УДК 551.466.81

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Ю. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики РАН, 117126 Москва

В линейном приближении построено точное решение задачи генерации трехмерных периодических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной вязкой жидкости. Источником волн служит произвольная часть поверхности вертикального кругового цилиндра, движущаяся в радиальном, азимутальном и вертикальном направлениях. Решения, удовлетворяющие точным граничным условиям, помимо пучка уходящих волн описывают два типа волновых пограничных слоев: внутренний, толщина которого зависит от частоты плавучести и геометрии задачи, и вязкий, который, как и в однородной жидкости, определяется кинематической вязкостью и частотой. Асимптотические решения выписаны в явном виде для цилиндров большого, промежуточного и малого размеров по отношению к собственным масштабам задачи.

Введение. В последние годы интерес к изучению внутренних волн вызван как логикой развития теоретической гидродинамики, так и необходимостью решения прикладных задач гидрологии, физической океанографии, динамики планетных атмосфер [1]. При этом большое внимание уделяется теории генерации волн. Вначале при изучении генерации двумерных пучков внутренних волн горизонтальный осциллирующий цилиндр заменялся гидродинамическими источниками и стоками, параметры которых определялись на основе теории однородной жидкости с учетом физических особенностей задачи [2]. Компактный источник излучает в непрерывно стратифицированную среду волновой пучок, угловое положение которого определяется отношением частоты волны ω к частоте плавучести N, а поперечная структура (одномодальная для малого источника и бимодальная с максимумами смещений на краях пучка для большого) зависит от расстояния до источника и отношения поперечного размера излучателя a к вязкому волновому масштабу $L_\nu = \sqrt[3]{g\nu}/N$ [3].

В дальнейшем развивались методы расчета излучения периодических внутренних волн горизонтальными эллиптическим [4, 5], круговым [6] или квадратным [7] цилиндрами, приближенно удовлетворяющие граничным условиям на их поверхностях. Хотя результаты [2–6] качественно согласуются с данными оптических и контактных измерений дальних волновых полей, в расчетах пучки оказываются более узкими, а амплитуды заниженными, особенно для низкочастотных волн [3, 6]. Более точный метод построения решений, удовлетворяющих граничным условиям на излучающей поверхности в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости, для некоторых специальных задач теории генерации двумерных волн предложен в [8, 9]. В расчетах учитывается, что движущееся тело наряду с пучком внутренних волн возбуждает внутренний пограничный слой, толщина которого зависит от кинематической вязкости среды ν, частоты плавучести, углового положения пучка волн $\theta = \arcsin(\omega/N)$ и излучающей поверхности φ относительно горизонтали $\delta_\varphi = \sqrt{2\nu\sin\theta/(N|\sin^2\theta - \sin^2\varphi|)}$. Общая картина течения, поперечная структура волновых пучков, излучаемых наклонной полосой, колеблющейся вдоль своей поверхности, закономерности уменьшения амплитуды при удалении от излучателя согласуются с результатами измерений в пределах погрешности опытов [10], хотя внутренние пограничные течения не визуализируются из-за малой их толщины и затенения волновыми возмущениями, особенно сильными вблизи излучателя. Следствием этой формы движения являются тонкие горизонтальные прослойки, нарушающие исходное гладкое распределение плотности на больших расстояниях от тела [10].

В большинстве практически важных случаев наблюдаются трехмерные внутренние волны, так как порождающие их источники, как правило, являются компактными по всем трем измерениям. Цель данной работы состоит в построении решения линеаризованной задачи возбуждения трехмерных внутренних волн и сопутствующих возмущений телом, совершающим колебания малой амплитуды. Выполнены расчеты волновых полей и пограничных слоев, образующихся при произвольных малых перемещениях части вертикального кругового цилиндра и удовлетворяющих уравнениям движения и граничным условиям.

Основные уравнения и граничные условия. Малые возмущения вязкой несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости описываются линеаризованными уравнениями

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla P + \nu\rho_0\Delta\boldsymbol{v} - \rho g\boldsymbol{e}_z, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_z\frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{1}$$

где P, ρ и $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — переменные давление, плотность и скорость жидкости; $\rho_0(z) = \rho_{00}\exp(-z/\Lambda)$ — невозмущенная плотность; Λ — масштаб плавучести; ν — кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения в отрицательном направлении оси z; $\boldsymbol{e}_z$ — единичный вектор.

Для упрощения промежуточных выкладок используется тороидально-полоидальный потенциал, определяемый двумя скалярными функциями Ψ и Φ, через который скорость выражается формулой [11]

$$\boldsymbol{v} = \nabla\times(\boldsymbol{e}_z\Psi) + \nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{e}_z\Phi). \tag{2}$$

При этом уравнение несжимаемости в (1) удовлетворяется автоматически.

Далее будут рассматриваться только монохроматические возмущения вида $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (этот множитель везде опускается). Исключая из (1) давление P и используя (2), получаем уравнения для Ψ и Φ

$$[\omega^2\Delta - N^2\Delta_\perp - i\omega\nu\Delta^2]\Delta_\perp\Phi = 0, \qquad (\omega - i\nu\Delta)\Delta_\perp\Psi = 0, \tag{3}$$

где $N^2 = g[d\ln\rho_0(z)/dz]^{-1} = g/\Lambda$ — квадрат частоты плавучести; $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный лапласиан.

Решению $\Delta_\perp\Phi = 0$ первого уравнения системы (3) соответствует в силу (2) нулевая вертикальная компонента скорости, т. е. такое движение может быть описано с помощью тороидальной части потенциала Ψ, поэтому оператор $\Delta_\perp$ в этом уравнении может быть отброшен. Решение $\Delta_\perp\Psi = 0$ второго уравнения системы (3) описывает недиссипативное движение жидкости. Однако в уравнении (1) имеется горизонтальная компонента силы трения $\rho_0\nu\partial^2\boldsymbol{v}/\partial z^2$, которая равна нулю только для движений вида $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(x,y) + z\boldsymbol{b}(x,y)$. Такие движения не могут возбуждаться ограниченным по размерам источником, поэтому в рассматриваемой задаче данные решения учитывать не следует.

С учетом изложенного выше система определяющих уравнений принимает вид

$$[\omega^2\Delta - N^2\Delta_\perp - i\omega\nu\Delta^2]\Phi = 0, \qquad (\omega - i\nu\Delta)\Psi = 0. \tag{4}$$

Из системы (1) с учетом второго уравнения (4) можно получить выражение для давления $P = \rho_0(i\omega + \nu\Delta)\partial\Phi/\partial z$.

Граничными условиями задачи являются условия прилипания на излучающей поверхности и затухания всех возмущений на бесконечности. Форма поверхности и характер ее движения выбираются из условия наиболее простого вида решения при сохранении трехмерности задачи и возможности его экспериментальной проверки. Этому условию удовлетворяет, например, генератор, представляющий собой произвольную часть поверхности вертикального кругового цилиндра, совершающую движения малой амплитуды. В качестве примеров будут рассмотрены как осесимметричные движения (вертикальные, радиальные и крутильные колебания), так и горизонтальные смещения части цилиндра как целого.

Общее решение задачи генерации движений частью бесконечного вертикального цилиндра. Рассмотрим цилиндрическую систему координат (r, φ, z), в которой компоненты скорости жидкости (2) имеют вид

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi\,\partial z}, \quad v_z = -\Delta_\perp \Phi,$$

при этом

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \qquad \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Движение части возмущающей поверхности описывается компонентами скорости $u_r(\varphi, z)$, $u_\varphi(\varphi, z)$ и $u_z(\varphi, z)$. Тогда граничные условия принимают вид

$$v_r\big|_{r=R} = u_r(\varphi, z), \qquad v_\varphi\big|_{r=R} = u_\varphi(\varphi, z), \qquad v_z\big|_{r=R} = u_z(\varphi, z), \tag{5}$$

где R — радиус цилиндра.

Решение уравнений (4) ищется в форме

$$\Phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{im\varphi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [A_m(k) H^{(1)}_{|m|}(k_w r) + B_m(k) H^{(1)}_{|m|}(k_\varphi r)] \mathrm{e}^{ikz}\, dk,$$
$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{im\varphi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_m(k) H^{(1)}_{|m|}(k_\nu r)\, \mathrm{e}^{ikz}\, dk, \tag{6}$$

где $H^{(1)}_{|m|}$ — функции Ханкеля первого рода, а волновые числа k_w, k_φ и k_ν определяются формулами

$$k^2_{w,\varphi} = -k^2 - \frac{iN\cos^2\theta}{2\nu\sin\theta}\Big[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4i\nu k^2 \sin\theta}{N\cos^4\theta}}\,\Big], \quad k_\nu^2 = \frac{i\omega}{\nu} - k^2 \tag{7}$$

(знак “$-$” соответствует k_w, а “$+$” — k_φ). В (7) $\theta = \arcsin(\omega/N)$ — угол, который пучки внутренних волн составляют с горизонтом. С учетом граничных условий на бесконечности и вида функций Ханкеля первого рода в (6) должны выбираться такие корни дисперсионных уравнений, для которых $\operatorname{Im} k_w > 0$, $\operatorname{Im} k_\varphi > 0$, $\operatorname{Im} k_\nu > 0$. Для упрощения анализа точные решения (7) разлагаются в ряд по степеням ν. Ограничиваясь членами с минимальными степенями ν, имеем

$$k_w = |k|\operatorname{tg}\theta + \frac{i\nu|k|^3}{2N\cos^5\theta}, \qquad k_\varphi = ik_\nu \operatorname{ctg}\theta, \qquad k_\nu = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \tag{8}$$

Члены со спектральной плотностью $A_m(k)$ в (6) описывают уходящие от цилиндра внутренние волны, а члены с $B_m(k)$ и $C_m(k)$ — пограничные слои на его поверхности. Выражение с коэффициентами $B_m(k)$ соответствует *внутренним волновым пограничным слоям*, толщина которых, как и в случае излучения волн колеблющейся пластиной [9], определяется выражением $\delta_\varphi = \operatorname{ctg}\theta\sqrt{2\nu/\omega}$ (в обозначениях работы [9] в данной задаче $\varphi = \pi/2$). Этот тип пограничного слоя является специфическим для стратифицированной жидкости. Члены с коэффициентами $C_m(k)$ задают *вязкий волновой пограничный слой* толщиной $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$, существующий как в однородной, так и в стратифицированной жидкости (периодический пограничный слой по терминологии [12]).

Из точных решений дисперсионного уравнения (7) следует, что при переходе к однородной жидкости ($N \to 0$) выражение для внутреннего волнового пограничного слоя k_φ переходит в выражение для вязкого волнового пограничного слоя k_ν, что не выполняется для приближенных соотношений (8). Это означает, что однородная жидкость не является частным случаем стратифицированной, а есть ее вырожденный вариант, объединяющий разнородные структурные элементы. При обратном переходе от однородной жидкости к стратифицированной происходит расщепление вязкого волнового пограничного слоя на два слоя с различной зависимостью толщины от физических параметров и геометрии задачи.

Различие в физической природе внутреннего и вязкого волновых слоев проявляется в том, что в вязком слое фазовая скорость направлена от цилиндра, а во внутреннем — к нему.

Система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_m(k)$, $B_m(k)$ и $C_m(k)$ получается подстановкой решений (6) в граничные условия (5). Решая ее, находим

$$A_m = D_m^A/D_m, \qquad B = D_m^B/D_m, \qquad C = D_m^C/D_m, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
D_m^A &= iU_r k_\varphi^2 k_\nu H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\nu R) - U_\varphi \frac{mk_\varphi^2}{R} H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R) H_{|m|}^{(1)}(k_\nu R) + \\
&\quad + kU_z\Big[k_\varphi k_\nu H_{|m|}^{(1)'}(k_\varphi R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\nu R) - \frac{m^2}{R^2} H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R) H_{|m|}^{(1)}(k_\nu R)\Big],\\
D_m^B &= -iU_r k_w^2 k_\nu H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\nu R) + U_\varphi \frac{mk_w^2}{R} H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\nu R) - \\
&\quad - kU_z\Big[k_w k_\nu H_{|m|}^{(1)'}(k_w R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\nu R) - \frac{m^2}{R^2} H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\nu R)\Big],\\
D_m^C &= iU_r \frac{mk}{R}(k_w^2 - k_\varphi^2) H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R) - \\
&\quad - U_\varphi k k_w k_\varphi [k_w H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\varphi R) - k_\varphi H_{|m|}^{(1)'}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R)] + \\
&\quad + U_z \frac{mk^2}{R}[k_w H_{|m|}^{(1)'}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R) - k_\varphi H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\varphi R)],\\
\Delta_m &= k k_w k_\varphi k_\nu [k_w H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)'}(k_\varphi R) - k_\varphi H_{|m|}^{(1)'}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R)] H_{|m|}^{(1)'}(k_\nu R) - \\
&\quad - \frac{km^2}{R^2}(k_w^2 - k_\varphi^2) H_{|m|}^{(1)}(k_w R) H_{|m|}^{(1)}(k_\varphi R) H_{|m|}^{(1)}(k_\nu R),
\end{aligned} \tag{10}$$

причем спектральные функции источника

$$U_j(m,k) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_j(\varphi,z) \mathrm{e}^{-im\varphi}\, \mathrm{e}^{-ikz}\, d\varphi\, dz. \tag{11}$$

Здесь штрих означает производную по аргументу.

Соотношения (7) и (9)–(11) полностью решают задачу о возбуждении малых возмущений вязкой стратифицированной жидкости движением произвольной части вертикального кругового цилиндра.

Для аксиально-симметричных движений источника формулы (10) существенно упрощаются. Поскольку из малости ν следует $|k_\varphi| \gg |k_w|$, то для всех R имеет место неравенство $|k_w H_0^{(1)}(k_w R) H_1^{(1)}(k_\varphi R)| \ll |k_\varphi H_1^{(1)}(k_w R) H_0^{(1)}(k_\varphi R)|$, с учетом которого получаем

$$A_0 = \frac{1}{k_w H_1^{(1)}(k_w R)} \Big[\frac{iU_r(0,k)}{k} - \frac{U_z(0,k)}{k_\varphi}\,\frac{H_1^{(1)}(k_\varphi R)}{H_0^{(1)}(k_\varphi R)}\Big],$$

$$B_0 = -\frac{1}{k_\varphi^2 H_0^{(1)}(k_\varphi R)} \Big[iU_r(0,k)\frac{k_w}{k}\,\frac{H_0^{(1)}(k_w R)}{H_1^{(1)}(k_w R)} - U_z(0,k)\Big],$$

$$C_0 = -\frac{U_\varphi(0,k) k_w H_0^{(1)}(k_w R) H_1^{(1)}(k_\varphi R)}{k_\varphi k_\nu H_1^{(1)}(k_w R) H_0^{(1)}(k_\varphi R) H_1^{(1)}(k_\nu R)}.$$

Отсюда следует, что аксиально-симметричные внутренние волны возбуждаются только радиальными и вертикальными движениями поверхности цилиндра. Если часть цилиндра совершает крутильные колебания, то в линейном приближении возбуждается только вязкий волновой пограничный слой. При учете нелинейности вида v_φ^2/r, описывающей центростремительное ускорение в уравнении Навье — Стокса, вязкий волновой пограничный слой является источником внутренних волн и внутренних волновых пограничных слоев, частота которых вдвое больше частоты крутильных колебаний [13].

Полученные решения позволяют рассчитать волновые поля и пограничные течения нескольких типов излучателей и провести сравнение их эффективности. Технически наиболее просто реализуются радиальные и вертикальные смещения поверхности цилиндра, а также его горизонтальное перемещение как целого вдоль прямой. Первые два вида движения возбуждают аксиально-симметричные движения, в третьем такая симметрия отсутствует и волновое поле является истинно трехмерным.

Расчет движения жидкости, возбуждаемого излучателями трех типов. Вычисления проведены для следующих трех видов движения цилиндрической поверхности.

1. Источник переменного объема: радиус части цилиндра высотой a периодически изменяется, так что ненулевая компонента скорости его поверхности имеет вид $u_r(\varphi, z) = u_0\vartheta(a/2 - |z|)$, где ϑ — единичная функция Хевисайда. Такой источник аналогичен точечному монополю с ненулевым текущим расходом.

2. Фрикционный источник: часть цилиндра высотой a совершает периодические вертикальные колебания, так что ненулевая компонента скорости его поверхности имеет вид $u_z(\varphi, z) = u_0\vartheta(a/2 - |z|)$, и возбуждение внутренних волн происходит только за счет сил трения, как в задаче [9].

3. Осциллирующий источник: часть цилиндра высотой a, не меняя своей формы, совершает периодические горизонтальные колебания вдоль оси x, так что ненулевые компоненты скорости его поверхности имеют вид $u_r(\varphi, z) = u_0\vartheta(a/2 - |z|)\cos\varphi$, $u_\varphi(\varphi, z) = -u_0\vartheta(a/2 - |z|)\sin\varphi$. Такое движение аналогично создаваемому точечным диполем (совмещенные источник и сток с нулевым мгновенным расходом).

Громоздкие выражения (6), (9)–(11) существенно упрощаются в некоторых предельных случаях, когда можно воспользоваться асимптотиками функций Ханкеля. Необходимые условия выполняются в следующих случаях.

1. Радиус цилиндра достаточно большой и превышает масштабы всех вносимых возмущений (ширину и длину волны пучка внутренних волн, толщины волновых пограничных слоев δ_ν и δ_φ), так что выполняются неравенства $|k_w R| \gg 1$, $|k_\varphi R| \gg 1$, $|k_\nu R| \gg 1$.

2. Генератором является цилиндр промежуточного радиуса, который существенно больше масштабов пограничных течений, но меньше характерных масштабов пучка внутренних волн: $|k_\varphi R| \gg 1$, $|k_\nu R| \gg 1$, $|k_w R| \ll 1$.

3. Тонкий излучатель, радиус которого существенно меньше всех масштабов задачи: $|k_\varphi R| \ll 1$, $|k_\nu R| \ll 1$.

Свойства возбуждаемых пучков внутренних волн и пограничных слоев зависят от характера движения излучающей поверхности. При анализе волновых возмущений для определенности рассматривается конический пучок, уходящий от источника вверх. Для этого в (6) следует ограничиться интегрированием по k от $-\infty$ до 0. Интегралы по k от 0 до $+\infty$ описывают волновые возмущения в нижнем полупространстве. Такой выбор пределов интегрирования обусловлен спецификой поля периодических внутренних волн, в которых энергия распространяется вдоль гребней волн, направленных от источника вдоль радиус-векторов, наклоненных под углом θ к горизонту, а фазовая скорость перпендикулярна гребням и направлена в сторону центральной горизонтальной плоскости.

Выражения для волнового поля имеют канонический вид в сопутствующей пучку системе координат (p, q), ось q которой направлена вдоль пучка, а ось p — вдоль фазовой скорости. Системы координат (p, q) и (r, z) связаны соотношениями $r = R + p\sin\theta + q\cos\theta$, $z = -p\cos\theta + q\sin\theta$.

Результаты вычислений для вертикальных смещений частиц в пучке сведены в таблицу. Введенная функция f определяется формулой

$$f(p, q, k) = \exp\left(ikp - \frac{\nu k^3 q}{2N\cos\theta}\right),$$

$a' = a\cos\theta$ — проекция высоты движущейся части цилиндра на ось p. В таблице буквами V, F и O обозначены источники переменного объема, фрикционный и осциллирующий соответственно. В таблице также приводятся выражения для максимальных смещений на оси одномодального пучка, излучаемого источником, высота a которого удовлетворяет неравенству $(a^3/q) \ll \nu/(2N\cos^4\theta)$.

Пространственная структура волнового поля сохраняет симметрию источника. Объемный и фрикционный источники создают аксиально-симметричное волновое поле. Осциллирующий источник имеет азимутальную диаграмму направленности, пропорциональную $\cos\varphi$, с максимумом в направлении смещений цилиндра (в поперечном направлении волны не излучаются). Колебания частиц в диаметрально противоположных точках поля объемного и фрикционного источников синфазны, тогда как у осциллирующего источника они противофазны.

Из сравнения приведенных в таблице формул следует, что поля, порождаемые объемным и осциллирующим источниками большого размера, одинаковы с точностью до $\cos\varphi$ (т. е. азимутальной диаграммы направленности поля). На больших расстояниях ($q \gg R$) амплитуды полей этих источников уменьшаются как $h(0, q) \sim q^{-5/6}$. Быстрее затухает поле фрикционного источника (на больших расстояниях $q \gg R$ получается $h(0, q) \sim q^{-7/6}$). С уменьшением радиуса уменьшается эффективность источников всех типов.

Амплитуды волн, генерируемых осциллирующим и объемным источниками промежуточного размера, становятся равными на расстоянии

$$q_0 = \frac{R^3 N \sin^3\theta\cos\theta}{(2\pi)^{3/2}\nu}\,\Gamma^3\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{R}{L_\nu}\right)^3 \Lambda\sin^3\theta\cos\theta\Gamma^3\left(\frac{5}{6}\right),$$

причем при $q < q_0$ эффективнее осциллирующий источник, а при $q > q_0$ — объемный.

Отношение эффективностей тонких объемного и фрикционного (или осциллирующего) излучателей стремится к нулю как $R\ln R$.

Формула для волнового поля фрикционного источника при $R \to \infty$ переходит в формулу, полученную в [9] для случая возбуждения волн частью плоскости, колеблющейся вдоль всей плоскости.

Структура пограничного слоя существенно зависит от характера движения излучающей поверхности. Во всех случаях излучение внутренних волн сопровождается образованием *внутреннего волнового пограничного слоя* с масштабом δ_φ.

На поверхности объемного и фрикционного источников вязкий волновой слой не образуется. Смещения частиц во внутреннем пограничном слое задаются следующими выражениями: для объемного источника

$$h = -\frac{u_0}{\pi\omega}\,\frac{H_0^{(1)}(k_\varphi r)}{H_0^{(1)}(k_\varphi R)}\ln\left|\frac{z+a/2}{z-a/2}\right| \tag{12}$$

в случае большого цилиндра и

$$h = -\frac{u_0 R\operatorname{tg}^2\theta}{\pi\omega}\,\frac{H_0^{(1)}(k_\varphi r)}{H_0^{(1)}(k_\varphi R)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{|k|R\operatorname{tg}\theta}{2}\,\sin\frac{ka}{2}\,\mathrm{e}^{ikz}\,dk \tag{13}$$

в случае промежуточного и тонкого цилиндров; для фрикционного источника

$$h = \frac{iu_z(z)}{\omega}\,\frac{H_0^{(1)}(k_\varphi r)}{H_0^{(1)}(k_\varphi R)}.$$

При неограниченном увеличении радиуса цилиндра последняя формула переходит в соответствующие формулы работы [9] для $\varphi = \pi/2$. В случае осциллирующего источника одновременно возникают внутренний и вязкий пограничные слои. Во внутреннем пограничном слое присутствуют все три компоненты скорости. Выражение для вертикальной компоненты для большого цилиндра имеет вид

$$v_z = \frac{iu_0\cos\varphi}{\pi}\,\operatorname{tg}\theta\exp\left(ik_\varphi(r-R)\right)\ln\left|\frac{z+a/2}{z-a/2}\right|, \tag{14}$$

а для промежуточного и малого —

$$v_z = R\operatorname{tg}^2\theta\,\frac{H_2^{(1)}(k_\nu R)H_1^{(1)}(k_\varphi r)}{H_0^{(1)}(k_\nu R)H_1^{(1)}(k_\varphi R)}\,\frac{\partial u_r(\varphi,z)}{\partial z}. \tag{15}$$

Движение в вязком пограничном слое происходит в горизонтальной плоскости. Радиальная компонента скорости описывается выражением

$$v_r = -\frac{i}{k_\nu R}\exp\left(ik_\nu(r-R)\right)u_r(\varphi,z)$$

для большого цилиндра и

$$v_r = \frac{2}{k_\nu R}\,\frac{H_1^{(1)}(k_\nu r)}{H_0^{(1)}(k_\nu R)}\,u_r(\varphi,z)$$

для промежуточного и малого.

Появление сингулярностей при $z = \pm a/2$ в формулах (12)–(15) обусловлено использованием приближенных выражений (8) для волновых чисел k_φ и k_ν при вычислении соответствующих интегралов. При использовании точных выражений (7) дельта-функции переходят в узкие ограниченные пики, а логарифмические особенности исчезают.

Заключение. Решена задача излучения трехмерных волн частью бесконечного вертикального цилиндра, совершающей произвольные малые перемещения. Процедура вычислений основана на использовании тороидально-полоидального потенциала, имеющего две скалярные компоненты.

Полученные точные решения (в виде интегралов Фурье) описывают помимо пучка уходящих внутренних волн и вязкого волнового (стоксова) пограничного слоя, масштаб которого определяется кинематической вязкостью и частотой волны ($\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$), внутренний волновой пограничный слой с масштабом, дополнительно зависящим от геометрии задачи ($\delta_\varphi = f(\varphi,\theta)\delta_\nu$). Функция $f(\varphi,\theta)$ имеет наиболее простой вид для вертикального цилиндра ($f = \operatorname{tg}\theta$) или наклонной плоскости ($f = \sin\theta\big/\sqrt{|\sin^2\theta - \sin^2\varphi|}$ [9]). В частном случае $\theta = \pi/4$, даже когда толщины вязкого и внутреннего волновых пограничных слоев совпадают, полного вырождения не происходит, поскольку в вязком слое периодические возмущения распространяются от цилиндра, а во внутреннем — в противоположном направлении.

В нелинейной постановке вязкое волновое пограничное течение, которое существует как в однородной, так и в стратифицированной жидкости, может служить непосредственным источником внутренних волн [13]. Использование приближенных решений дисперсионного уравнения позволяет выписать асимптотические приближения полученных выражений в явном виде и проанализировать свойства волновой компоненты поля.

Из приведенных выражений следует, что осциллирующий и пульсирующий источники большого размера порождают подобные волновые поля, в которых максимальные смещения вблизи источника убывают по одному закону. Эти поля отличаются азимутальной диаграммой направленности: для пульсирующего источника она изотропна, для осциллирующего имеет форму восьмерки, ориентированной вдоль направления колебаний цилиндра. Фрикционный источник является изотропным, но во всех случаях менее эффективным.

Закон затухания волнового поля, возбуждаемого источником промежуточных размеров, существенно зависит от его типа и поперечного размера. Наиболее медленно затухает изотропное поле, порождаемое пульсирующим источником (пропорционально q^{-1}), немного быстрее — осциллирующим и фрикционным источниками (пропорционально $q^{-4/3}$). В случае источника большой высоты максимум смещений в центре пучка вблизи осциллирующего тела может быть больше, чем у источников других типов. Координата точки, в которой амплитуды волн пульсирующего и осциллирующего источников равны, пропорциональна кубу отношения радиуса цилиндра к вязкому волновому масштабу и масштабу плавучести. На больших расстояниях превалирует пульсирующий источник. В предельном случае цилиндра бесконечного радиуса выражения для поля фрикционного источника переходят в решения [9] для возмущений, порождаемых колеблющейся вертикальной полосой. Картина волн, возбуждаемых осциллирующей цилиндрической оболочкой [14], качественно согласуется с приводимыми расчетами.

Вязкий и внутренний волновые пограничные слои возникают не только при генерации, но и при отражении трехмерных внутренних волн и, как и в двумерном случае [15], решают проблему "критических углов".

ЛИТЕРАТУРА

1. **Farmer D. M., Armi L.** Stratified flow of a topography and the generation of internal solitary waves // Dynamics of oceanic internal gravity waves. II: Proc. of 'Aha Huliko'a Hawaiian winter workshop, Honolulu, 18–22 Jan., 1999. Honolulu: SOEST spec. publ., 1999. P. 83–88.

2. **Лайтхилл Дж.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
3. **Макаров С. А., Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д.** Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 744–754.
4. **Hurley D. G.** The generation of internal waves by vibration elliptic cylinders. Pt 1. Inviscid solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 105–118.
5. **Hurley D. G., Keady G.** The generation of internal waves by vibration elliptic cylinders. Pt 2. Approximate viscous solution // Ibid. P. 119–138.
6. **Sutherland B. R., Dalziel S. B., Hughes G. O., Linden P. F.** Visualization and measurement of internal waves by sinthetic schlieren. Pt 1. Vertically oscillating cylinder // J. Fluid Mech. 1999. V. 390. P. 93–126.
7. **Dalziel S. B.** Sinthetic schlieren measurements of internal waves generated by oscillating a square cylinder // Proc. of the 5th Intern. symp. on stratified flows, Vancouver, 10–13 July, 2000. Vancouver, Canada: Univ. of British Columbia, 2000. V. 2. P. 743–748.
8. **Чашечкин Ю. Д., Кистович Ю. В.** Задача генерации монохроматических внутренних волн: точное решение и модель силовых источников // Докл. РАН. 1997. Т. 355, № 1. С. 54–57.
9. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 31–40.
10. **Ильиных Ю. С., Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Сравнение точного решения одной задачи возбуждения периодических внутренних волн с экспериментом // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 5. С. 649–655.
11. **Holm D. D., Kimura Y.** Zero-helicity Lagrangian kinematics of three-dimensional advection // Phys. Fluids. 1991. V. A3, N 5. P. 33–38.
12. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. С. 407–412.
13. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Нелинейная генерация периодических внутренних волн пограничным течением на вращающемся осесимметричном теле // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 5. С. 636–639.
14. **Ильиных Ю. С., Смирнов С. А., Чашечкин Ю. Д.** Возбуждение гармонических внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 141–148.
15. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 4. С. 607–613.

Поступила в редакцию 5/IX 2000 г.