

УДК 621.541

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРУБЫ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Т. Я. Грудницкая, В. А. Люлька, А. В. Шипилин

Вычислительный центр РАН, 119991 Москва

На основе численного решения полной системы уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости получена формула для вычисления коэффициентов гидродинамического сопротивления в трубе с внезапным расширением сечения при числах Рейнольдса от 0,2 до 10. Проведено сравнение коэффициентов гидравлического сопротивления, полученных из численного решения уравнений Навье — Стокса и по выведенной формуле.

Ключевые слова: цилиндрическая труба, внезапное расширение, малые числа Рейнольдса, коэффициент сопротивления.

Для расчета коэффициента местного сопротивления цилиндрического канала с внезапным расширением при малых числах Рейнольдса ($Re \leq 10$) и малой степени расширения ($D_2/D_1 \leq 3$) в [1] рекомендована формула $\xi = 30/Re$ независимо от соотношения диаметров D_2/D_1 и длины участков канала до и после расширения.

Рассмотрим местное сопротивление канала в виде двух цилиндрических труб разных диаметров (рис. 1). На входе, в трубе диаметром D_1 реализуется течение Пуазейля с параболическим распределением скорости по сечению [2] $U_1 = 2(1 - 4\bar{r}^2)$, где $\bar{r} = r/D_1$ — безразмерное значение текущего радиуса, а $U_1 = u_1/w_0$ (U_1 — текущая скорость; w_0 — средняя скорость потока). На достаточно большом расстоянии от места расширения вновь устанавливается течение Пуазейля, соответствующее большему сечению трубы. Пусть $D_2/D_1 = b$, тогда в трубе диаметром D_2 установится течение Пуазейля со следующим распределением скоростей: $U_2 = 2(b^2 - 4\bar{r}^2)/b^4$.

Обозначим число Рейнольдса $Re = w_0 D_1/\nu$, где ν — вязкость жидкости. Тогда безразмерный градиент давления на входе и выходе равен $-32/Re$, $-32/(Re b^4)$ соответственно.

В такой постановке это течение исследовалось численно с привлечением уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости. Определялись потери полного давления и коэф-

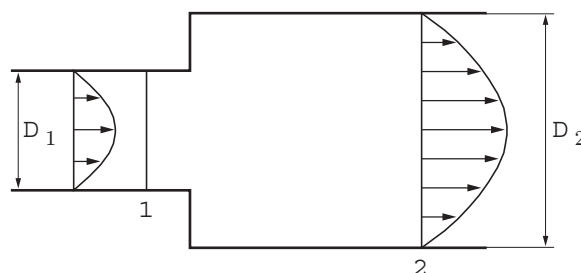


Рис. 1

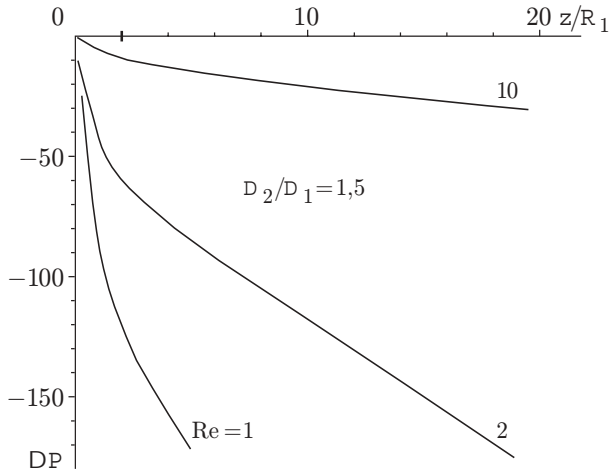


Рис. 2

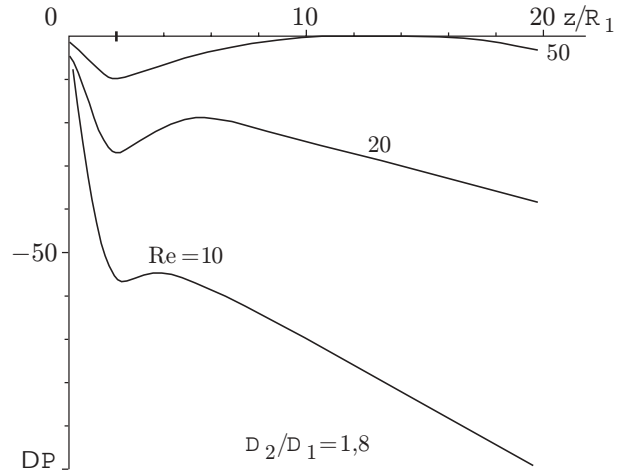


Рис. 3

коэффициент сопротивления. Математическая постановка задачи и методика решения описаны в работах [3, 4]. Здесь приводятся некоторые результаты расчетов, из анализа которых можно сделать выводы о применимости выведенной ниже формулы. Выбирались сечения 1 и 2 (см. рис. 1), расположенные на расстояниях l_1 и l_2 вверх и вниз по потоку от места изменения поперечного сечения. В этих сечениях численно определялись статические давление p и скоростной напор $\zeta U^2/2$, а по ним — значения коэффициента сопротивления (ζ — безразмерная плотность). Для чисел Рейнольдса $10 < Re < 200$ и различных D_2/D_1 полученные значения коэффициента сопротивления приведены в виде таблиц в работах [3, 4].

На рис. 2, 3 приведены распределения безразмерного перепада давления по длине канала, вычисленные вдоль линии тока, расположенной вблизи оси симметрии. По этим рисункам можно проследить тенденцию изменения давления. От входного сечения до сечения, в котором происходит внезапное расширение канала (отмечено штрихом), давление падает в соответствии с законом Пуазейля. Возмущения вверх по потоку практически не передаются, и течение Пуазейля с хорошей точностью сохраняется вплоть до расширения канала. Сразу за расширением давление увеличивается, достигает максимального значения, а затем начинает падать, выходя на распределение Пуазейля, соответствующее выходному диаметру трубы. В зависимости от значений Re этот эффект проявляется различным образом. Если с увеличением чисел Re переходная область увеличивается и увеличивается максимальное значение p , то при малых числах Re переходная область невелика. Изменение скоростного напора представлено на рис. 4. На достаточном расстоянии вниз по потоку потери скоростного напора определяются только значением D_2/D_1 и не зависят от Re . Однако значения Re влияют на местоположение и картину этого перехода. На рис. 3 видно, что с увеличением Re область перехода увеличивается. Однако при малых числах Re эта зона практически отсутствует.

На этих фактах и основан вывод формулы для коэффициента сопротивления при расширении. Предполагается, что зоной перехода можно пренебречь, считая, что за течением Пуазейля в трубе меньшего диаметра сразу реализуется течение Пуазейля, соответствующее большему диаметру трубы.

Выведем эту формулу. Вычислим значения $\zeta U_1^2/2$ на входе, где U_1^2 — среднее значение квадрата безразмерной скорости в трубе меньшего диаметра. Вычисление U_1^2 будем

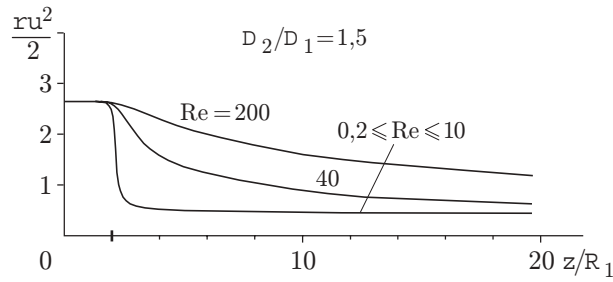


Рис. 4

проводить по формуле

$$U_1^2 = \frac{4}{\pi D_1^2} \int_0^{D_1/2} 2\pi r u_1^2 dr = \int_0^{1/2} 4(1 - 4\bar{r}^2)^2 8\bar{r} d\bar{r} = \frac{4}{3}.$$

Вычислим далее значение U_2^2 (на выходе) по той же формуле, где U_2^2 — среднее значение квадрата безразмерной скорости в трубе большего диаметра:

$$U_2^2 = \frac{4}{\pi D_1^2 b^2} \int_0^{bD_1/2} 2\pi r u_2^2 dr = \frac{4}{b^2} \int_0^{b/2} \frac{8}{b^8} (b^2 - 4\bar{r}^2)^2 \bar{r} d\bar{r} = \frac{4}{3b^4}.$$

Перепад давления от входного сечения до места расширения определяется по формуле

$$\Delta p_1 = -32l_1 / \text{Re},$$

где l_1 — безразмерная длина трубы диаметра D_1 ; z — безразмерная координата. Предполагается, что градиент давления в трубе диаметра D_1 постоянен: $dp/dz = -32/\text{Re}$. Аналогично, считая градиент давления в широкой трубе постоянным и равным $dp/dz = -32/(\text{Re} b^4)$, получим

$$p_2 = -\frac{32}{\text{Re}} l_1 - \frac{32}{\text{Re} b^4} l_2,$$

где l_2 — безразмерная длина трубы диаметра D_2 .

Вычисляем коэффициент гидравлического сопротивления:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{\zeta U_1^2} \left[\left(p_1 + \frac{\zeta U_1^2}{2} \right) - \left(p_2 + \frac{\zeta U_2^2}{2} \right) \right] = \frac{3}{2} \left(\frac{32}{\text{Re}} l_1 + \frac{32}{\text{Re} b^4} l_2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3b^4} \right) = \\ &= \frac{48}{\text{Re}} \left(l_1 + \frac{l_2}{b^4} \right) + 1 - \frac{1}{b^4}. \quad (1) \end{aligned}$$

При выводе этой формулы диаметр входной трубы принят за единицу, поэтому l_1 и l_2 необходимо отнести к его значению.

В табл. 1–3 приведены коэффициенты гидравлического сопротивления в интервале чисел Рейнольдса $\text{Re} = 0,2 \div 10$ и при различных значениях D_2/D_1 (в числителе — коэффициенты сопротивления, полученные из численного решения уравнений Навье — Стокса, в знаменателе — полученные по формуле (1)). Здесь $l_1 = 1$, $l_2 = 2, 4, 6, 8$.

Как видно из таблиц, в данном интервале чисел Re , значений l_2 при $D_2/D_1 \leq 3$ наблюдается хорошее совпадение значений ξ , полученных интегрированием уравнений Навье — Стокса и вычисленных по формуле (1). Максимальное отклонение составляет 27 % и наблюдается при $\text{Re} = 10$. Если сравнить при $\text{Re} = 10$ значения коэффициентов сопротивления, полученные по формуле (1), с значением $\xi = 3$, приведенным в [1], то можно отметить

Таблица 1

$$D_2/D_1 = 1,2$$

Re	Значения ξ при			
	$l_2 = 2$	$l_2 = 4$	$l_2 = 6$	$l_2 = 8$
0,2	427,81/472,00	659,44/703,48	775,26/934,96	1006,89/1166,44
1	85,35/94,81	131,68/141,11	154,85/187,41	201,18/233,70
2	42,55/47,67	65,72/70,81	77,30/93,96	100,47/117,11
10	8,36/9,95	13,00/14,58	15,32/19,21	19,96/23,84

Таблица 2

$$D_2/D_1 = 2,0$$

Re	Значения ξ при			
	$l_2 = 2$	$l_2 = 4$	$l_2 = 6$	$l_2 = 8$
0,2	259,08/270,94	289,13/300,94	304,16/330,94	334,21/360,94
1	51,41/54,94	57,42/60,94	60,42/66,94	66,43/72,94
2	25,46/27,94	28,47/30,94	29,97/33,94	32,98/36,94
10	4,88/6,34	5,48/6,94	5,78/7,54	6,38/8,14

Таблица 3

$$D_2/D_1 = 3,0$$

Re	Значения ξ при			
	$l_2 = 2$	$l_2 = 4$	$l_2 = 6$	$l_2 = 8$
0,2	242,61/246,91	248,55/252,84	251,52/258,77	257,46/264,69
1	48,10/50,17	49,29/51,36	49,88/52,54	51,07/53,73
2	23,81/25,58	24,40/26,17	24,70/26,77	25,29/27,36
10	4,62/5,91	4,74/6,02	4,80/6,14	4,92/6,26

существенное различие. Видно, что коэффициент ξ зависит от числа Re, D_2/D_1 , l_1 и l_2 . При Re = 10 расчет по предлагаемой формуле для $l_1 = 1$ и $l_2 = 2$ при $D_2/D_1 = 1,2$, 2 и 3 дает значения $\xi = 9,95$, 6,34 и 5,91. При $l_1 = 0,5$ и $l_2 = 2$ соответствующие значения ξ равны 7,55, 3,94 и 3,5. Эти значения ближе к значению $\xi = 3$ из [1]. Однако с увеличением l_2 различия будут возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
3. **Грудницкая Т. Я., Люлька В. А., Шипилин А. В.** Определение коэффициентов гидравлического сопротивления на основе численного решения уравнений Навье — Стокса // Пневматика и гидравлика. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 12. С. 111–115.
4. **Грудницкая Т. Я., Люлька В. А., Шипилин А. В.** О вычислении механических величин гидравлического потока на основе численного решения уравнений Навье — Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 7. С. 1107–1111.

Поступила в редакцию 24/XII 2002 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 2003 г.