepsilon} (1 + k\tau)^{-\varepsilon} (1 - k\tau)^{\varepsilon-1} d\tau \quad (7.5)$$

$$\theta_3 = \int_{1/k}^1 (\tau + 1)^{-\varepsilon} (\tau - 1)^{\varepsilon-1} (1 + k\tau)^{\varepsilon-1} (1 - k\tau)^{-\varepsilon} d\tau$$

Рассмотрим большие $\omega\tau$, при которых $\varepsilon = o(1)$. Нетрудно найти, что $\theta_1 = \varepsilon^{-1} + O(1)$, $\theta_2 = O(1)$, $\theta_3 = \varepsilon^{-1} + O(1)$. Таким образом $(\theta_3 / \theta_1 + \theta_2) = 1 + O(\varepsilon)$, $\nu = (\omega\tau)^{-1} + O(1 / \omega^2\tau^2)$ и при $R\sigma = O(1)$ из (7.3) получаем

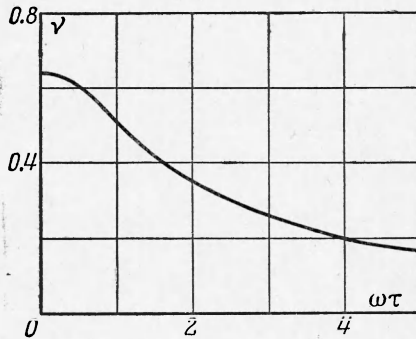
$$\frac{J}{\sigma\mathcal{E}} = \frac{1}{\omega\tau} + O\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2}\right), \quad \frac{N^\circ}{\sigma\mathcal{E}^2} = \frac{R\sigma}{\omega^2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3\tau^3}\right), \quad \eta = \frac{R\sigma}{\omega\tau} + O\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2}\right) \quad (7.6)$$

Обратим внимание, что если увеличение $\omega\tau$ происходит за счет роста величины магнитного поля, так что $(\mathcal{E} / \omega\tau) \rightarrow \text{const}$ при $\omega\tau \rightarrow \infty$, то согласно (7.6), хотя снимаемая мощность и ток стремятся к конечным величинам, эффективность η стремится к нулю. Работа среды против электромагнитной силы переходит в джоулеву диссипацию.

Вычисляя член порядка ε в разложении $\theta_3 / (\theta_1 + \theta_2)$, получим более точное выражение

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{\pi\lambda}{\delta} - 2 \ln 2 + 2 \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{\delta}\right) \right) \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (7.7)$$

Этой формулой можно пользоваться и при не очень больших $\omega\tau$. Действительно, при $\omega\tau = 2.31, 3.08, 5.26$ соответственно имеем $\varepsilon = 0.13, 0.10, 0.06$.



Фиг. 4

На фиг. 4 приведена зависимость величины ν от $\omega\tau$, вычисленная для $k = 0.5$. При $\omega\tau \geq 3$ величина ν определялась по формуле (7.7).

На фиг. 5 построена картина линий тока в канале, рассчитанных по формулам (4.7) при $a = b = \lambda$, $(\pi\lambda/2\delta) = 3$, $\omega\tau = 1$. По прямой OC отложена величина $x^\circ = \pi x / 2\delta$, по прямой OO' отложена величина $y^\circ = 0.5[1 + (y/\delta)]$. Все касательные к линиям тока $x^\circ = x^\circ(y^\circ)$ в точках электродов наклонены к последним под одним и тем же углом, опре-

деляемым из условия, что соответствующие касательные к линиям тока $x = x(y)$ наклонены к электродам под углом $\arctg(1 / \omega\tau)$.

Рассмотрим предельный случай длинных электродов $(\lambda / \delta) \rightarrow \infty, k \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} (\theta_1 + \theta_2) &= \int_0^1 [(1 + \tau)^{\varepsilon-1} (1 - \tau)^{-\varepsilon} + (1 + \tau)^{-\varepsilon} (1 - \tau)^{\varepsilon-1}] d\tau = \\ &= \Gamma(\varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon) = \frac{\pi}{\sin \pi\varepsilon} = \pi \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\theta_3}{(\lambda / \delta)} &= -\frac{\ln k}{(\lambda / \delta)} = \pi \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{(\lambda/\delta) \rightarrow \infty} \frac{J}{\lambda} = \frac{\sigma}{\delta} \{ \mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)] \} \lim_{(\lambda/\delta) \rightarrow \infty} \frac{\nu}{(\lambda / \delta)} = \frac{\sigma \{ \mathcal{E} - [\varphi(N) - \varphi(B)] \}}{\delta (1 + \omega^2\tau^2)} \quad (7.8)$$

Формула (7.8), определяющая удвоенный ток, снимаемый с единицы длины бесконечно длинного электрода, дает решение задачи для канала бесконечной длины, когда его стенки по всей длине являются электродами с потенциалами $\varphi(N)$ и $\varphi(B)$ соответственно.

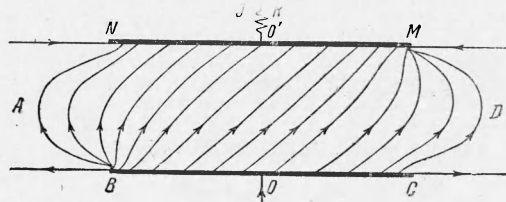
2°. Пусть электроды имеют одинаковую длину и скошены относительно друг друга так, что угол между прямой BN (или CM) и осью y равен углу $\beta = \arcs \operatorname{tg} \omega\tau$. Из (4.2) получаем

$$k = \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{\delta}\right), \quad s = \exp(-\pi\omega\tau), \quad r = ks \quad (7.9)$$

Рассмотрим большие $\omega\tau$, при которых $\varepsilon = o(1)$. Тогда $(s/\exp(-\varepsilon^{-1})) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а главные члены разложений по ε величин θ_i ($i = 1, 2, 3$) равны ε^{-1} . Следовательно, $2\nu\omega\tau \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Напомним, что при больших $\omega\tau$ в отсутствие скоса электродов при $\varepsilon \rightarrow 0$ имели $\nu\omega\tau \rightarrow 1$. Таким образом при заданной длине электродов и больших $\omega\tau$ отношения снимаемых токов и эффективностей η при отсутствии скоса и при скосе, определяемом формулами (7.9), стремятся к двум.

3°. Пусть электроды скошены относительно друг друга так же, как в п. 2°, но с увеличением $\omega\tau$ длина электродов возрастает таким образом, чтобы $s = rk$, $r = \text{const}$. Главные члены разложений по ε величин θ_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно равны ε^{-1} , $(e-1)\varepsilon^{-1}$, $e\varepsilon^{-1}$, где e — основание натуральных логарифмов. Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ так же, как при отсутствии скоса и фиксированной длине электродов, находим $\nu\omega\tau \rightarrow 1$.

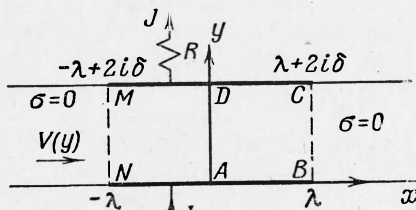
Отметим, что при $\omega\tau \gg 1$ вследствие необходимости учитывать скольжение ионов исходные уравнения оказываются несправедливыми. Однако, как указывалось выше, результатами предельных переходов можно пользоваться и для не очень больших значений $\omega\tau$, когда скольжением ионов можно пренебречь.



Фиг. 5

Распределение тока в канале с электродами конечной длины при равной нулю электропроводности вне электродной зоны.

§ 8. Рассмотрим канал $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < +2\delta$, участки NB ($|x| \leq \lambda$, $y=0$) и MC ($|x| \leq \lambda$, $y=2\delta$) стенок которого заняты сплошными или секционированными электродами, а остальные участки стенок являются изоляторами (фиг. 6). Предположим, что электропроводность перед электродной зоной близка к нулю, в электродной зоне введением через стенки канала легко ионизируемых веществ в начале электродной зоны обеспечивается $\sigma \neq 0$, а справа от электродной зоны электропроводность мала вследствие снижения температуры. Такие, а также другие возможные случаи, когда электропроводность практически отлична от нуля только в электродной зоне, можно приближенно описать, если ввести поверхности разрыва электропроводности MN и CB и считать, что



Фиг. 6

$$\sigma = \begin{cases} 0 & (|x| > \lambda, |y| < 2\delta) \\ \sigma = \text{const} & (|x| < \lambda, |y| < 2\delta) \end{cases} \quad (8.1)$$

Будем далее предполагать, что $\mathbf{V} = (0, 0, -V_0)$, $V_0 = \text{const}$, $R_m \ll 1$, $\omega\tau = \text{const}$, а скорость по уже изложенным в § 3 соображениям определяется зависимостью $\mathbf{v} = (V(y), 0, 0)$.

Распределение тока в области $NBCM$ описывается уравнениями (3.2), (3.3). Поэтому, как в § 3, можно ввести аналитическую функцию $w = u + iv$, приняв, что $w(A) = 0$.

Рассмотрим граничные условия. На линиях NM и BC из непрерывности нормальной к поверхности разрыва составляющей вектора плотности тока имеем $j_x = 0$. На участках NB и MC будем считать выполненным модельное условие (3.10). Таким образом

$$\begin{aligned} u - \gamma\omega\tau v &= 0 && \text{на } NB \\ v + \omega\tau u &= \text{const} = v(B)(1 + \gamma\omega^2\tau^2) && \text{на } CB \\ u - \gamma\omega\tau v &= \text{const} = (1 + \gamma\omega^2\tau^2)[u(M) - u(N)] && \text{на } MC \\ v + \omega\tau u &= \text{const} = v(N)(1 + \gamma\omega^2\tau^2) && \text{на } MN \end{aligned} \quad (8.2)$$

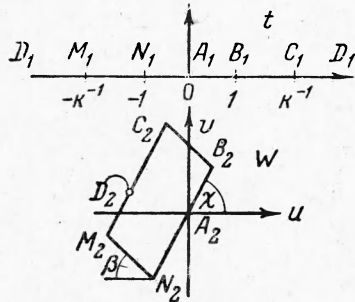
Снимаемый ток J равен

$$J = \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, 0) dx = \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, 2\delta) dx = \frac{\sigma(1 + \gamma\omega^2\tau^2)}{1 + \omega^2\tau^2} [v(B) - v(N)] \quad (8.3)$$

а мощность и джоулева диссипация определяются формулами

$$N^\circ = J[\varphi(M) - \varphi(N)], \quad Q = J\mathcal{E} - N^\circ, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{c} B_0 \int_0^{2\delta} V dy \quad (8.4)$$

Для решения задачи внутренность прямоугольника $NBCM$ в плоскости z конформно отобразим на верхнюю полуплоскость плоскости t преобразованием (фиг. 7)



Фиг. 7

$$z = -\frac{\lambda}{K(k)} \int_0^t \frac{dt}{V(t^2 - 1)(k^2 t^2 - 1)} \quad (8.5)$$

где k определяется из уравнения

$$\frac{2\delta}{\lambda} = \frac{K(\sqrt{1 - k^2})}{K(k)} \quad (8.6)$$

Так как прямоугольнику $NBCM$ согласно (8.2) соответствует параллелограмм $N_2B_2C_2M_2$ в плоскости w (фиг. 7), решение задачи осуществляется конформным отображением верхней полуплоскости в плоскости t на внутренность параллелограмма $N_2B_2C_2M_2$ с указанным на фиг. 7 соответствием точек. Это отображение и суммарные характеристики J , N° определяются формулами

$$\begin{aligned} w &= \theta_3^{-1} \{ \mathcal{E} - [\varphi(M) - \varphi(N)] \} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} e^{i(\pi + \chi)} \int_0^t (t - 1)^{-\varepsilon} (kt - 1)^{\varepsilon - 1} \times \\ &\quad \times (kt + 1)^{-\varepsilon} (t + 1)^{\varepsilon - 1} dt \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\beta = \arctg \omega\tau, \quad \chi = \arctg (1 / \gamma\omega\tau), \quad \varepsilon = 1 - \pi^{-1} (\chi + \beta)$$

$$J = \frac{\sigma(1 + \gamma\omega^2\tau^2) \{ \mathcal{E} - [\varphi(M) - \varphi(N)] \} (\theta_1 + \theta_2)}{\theta_3 (1 + \omega^2\tau^2)} \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2\gamma^2}} \quad (8.8)$$

В выражениях (8.7), (8.8) величины θ_i ($i = 1, 2, 3$) определяются формулами (7.5), в которых ε выражается согласно (8.8), а параметр k — согласно (8.6). Рассмотрим частные случаи формул (8.7) и (8.8).

§ 9. Пусть участки NB и CM представляют собой сплошные электроды, а эффект Холла отсутствует ($\omega\tau = 0$). Из (8.7) — (8.8) получаем

$$w = \frac{iz^*}{2\delta} \{\mathcal{E} - [\varphi(M) - \varphi(N)]\}, \quad J = \frac{\sigma\lambda}{\delta} \{\mathcal{E} - [\varphi(M) - \varphi(N)]\} \quad (9.1)$$

Используя связь разности потенциалов между электродами с внешней нагрузкой

$$\varphi(M) - \varphi(N) = JR \quad (9.2)$$

находим

$$J = \frac{\sigma\mathcal{E}(\lambda/\delta)}{1 + R\sigma(\lambda/\delta)}, \quad N^\circ = \frac{\sigma\mathcal{E}^2 R\sigma(\lambda/\delta)^2}{[1 + R\sigma(\lambda/\delta)]^2}, \quad \eta = \frac{R\sigma(\lambda/\delta)}{1 + R\sigma(\lambda/\delta)} \quad (9.3)$$

Линии тока параллельны оси y , а j_y всюду в канале постоянна.

§ 10. Предположим, что $\omega\tau \neq 0$, $\gamma = 1$ ($\varepsilon = 0.5$). Из (8.7) находим

$$w = \frac{z \exp(i\chi) \{\mathcal{E} - [\varphi(M) - \varphi(N)]\}}{2\delta \cos \beta}$$

Снимаемый ток J определяется зависимостью (9.1), линии тока параллельны оси y , а постоянная величина j_y совпадает с аналогичной величиной для случая § 9. Как отмечалось в § 6, рассматриваемое решение может соответствовать случаю секционированных электродов с бесконечно малым шагом сегментации.

§ 11. Пусть участки NB и CM представляют сплошные электроды ($\gamma = 0$) и $\omega\tau \neq 0$. При помощи (8.7) — (8.8) и (9.2) найдем

$$J = \frac{\sigma\mathcal{E}\mu}{1 + R\sigma\mu}, \quad N^\circ = \frac{\sigma\mathcal{E}^2 R\sigma\mu^2}{(1 + R\sigma\mu)^2}$$

$$\eta = \frac{R\sigma\mu}{1 + R\sigma\mu}, \quad \mu = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_3 \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (11.1)$$

Сравнение формул (11.1) с формулами (7.3), (9.3) показывает, что роль эффективного внутреннего сопротивления играет величина $1/\sigma\mu$. С ростом $\omega\tau$ величина $(\theta_1 + \theta_2)\theta_3^{-1} \rightarrow 1$ (см. § 7), а величина μ , а с ней, согласно формулам (11.1), ток J и эффективность η убывают пропорционально $(\omega\tau)^{-1}$. Используя результаты § 7, получаем

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \left\{ 1 - \varepsilon \ln \frac{(1-k)^2}{4k} + O(\varepsilon^2) \right\}, \quad \frac{2\delta}{\lambda} = \frac{K^*(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} \quad (11.2)$$

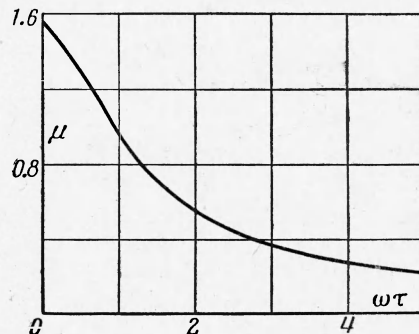
Функция $\mu(\omega\tau)$ при $k = 0.5$ приведена на фиг. 8.

Когда величина $(4\pi\lambda/\delta) \exp(-\pi\lambda/2\delta)$ оказывается малой (при достаточно больших λ/δ), формулы (11.2) и (7.7) можно представить в виде

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\pi\lambda}{\delta} - 4 \ln 2 \right) + O(\varepsilon^2) \right] \quad (11.3)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\pi\lambda}{\delta} - 2 \ln 2 \right) + O(\varepsilon^2) \right] \quad (11.4)$$

Из сравнения (11.3) и (11.4) следует, что в используемом при выводе этих формул приближении величина v , а с ней ток J и эффективность η ,



Фиг. 8

в случае всюду постоянной электропроводности оказываются больше, чем в случае отличной от нуля электропроводности только в электродной зоне.

Отметим еще следующее обстоятельство. При всюду постоянной электропроводности в канале во всех концевых точках электродов токи j_x и j_y делаются бесконечно большими. Когда же электропроводность вне электродной зоны равна нулю, токи делаются бесконечно большими только в точках N и C .

Заметим также, что в рассматриваемой задаче ток, протекающий через участок NA , равен току, протекающему через участок DC , и оказывается больше тока, протекающего через участок MD .

Наконец, заметим, что если линии разрыва, соединяющие точки N и M , B и C , были бы произвольными кривыми, а участки NB и MC , не обязательно равной длины, на верхней и нижней сторонах канала были бы сдвинуты относительно один другого вдоль x , то решение задачи опять давалось бы конформным отображением области, составленной отрезками NB , MC и кривыми NM и BC , на параллелограмм.

В заключение автор благодарит Ф. А. Слободкину, любезно рассчитавшую кривые линии тока на электронно-вычислительной машине, и участников семинаров под руководством Г. Г. Черного и Г. А. Любимова за обсуждение работы.

Поступила 2 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогиродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5.
2. B o u c h e r R. A., A m e s D. B. End effect losses in dc magnetohydrodynamic generators. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No 5.
3. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
4. Ч е к м а р е в И. Б. Установившееся течение слабоионизированного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
5. Б р а н о в В. Б. Установившееся течение ионизированного газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1961, № 3.
6. S a t o H. The Hall effect in the viscous flow of ionized gas between parallel plates under transverse magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1961, vol. 16, No 7.
7. H u r w i t z H. Jr., K i l b R. W., S u t t o n G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No 2.
8. Y e h H., S u t t o n G. W. Velocity profiles and efficiency of MHD generators with segmented electrodes. AFOSR — 1595; 1961, sept. 15 (ann.— Nucl. Sci. Abstr., 1962, vol. 16, 9, No 11338)
9. P o d o l s k y B., S h e r m a n A. Influence of tensor conductivity on end currents in crossed field MHD channels with skewed electrodes. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No 4.
10. D z u n g L. S. Der magneto — hydrodynamische Generator mit Hall — Effect am Kanalende. Brown Boveri Mitt., 1962, band 49, No 6.
11. В а т а ж и н А. Б. Магнитогиродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1962, № 1.
12. В а т а ж и н А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогиродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.