ПМТФ, № 4, 1962

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НА ДНЕ ТРАНШЕИ

А. Б. Шабат

(*Новосибирск*)

Строится класс обтеканий контуров по схеме, предложенной М. А. Лаврентьевым, и устанавливаются некоторые общие свойства краевой задачи, соответствующей этой схеме.

Рассматриваемая плоская задача А ставится следующим образом.

Задача А. Движение жидкости происходит в области (фиг. 1), ограниченной линией L

$$y = y(x), \qquad \lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0$$

гладкой всюду, кроме точек a_1 и a_2, где направление касательной меняется скачком. Область течения $D\{y > y(x)\}$ состоит из двух областей D_1 и D_2; область D_1 (конечная область) ограничена дугой (a_1, a_2) линии L и дугой γ, лежащей в D и соединяющей точки a_1 и a_2; область D_2 — часть D, расположенная выше γ. Требуется по заданной линии L и скорости потока на бесконечности определить в каждой из этих областей поле скоростей (u, v), удовлетворяющее следующим условиям:

(a) в области D_2 движение безвихревое, а в D_1 — с постоянным [1] вихрем ω

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{для } D_2 \\ \omega & \text{для } D_1 \end{cases}$$

(b) линии L и γ являются линиями тока;

(c) вдоль γ скорости обоих течений совпадают.

Сформулированная задача А является задачей со «свободной» границей; при заданной скорости потока на бесконечности линия γ и величина завихренности ω подлежат определению. Математическое исследование этой задачи приводит к сложному нелинейному интегральному уравнению, и точной теоремы существования и единственности доказать пока не удалось. Однако приближенное исследование полученного интегрального уравнения довольно убедительно показывает, что существование и единственность (при заданной скорости потока на бесконечности) решения задачи А имеют место для широкого класса линий L.

Основной целью заметки является построение класса течений, удовлетворяющих требованиям задачи А. При этом оказывается более удобно задаваться дугой γ и пристраивать к потенциальному течению в области D_2 с известной границей вихревое течение в подлежащей определению области D_1. По существу в заметке рассматривается вместо задачи А следующая более простая задача Б.

Задача Б. Пусть задана граница области D_2 безвихревого течения и величина завихренности ω. Будем называть гладкую дугу L_1 без точек самопересечения, соединяющую точку a_1 и a_2, решением задачи Б, если потенциальное течение в D_2 и течение с завихренностью ω в области D_1, ограниченной L_1 и γ, удовлетворяет всем условиям задачи А.

Статья состоит из трех параграфов. В § 1 выясняются свойства распределения давления в области D_1 вихревого течения. § 2 посвящен общему исследованию задачи Б; основным результатом этого параграфа является теорема существования решения задачи Б для любой аналитической дуги γ. В § 3 при помощи метода § 2 проводится полное исследование класса течений, удовлетворяющих схеме М. А. Лаврентьева.

---

[1] Убедительные доводы в пользу того, что в области установившегося плоского течения идеальной жидкости с замкнутыми линиями тока завихренность должна быть постоянной, приведены в работе Батчеллора [1].

§ 1. Распределение давления в области вихревого течения. Поле скоростей течения, удовлетворяющего требованиям задачи А, непрерывно во всей области течения $D = D_1 U D_2$ и непрерывно дифференцируемо как в области D_1, так и в области D_2. На дуге γ терпят разрыв первого рода нормальные производные от компонент скорости. Легко видеть, что для таких течений давление остается непрерывным при переходе через γ. Рассмотрим относительные величины давления в области D_1 течения с постоянной завихренностью ω (на самом деле, ω равна завихренности с обратным знаком) и в области D_2 потенциального течения. Интегралы Бернулли имеют в этих областях соответственно вид

$$H = \omega\psi, \qquad H = \mathrm{const} \qquad \left(H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega\right) \tag{1.1}$$

Здесь ψ — функция тока, а Ω — потенциал поля внешних сил. Предположим для простоты, что $\Omega \equiv 0$, тогда при подходящем выборе произвольных постоянных из (1.1) имеем

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 = 0 \quad \text{для } D_2$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 = \omega\psi \quad \text{для } D_1 \tag{1.2}$$

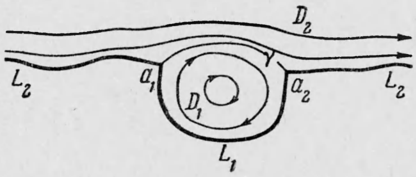
(в силу этого выбора $\psi = 0$ на γ).

Нетрудно показать, что при условии на бесконечности $v = 0$, $u > 0$ завихренность ω всегда больше нуля.

Так как в D_1

$$\Delta\psi = \omega, \qquad \psi = 0 \quad \text{на } \gamma$$

из $\omega > 0$ следует, что $\psi < 0$ в D_1. Таким образом, в области вихревого течения $p/\rho + {}^1/_2\, q^2 < 0$ и при равных абсолютных скоростях давление в D_1 меньше, чем в D_2.



Фиг. 1

В силу принципа максимума для субгармонической функции минимум ψ достигается в некоторой внутренней точке b, являющейся стационарной точкой ($u = v = 0$) поля скоростей. Интересно, что при широких предположениях относительно характера движения идеальной несжимаемой жидкости в стационарной точке b, лежащей внутри области течения, давление достигает не максимума, а минимума. Действительно, в системе координат (x, y) с началом в точке b и осью x, направленной так, чтобы $\partial u / \partial x = 0$ при $x = y = 0$ (очевидно, что такое направление найдется) имеем в силу уравнения неразрывности $\partial v / \partial y = 0$ при $x = y = 0$. Дифференцируя уравнения движения

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.3}$$

получаем, что при таком выборе системы координат

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{при } x = y = 0$$

Стандартное исследование поведения интегральных кривых в окрестности особой точки b диффереціального уравнения линий тока приводит к следующему утверждению.

Пусть b — стационарная точка поля скоростей, в окрестности которой все линии тока представляют собой либо спирали, либо замкнутые кривые, охватывающие b.

Тогда при ненулевой величине завихренности в точке b давление в этой точке достигает относительного минимума.

Подчеркиваем, что сформулированное утверждение справедливо для произвольного распределения завихренности в области течения.

В случае движений с постоянной завихренностью можно в дополнение к полученному результату установить некоторые свойства распределения давления во всей области течения. Так как для течений с постоянным вихрем компоненты скорости являются гармоническими функциями, из интеграла Бернулли (1.2) следует, что

$$\Delta\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}q^2\right)=\omega\Delta\psi=\omega^2 \quad \text{или} \quad \Delta p = 2\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=2J$$

Обозначим через B область вихревого течения с выколотыми стационарными точками b_k поля скоростей.

В области B в силу уравнений движения (1.3)

$$J=-\frac{1}{u}\begin{vmatrix} p_x & u_y \\ p_y & v_y \end{vmatrix} \quad \text{при } u\neq 0, \qquad J=-\frac{1}{v}\begin{vmatrix} u_x & p_x \\ v_x & p_y \end{vmatrix} \quad \text{при } v\neq 0$$

Следовательно, в этой области давление удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению вида

$$\Delta p + c(x,y)\,p_x + d(x,y)\,p_y = 0$$

и в силу общей теоремы Хопфа (см. [2], стр. 13—14) минимум и максимум давления достигаются на границе B. Резюмируя все выше сказанное, можно сформулировать следующее утверждение.

В области D_1 течения с постоянным вихрем давление при равных абсолютных величинах скорости меньше, чем в области D_2 потенциального течения.

При естественном предположении замкнутости линий тока вблизи стационарных точек b_k поля скоростей, лежащих внутри D_1, минимум давления достигается либо на границе этой области, либо в одной из точек b_k.

Некоторые соображения в пользу того, что минимум достигается во внутренней стационарной точке b_k, а не на границе D_1, будут приведены позднее в § 3.

§ 2. Общие свойства задачи Б. При заданной границе области D_2 можно считать известной аналитическую функцию

$$\chi_2'(z)=u-iv$$

определяющую поле скоростей в области безвихревого течения.

Предположим, что дуга γ является аналитической, и покажем, что при заданной величине параметра ω поле скоростей (u, v), удовлетворяющее системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\omega \tag{2.1}$$

вполне определяется условием (с)

$$F(z)=\chi_2'(z) \quad \text{при } z\in\gamma \tag{2.2}$$

Здесь через $F(z)=u-iv$ обозначена комплексная скорость вихревого течения.

В самом деле, из (2.1) следует, что функция $F(z)$ представима в виде

$$F(z)=F^*(z)+\omega y$$

где $F^*(z)$ — аналитическая функция. Условие (2.2) дает

$$F^*(z)=\chi_2'(z)-\omega y \quad \text{при } z\in\gamma$$

и, следовательно,

$$F^*(z)=\chi_1'(z)-\omega f(z)$$

где через $\chi_1'(z)$ обозначено аналитическое продолжение $\chi_2'(z)$, а $f(z)=y$ при $z\in\gamma$.

Нетрудно найти явное выражение функции $f(z)$. Выберем для этого на γ в качестве параметра длину дуги s, отсчитываемую от точки a_2

$$\gamma = \{x = X(s),\ \ y = Y(s),\ \ 0 < s < l\}$$

и рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = X(\zeta) + iY(\zeta), \qquad \zeta = s + ip$$

Эта функция осуществляет конформное отображение (производная $g'(\zeta)$ не обращается в нуль, так как $X'^2 + Y'^2 = 1$) окрестности отрезка $0 < s < l$ на окрестность дуги γ. Легко видеть, что сложная функция

$$f(z) = Y[g^{-1}(z)] \tag{2.3}$$

является аналитической вблизи γ и принимает на γ значения, равные y.

Возвращаясь к поставленной выше задаче Б, можно заключить, что гладкая линия тока L_1 поля (u, v), соединяющая точки a_1 и a_2

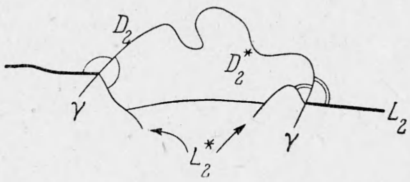
$$u - iv = F(z) = \chi_1'(z) - \omega f(z) + \omega y \tag{2.4}$$

будет решением задачи Б, если в области D_1, ограниченной L_1 и γ, нет особых точек аналитических функций $\chi_1'(z)$ и $f(z)$.

В дальнейшем будем предполагать дугу γ аналитической, включая концы a_1 и a_2 (на L по-прежнему накладывается одно только требование гладкости). Легко видеть, что это условие обеспечивает регулярность поля (2.4) в некоторой области D_2^* вида, показанного на фиг. 2.

Изучение задачи Б естественно начать с исследования характеристических направлений в особых точках a_1 и a_2 дифференциального уравнения линий тока

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \tag{2.5}$$



Фиг. 2

лежащих в области D_2^*. Известно, что производная конформного отображения $w = f(z)$ области D, ограниченной двумя гладкими кривыми γ_1 и γ_2, смыкающимися в точке $z = 0$, под углом $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 2$, на область с гладкой вблизи $f(0)$ границей имеет вид [1]

$$f'(z) = cz^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + o\left(z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right), \qquad z \in [D] \tag{2.6}$$

где c — некоторое отличное от нуля число, а через (D) обозначено замыкание области D. Выясним порядок остаточного члена формулы (2.6).

Пусть $z_1 = z^{1/\alpha}$, тогда, как легко получить из теоремы Келлога (см. [3], стр. 468), производная конформного отображения

$$w = f_1(z_1) = f(z_1^\alpha)$$

допускает вблизи точки $z_1 = 0$ представление

$$f_1'(z_1) = c + d_1(z_1)z_1^\beta \qquad (|c| > 0)$$

где β — любое число из интервала $0 < \beta < 1$, а $d_1(z_1) \to 0$ при $z_1 \to 0$.

[1] Для простоты предполагается, что касательная к γ_2 в точке $z = 0$ совпадает с действительной осью.

Так как

$$f'(z) = f_1'\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) z^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

то отсюда следует, что

$$f'(z) = cz^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + d(z)\, z^{\frac{1+\beta}{\alpha}-1} \qquad (0<\beta<1) \tag{2.7}$$

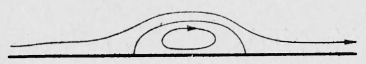
где

$$d(z) \to 0 \quad \text{при } z \to 0$$

Заметим, что представление в виде бесконечного ряда

$$z = \varphi(w) = c_1 w^{\alpha} + c_2 w^{2\alpha} + c_3 w^{3\alpha} + \ldots$$

легко получающееся, когда γ_1 и γ_2 являются отрезками прямых, справедливо далеко не всегда даже для аналитических дуг γ_1 и γ_2 (предполагается, что образы γ_1 и γ_2 в плоскости w образуют аналитическую дугу). Например, если одна из дуг (пусть γ_1) есть отрезок прямой и $\alpha = {}^1/_2$, необходимым и достаточным условием представимости $\varphi(w)$ в указанном виде является условие аналитичности γ_2 плюс условие симметрии γ_2 относительно прямой γ_1.



Фиг. 3

Отметим, что формула (2.7) доказана в одном лишь предположении гладкости дуг γ_1, γ_2.

Пусть L_2 — часть L, примыкающая к D_2, образует с γ в точках a_1 и a_2 углы $\alpha_1\pi$ и $\alpha_2\pi$ соответственно. Ясно, что при аналитическом продолжении $\chi_2(z)$ линия γ и образ L_2, на которых $\psi_1 = 0$ $[\chi_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1]$ образуют между собой в точке a_i угол $\alpha_i\pi$, $i = 1, 2$. Следовательно, представление вида (2.7) остается справедливым и в области $D_2{}^*$, показанной на фиг. 2. Из (2.4) и (2.7) вытекает следующее представление поля скоростей вихревого течения в окрестности точки a_2 при $z \in [D_2{}^*]$

$$u - iv = cr^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}} e^{i\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\varphi} + o\left(r^{\frac{1+\beta}{\alpha}-1}\right) + \omega r \sin(\varphi - \alpha_2\pi)\, e^{-i\alpha_2\pi} + O(r^2)$$

где $c > 0$, $r = |z - a_2|$ и угол φ отсчитывается от касательной к L_2 против часовой стрелки. Нетрудно показать, используя это представление, что любое решение дифференциального уравнения (2.5), проходящее через точку a_2, имеет в этой точке определенное направление касательной. Стандартная процедура нахождения характеристических направлений $\varphi = \beta_2\pi$, лежащих в области D_2^*, приводит к соотношениям:

$$\begin{array}{lll} (1) & \beta_2 = \alpha_2 & \text{при } 0<\alpha_2<\frac{1}{2} \\ (2) & \operatorname{tg}(\beta_2\pi) = -\omega/2c, \quad \infty & \text{при } \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ (3) & \beta_2 = 2\alpha_2 & \text{при } \frac{1}{2}<\alpha_2<1 \\ (4) & \beta_2 = \alpha_2 & \text{при } 2>\alpha_2>1 \end{array} \tag{2.8}$$

В точке a_1 зависимость $\beta_1 = f(\alpha_1)$ имеет, очевидно, тот же вид, если только обозначить через $\beta_1\pi$ угол между L_2 и характеристическим направлением, отсчитываемый от L_2 по часовой стрелке. В противоположность (2.7) соотношения (2.8) существенно зависят от предположения аналитичности γ, включая конец a_2. Нами найдено численным исследованием интегрального уравнения, соответствующего задаче А, потенциально вихревое течение над гладким дном (фиг. 3), хотя из (2.8), на первый взгляд, следует, что задача А не может иметь такого решения. Кажущееся противоречие объясняется тем, что в концах дуги γ нарушается аналитичность и поэтому формула (2.7) перестает быть справедливой в $D_2{}^*$.

При $^1/_2 < \alpha_i < 2$ имеем $u - iv \approx \chi_1'(z)$ и поле направлений вблизи характеристического направления $\beta_i\pi$ примет вид, показанный на фиг. 4. Ясно, что в этом случае по характеристическому направлению может входить только одна интегральная кривая дифференциального уравнения (2.5) (в противном случае нашлась бы такая область, в которой $\psi \equiv 0$). Следовательно, если хотя бы одно из $\alpha_i > 1$, задача Б не может иметь решения.

Теорема 2.1. Пусть аналитическая, включая концы a_1 и a_2, дуга γ образует с L_2 ненулевые углы $\alpha_1\pi$ и $\alpha_2\pi$, причем $0 < \alpha_i < 1$.

Тогда найдется такое $\omega_0 > 0$, зависящее от γ, что при всех $\omega \geqslant \omega_0$ решение $L_1(\omega)$ задачи Б существует. Линии $L_1(\omega)$ образуют монотонное семейство, стягивающееся к γ при $\omega \to \infty$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что функцию тока ψ вихревого течения с полем скоростей (2.4) можно представить в виде

$$\psi(x, y; \omega) = \mathrm{Im}\left\{x_1(z) - \omega \int f(z)\, dz\right\} + \omega \frac{y^2}{2}$$

Обозначим через $\psi_1(x, y)$ и $b(x, y)$ мнимые части первообразных от $\chi_1'(z)$ и $f(z)$ и перепишем это соотношение в форме

$$\psi(x, y; \omega) = \psi_1(x, y) - \omega\varphi(x, y) \qquad (\varphi = b - y^2/2) \tag{2.9}$$

Будем считать в дальнейшем, что аддитивная постоянная, неявно входящая в (2.9), выбрана так, чтобы

$$\psi_1(x, y) = \varphi(x, y) = 0 \qquad \text{при } z \in \gamma$$

Ясно, что линия $L_1(\omega)$ является решением уравнения

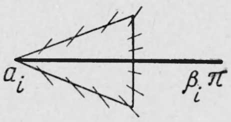
$$\psi(x, y; \omega) = 0$$

и вопрос о существовании решения задачи Б есть вопрос о существовании пересечения (с гладкой проекцией) поверхностей $t = \psi_1(x, y)$ и $t = \omega\varphi(x, y)$, проходящего через точки a_1 и a_2. Исследуем поведение этих поверхностей вблизи аналитической кривой γ

$$x = X(s), \qquad y = Y(s) \qquad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\ s_1 < 0,\ s_2 > l)$$

Здесь s — длина дуги γ, отсчитываемая от точки a_2, причем точке a соответствует $s = l$. Введем в окрестности γ местную систему координат (s, n)

$$z = g(\zeta) = X(\zeta) + iY(\zeta), \qquad \zeta = s + in$$



Фиг. 4

(см. стр. 71). Нетрудно проверить, что на γ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} = -1 \tag{2.10}$$

Последнее равенство следует из того, что $|g'(\zeta)| = 1$, $\partial^2\varphi / \partial s^2 = 0$ при $n = 0$ и функция $\varphi(s, n)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} = -|g'(\zeta)|^2$$

Ясно также, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\, \partial s} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial n^2 \partial s} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial n \partial s^2} = 0 \qquad \text{при } n = 0$$

В силу этих соотношений линии уровня $\varphi(s, n) = \varepsilon$ параллельны γ при малых ε с точностью до n^2, точнее для этих линий $n = n(s)$

$$n'(s) = -\frac{\varphi_s}{\varphi_n} = \frac{O(n^3)}{O(n)} = O(n^2) \tag{2.11}$$

Подберем, наконец, значение n_0 настолько малым, чтобы в области $\Delta(s_1, s_2)$ $\{s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\ 0 < n \leqslant n_0\}$ выполнялись следующие условия:

а) линии $s = c_1$ и $s = c_2$, соответствующие различным значениям c_1 и c_2, не пересекались в $\Delta(s_1, s_2)$;
б) $\partial^2\varphi/\partial n^2 \leqslant m < 0, \qquad \varphi(s, n) < 0$;
в) функции $\chi_1'(z)$ и $f(z)$ не имели особых точек;
г) линия $\psi_1 = 0$, образующая с γ угол $\alpha_i\pi$ в точке a_i, лежала при $n \geqslant n_0$ в $\Delta(s_1, s_2)$.

В отличие от функции $\varphi(s, n)$ производная по нормали $\partial\psi_1(s, n) / \partial n$ не равна нулю на γ

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right|_{n=0} = -\sqrt{u^2 + v^2} < 0 \quad \text{при } 0 < s < l \tag{2.12}$$

Это следует из того, что $|g'(\zeta)| = 1$ при $n = 0$ и направление $n > 0$ соответствует внешней по отношению к области D_2 нормали к γ. Вторая производная по нормали от функции $\psi_1(s, n)$ ограничена и непрерывна всюду в замкнутой области $\Delta(s_1, s_2)$, за исключением, быть может, точек a_1 и a_2.

Ясно теперь, что для любого заданного $s_0 > 0$ можно найти такое $\omega_0 > 0$, чтобы в области $\Delta(s_0, l - s_0)$ $\{s_0 \leqslant s \leqslant l - s_0,\ 0 < n \leqslant n_0\}$ при всех $\omega \geqslant \omega_0$ выполнялись неравенства

$$\psi(s, n_0; \omega) > 0, \qquad \frac{\partial^2\psi(s, n; \omega)}{\partial n^2} \geqslant m^* > 0 \tag{2.13}$$

Эти неравенства вместе с (2.10) и (2.12) показывают, что при заданном $\omega \geqslant \omega_0$ на любой линии $s = c$, $s_0 \leqslant c \leqslant l - s_0$ найдется и притом единственная точка области $\Delta(s_0, l - s_0)$, в которой $\psi(s, n; \omega) = 0$. В силу выпуклости $\psi(s, n; \omega)$ как функции от n в этой точке $\partial\psi / \partial n > 0$ и, следовательно, уравнение

$$\psi(s, n; \omega) = 0, \qquad \omega \geqslant \omega_0 \tag{2.14}$$

определяет в $\Delta(s_0, l - s_0)$ гладкую кривую $\Gamma = \{n = q(s),\ s_0 \leqslant s \leqslant l - s_0\}$. Остается доказать, что при $0 < \alpha_i < 1$ кривая Γ при своем продолжении влево и вправо попадает в точки a_1 и a_2. Так как точки a_1 и a_2 вполне равноправны, ограничимся доказательством того, что Γ попадает в точку a_2 при любом $0 < \alpha_2 < 1$ (для краткости в дальнейшем вместо α_2 будем писать просто α).

Случай $0 < \alpha \leqslant 1/2$. В этом случае легко показать, пользуясь теоремой относительно второй производной конформного отображения областей с гладкой границей (см. [3], стр. 470) и соображениями, при помощи которых была доказана формула (2.7), что в области $\Delta(s, l - s_0)$

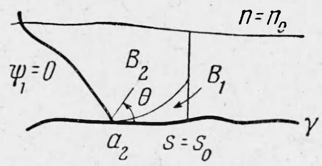
$$\left|\frac{\partial^2\psi_1}{\partial n^2}\right| < M$$

Следовательно, уравнение (2.14) определяет при достаточно большом ω_0 и $0 < \alpha \leqslant 1/2$ гладкую кривую Γ

$$n = q(s), \quad 0 < s \leqslant l - s_0$$

Введем в рассмотрение линию $\psi_1 = 0$, образующую с γ угол $\alpha\pi$. При $0 < \alpha < 1/2$ можно считать, что n_0 было выбрано настолько малым, чтобы линия $\psi_1 = 0$ пересекала границу области $\Delta(0, l - s_0)$ только при $n = n_0$. Так как на линии $\psi_1 = 0$ функция $\varphi < 0$ при $n \neq 0$, то $q(s)$ при $s \to 0$ должна стремиться к нулю и кривая Γ при $s \to 0$ попадает в точку a_2.

При $\alpha = {}^1/_2$ легко видеть из (2.10) и (2.7), что линии уровня $\varphi(s, n) = \mathrm{const}$ и $\psi_1(s, n) = \mathrm{const}$ не могут иметь точек касания в области B, ограниченной линиями $\psi_1 = 0$, $n = n_0$ и лучом $\theta = \pi / 4$, выходящим из a_2; угол θ отсчитывается здесь от касательной к γ (см. формулу (2.12)). Так как $\operatorname{grad} \psi_1 \neq 0$, в этой области нет особых точек дифференциального уравнения линий тока (2.5). Линия Γ входит в область B через луч $\theta = \pi / 4$ и не может кончиться внутри этой области ввиду отсутствия в B особых точек (см. [4], стр. 430). Следовательно, эта линия при своем продолжении попадает в точку a_2.



Фиг. 5

Случай ${}^1/_2 < \alpha < 1$. Этот случай требует несколько более сложного анализа и основан на построении области B (фиг. 5) такой, что в одной ее части B_1, прилегающей к γ, $\partial^2\psi / \partial n^2 \geqslant m > 0$, а в другой — B_2 линии уровня функций φ и ψ_1 не могут соприкасаться. Установим сначала вид границы области B_2. На любом луче $\theta = \delta > 0$ (фиг. 5) найдется точка $r = r(\delta)$ такая, что при $r < r(\delta)$ углы наклона вектора скорости и линии уровня $\varphi = \mathrm{const}$ к касательной к γ будут различны. В самом деле, из (2.7) следует

$$\arg(u + iv) = -\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\theta + o\left(r^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}\right) \tag{2.15}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало. Сравнив (2.15) и (2.11), получим, что $r(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и «нижняя» граница области B_2 имеет вид

$$n = n_2(s), \qquad n_2(s) < s^{\frac{1}{\alpha}+1-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

где ε — сколь угодно мало. Покажем, что граница области B_1 лежит при малых s $(\alpha < 1)$ выше $n_2(s)$, т. е. что в области, ограниченной γ и $n_2(s)$

$$\left|\frac{\partial^2\psi_1}{\partial n^2}\right| < M = \mathrm{const} \tag{2.16}$$

Действительно, из (2.7)

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} = -cr^{\frac{1}{\alpha} - 1} \cos\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\theta + o\left(r^{\frac{2}{\alpha} - 1 - \varepsilon}\right) \tag{2.17}$$

Дифференцируя (2.17), получаем

$$\left|\frac{\partial^2\psi_1}{\partial n^2}\right| \approx c\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\,r^{\frac{1}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\theta\right)$$

Отсюда следует, что неравенство (2.16) выполнено при

$$n < n_1(s), \qquad n_1(s) > s^{3 - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$$

Так как

$$\frac{1}{\alpha} + 1 - 3 + \frac{1}{\alpha} = 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > 0 \qquad \text{при } \alpha < 1$$

неравенство (2.16) справедливо и при $n \leqslant n_2(s)$. Сравнивая полученные результаты, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Найдется такое малое s_0 и такое большое ω_0, что уравнение

$$\psi(s, n; \omega) = 0, \qquad \omega \geqslant \omega_0$$

определяет гладкую кривую $\Gamma = \{n = q(s),\ l - s_0 \geqslant s \geqslant s_0\}$; причем в области B, ограниченной кривой γ линиями $s = s_0$, $n = n_0$ и $\psi_1 = 0$, продолжение Γ не может пересечь границу B в точке, отличной от a_2, и не может кончиться в B (в области B_2 нет особых точек, в области B_1 в точках Г производная $\partial\psi / \partial n > 0$ в силу выпуклости $\psi(s, n)$).

Следовательно, кривая Г при своем продолжении либо доходит до точки a_2, либо накручивается на предельный цикл Г*, расположенный в области B (см. [4], стр. 430).

Легко видеть, что вторая возможность отпадает. Действительно, $\psi(x, y; \omega) = 0$ на Г* и в силу принципа максимума для субгармонической функции производная от ψ по внутренней нормали к Г* меньше нуля. С другой стороны, Г* не может лежать целиком в B_2, так как в B_2 нет особых точек дифференциального уравнения линий тока. В точках Г*, принадлежащих B_1, производная $\partial\psi / \partial n > 0$; таким образом, приходим к противоречию. Доказательство первой части теоремы закончено, остается проверить, что линии $L_1(\omega)$ образуют монотонное семейство, стягивающееся при $\omega \to \infty$ к γ.

Все построенные решения задачи Б лежат в области $\Delta(s_1, s_2)$. Так как во внутренних точках этой области $\varphi(x, y) < 0$, линии $L_1(\omega)$, отвечающие различным значениям ω, не могут иметь общих точек, кроме a_1 и a_2. Докажем, что при $\omega_1 > \omega_2 \geqslant \omega_0$ линия $L_1(\omega_1)$ лежит внутри области $D_1(\omega_2)$, ограниченной $L_1(\omega_2)$ и γ.

В самом деле, предположим противное, тогда в области $D_1(\omega_1)$ найдется точка (x, y), в которой

$$\psi(x, y; \omega_2) = \psi_1(x, y) - \omega_2\varphi(x, y) = 0$$

С другой стороны, в области $D_1(\omega_1)$ в силу принципа максимума для уравнения $\Delta\psi(x, y; \omega_1) = \omega_1$

$$\psi(x, y; \omega_1) \leqslant 0$$

Ясно, что эти соотношения противоречат одно другому. Легко видеть, наконец, что при $\omega \to \infty$ линии $L_1(\omega)$ стремятся к γ.

§ 3. Частный случай задачи Б. Исследование течения в области D_1. Пусть теперь граница области D_2 потенциального течения состоит из действительной оси с выброшенным отрезком $(-1, +1)$ и дуги окружности γ, образующей с действительной осью углы

$$\alpha_1\pi = \alpha_2\pi = \alpha\pi, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Введем в рассмотрение открытую область D_2^*, симметричную D_2 относительно γ. В силу принципа симметрии Римана — Шварца функция $\chi_1'(z)$, являющаяся аналитическим продолжением через γ функции $\chi_2'(z)$, не имеет в этой области особых точек. Что касается функции $f(z)$, то, используя формулу (2.3), нетрудно получить

$$f(z) = b + \frac{i}{2}\frac{(z - ib)^2 - R^2}{z - ib} \qquad \left(b = \operatorname{ctg}\alpha\pi, \quad R = \frac{1}{\sin\alpha\pi}\right) \tag{3.1}$$

Здесь b — ордината центра окружности, дугой которой является γ, а R — радиус этой окружности. Таким образом, функция $f(z)$ также не имеет в D_2^* особых точек. Покажем теперь, что в D_2^* содержатся все решения задачи Б. Функция тока $\psi(x, y; \omega)$ вихревого течения, как это следует из (2.9) и (3.1), имеет в рассматриваемом случае вид

$$\psi(x, y; \omega) = \psi_1(x, y) - \frac{\omega}{4}\left[R^2 - r^2 + R^2\ln\frac{r^2}{R^2}\right], \quad r = |z - ib| \tag{3.2}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x, y) = \frac{\psi_1(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

заданную в D_2^*. Функция $\omega = g(x, y)$ дает значение ω для кривой $L_1(\omega)$, проходящей через точку (x, y), если такая кривая существует. На границе области D_2^*, состоящей из γ и дуги окружности γ^*, проходящей через точки -1, $+1$ и ib

$$g(x, y) = \infty \quad \text{при } z \in \gamma, \qquad z \neq \pm 1$$
$$g(x, y) = 0 \quad \text{при } z \in \gamma^*, \qquad z \neq \pm 1, ib$$

Таким образом, линии $L_1(\omega)$ могут пересекать границу D_2^* только в точках ± 1 и ib. Так как в точке $z = ib$ нарушается регулярность поля скоростей вихревого течения, то отсюда следует, что все линии $L_1(\omega)$ лежат в области D_2^*.

Рассмотрим особые точки дифференциального уравнения линий тока в области D_2^*. В силу принципа симметрии линии

$$\psi_1(x, y) = \text{const}$$

при инверсии относительно γ переходят в линии тока потенциального течения в D_2. Так как функция $\varphi(x, y)$ зависит только от $r = |z - ib|$, то образы линий

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

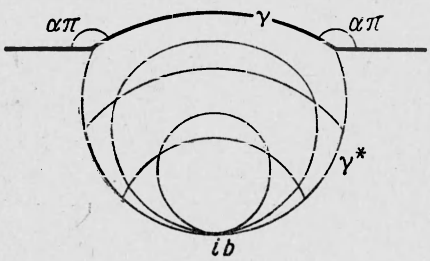
представляют собой концентрические окружности γ_r с центром в точке ib.

Для того чтобы выяснить взаимное расположение линий этих двух семейств, перейдем к новой независимой переменной

$$z - ib = e^\zeta, \quad \zeta = \ln|z - ib| + i\alpha$$

и рассмотрим функцию

$$W(\zeta) = \chi_2(e^\zeta + ib) = \varphi_2 + i\psi_2$$



Фиг. 6

Легко проверить, пользуясь очевидным соотношением

$$W'(\zeta) = \chi_2' e^\zeta = -i\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha}$$

и принципом максимума для гармонической функции $\partial\psi_2 / \partial\alpha$, что в точках $z \in D_2$, лежащих правее прямой $x = 0$, производная $\partial\psi_2 / \partial\alpha > 0$, а в точках, лежащих левее этой прямой, $\partial\psi_2 / \partial\alpha < 0$. Следовательно, в точке пересечения z окружности γ_r и линии тока, касательные к этим линиям, совпадают только при $x = 0$. Возвращаясь к вихревому течению в области D_2^*, убеждаемся, что все особые точки дифференциального уравнения линий тока (2.5) лежат на прямой $x = 0$. Взаимное расположение линий уровня функций $\psi_1(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ показано на фиг. 6.

Перейдем теперь к исследованию структуры семейства решений $L_1(\omega)$ задачи Б; в рассматриваемом случае этот вопрос выясняется до конца. Линии $L_1(\omega)$ по определению представляют собой гладкие решения уравнения

$$\psi(x, y; \omega) = 0 \tag{3.3}$$

проходящие через точки $+1$ и -1. Рассмотрим класс всех решений $l(\omega)$ уравнения (3.3) или, что то же, семейство линий уровня $g(x, y) = \omega$. Так как функция $g(x, y)$ в D_2^* является однозначной и принимает только положительные значения, линии $l(\omega)$, отвечающие различным значениям ω, не пересекаются в D_2^*, и на любой $l(\omega)$ величина ω больше нуля. Из непрерывности $g(x, y)$ следует, что на каждой прямой $x = c$, $0 < |c| < 1$ найдется точка $z \in D_2^*$, через которую[1] проходит кривая $l(\omega)$ с заданным $\omega > 0$. Иначе обстоит дело на прямой $x = 0$. Легко видеть, что $g(0, y) \to +\infty$ при $y \to b$, $b + R$. Поэтому

$$\min g(0, y) = \omega_1 > 0, \qquad b < y < b + R$$

[1] Нетрудно убедиться, исходя из картины линий уровня $\varphi(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$, показанной на фиг. 6, что $l(\omega)$ при своем продолжении «в сторону» прямой $x = 0$ пересекает эту прямую.

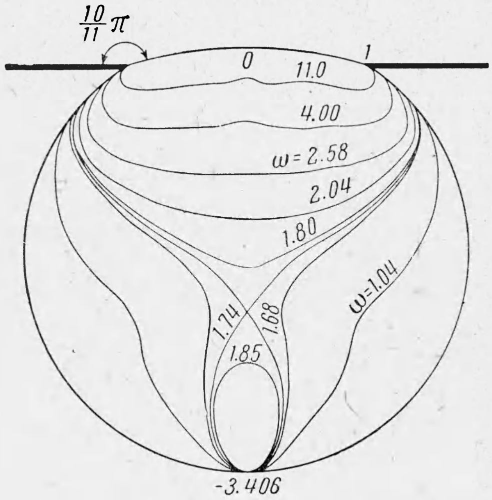
и для линий $l(\omega)$, пересекающих прямую $x = 0$ во внутренней точке D_2^*, $\omega \geqslant \omega_1$. Воспользуемся теперь следующей леммой, доказательство которой будет приведено в конце работы.

Лемма. Для любой дуги окружности γ, образующей с действительной осью углы $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 1$, поле скоростей (u, v) вихревого течения в области D_2^*, отвечающее заданной величине завихренности $\omega > 0$, имеет на прямой $x = 0$ не более двух стационарных точек ($u = v = 0$).

В силу этой леммы производная $f'(y)$ функции

$$f(y) = \psi(0, y) = \psi_1(0, y) - \omega\varphi(0, y)$$

может обращаться в нуль на $(b, b + R)$ не более двух раз. Легко видеть отсюда, что функция $g(y) \equiv g(0, y)$ принимает значение $\omega > 0$ не более чем в двух точках и, если обозначить через y_1 точку, в которой $g(y)$ достигает минимума $[g(y_1) = \omega_1]$, то $g'(y) > 0$ при $y > y_1$ и $g'(y) < 0$ при $y < y_1$. Нетрудно показать теперь, пользуясь принципом максимума для субгармонической функции $\psi(x, y; \omega)$ и симметрией $l(\omega)$ относительно прямой $x = 0$, что линии $l(\omega)$, выходящие из точек $(0, y)$, $y > y_1$, при своем продолжении попадают в точки ± 1 и линии $l(\omega)$, выходящие из точек $(0, y)$, $y < y_1$, при своем продолжении попадают в точку ib. Семейство линий $l(\omega)$, соответствующее $\alpha = {}^{10}/_{11}$, показано на фиг. 7.



Фиг. 7

Из сформулированной выше леммы видно, что в области D_1, ограниченной γ и $L_1(\omega)$, $\omega > \omega_1$, поле скоростей (u, v) вихревого течения имеет только одну стационарную точку $[0, y_2(\omega)]$. Линии тока этого течения не могут пересечь границу D_1 (в противном случае внутри D_1 нашлись бы точки, в которых $\psi(x, y; \omega) = 0$) и, следовательно, представляют собой либо предельные циклы, либо спирали (см. [4], стр. 430). Так как в силу леммы каждая линия тока пересекает прямую $x = 0$ только в двух точках, последняя возможность отпадает. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 3.1. Для любой дуги окружности γ, образующей с действительной осью углы $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 1$, найдется такое $\omega_1 > 0$, что решение $L_1(\omega)$ задачи Б существует при всех $\omega > \omega_1$ и не существует при $\omega < \omega_1$. В области $D_1(\omega)$, $\omega > \omega_1$, ограниченной $L_1(\omega)$ и γ, линии тока вихревого течения (с завихренностью ω) представляют собой гладкие замкнутые кривые без точек самопересечения. Все эти линии тока содержат внутри себя единственную стационарную точку $u = v = 0$ поля скоростей, расположенную на прямой $x = 0$.

Заметим в дополнение к теореме 3.1, что линии $L_1(\omega)$ и γ образуют в точках ± 1 при $0 < \alpha < {}^1/_2$ нулевой угол; при ${}^1/_2 < \alpha < 1$ — угол $\alpha\pi$, а при $\alpha = {}^1/_2$ этот угол меняется в зависимости от ω от 0 до $\operatorname{arc\,ctg} \omega_1 / 2c \approx z \operatorname{arc\,ctg} 2 \approx 74°$ (см. (2.8)). Нетрудно проверить также, что $y_1 \to -\infty$ при $\alpha \to 1$; следовательно, в рассматриваемом классе течений по схеме М. А. Лаврентьева «траншея» может быть сделана глубокой за счет увеличения α.

Следующее замечание касается вопроса о том, где достигается максимум давления,— на грани ц области D_1 вихревого течения или внутри нее в стационарной точке (см. стр. 7). Для рассматриваемого класса течений в силу теоремы 3.1 все линии тока являются замкнутыми кривыми, и в D_1 есть только одна стационарная точка $(0, y_2)$. Минимум давления на границе D_1 равен $p_0 = -\frac{1}{2}\rho q_0^2$, где через q_0 обозначен максимум модуля скорости q на границе D_1. Будем считать, что этот максимум q достигается в верхней точке γ, расположенной на прямой $x = 0$. Во всяком случае q_0 больше, чем значения q во всех остальных точках γ и, как показывают расчеты, выполненные для $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha = \frac{10}{11}$ при любом $\omega > \omega_1$, q_0 больше, чем значение q в точке пересечения $L_1(\omega)$ с прямой $x = 0$ (в этой точке q достигает относительного максимума, если $L_1(\omega)$ выпукла кверху). Покажем, что для областей $D_1(\omega)$, для которых линия $L_1(\omega)$ монотонно убывает при $-1 < x < 0$, давление в точке $[0, y_2(\omega)]$ меньше, чем

$$p_0 = -\frac{1}{2}\rho q_0^2$$

Действительно, в силу интеграла Бернулли (1.2) имеем на прямой $x = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -uu_y + \omega\psi_y = u(\omega - u_y) = uv_x$$

Так как по предположению на части границы D_1, расположенной левее прямой $x = 0$, имеем $v > 0$, то $v_x \leqslant 0$ при $x = 0$. В силу леммы имеем также $u > 0$ при $x = 0$ и $y > y_2(\omega)$. Следовательно, $\partial p / \partial y < 0$ и давление в точке $(0, y_2)$ меньше p_0.

Дополнение. Доказательство леммы, сформулированной на стр. 78. Так как $v = 0$ на прямой $x = 0$, стационарные точки поля скоростей (2.4) совпадают с точками $(0, y)$, для которых

$$u = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \omega\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

Будем считать для определенности, что $\chi_2'(\infty) = 1$ (поле скоростей $\mathbf{v}^*$ в D_2 и D_2^*, отвечающее $\chi_2'(\infty) = K$, связано с полем скоростей $\mathbf{v}$, отвечающим $\chi_2'(\infty) = 1$ простым соотношением $\mathbf{v}^* = K\mathbf{v}$), тогда, представив конформное отображение $\chi_2(z)$ области D_2 на полуплоскость как суперпозицию отображений

$$z_1 = \frac{z-1}{z+1}, \qquad z_2 = z_1^{1/2}, \qquad \chi = \frac{2}{\alpha}\frac{1}{1 - z_2}$$

находим без труда, что на прямой $x = 0$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \left[\alpha^2(1 + y^2)\sin^2\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,ctg} y\right)\right]^{-1} = u_1(y) \tag{3.4}$$

Заметим попутно, что из (3.4) вытекает следующее представление:

$$\psi_1(0, y) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,ctg} y\right)$$

Рассмотрим функцию

$$u(y)t^2 = u_1t^2 + \frac{\omega}{2}(t^3 - R^2t) \tag{3.5}$$

где $t = y - b$, $b = \operatorname{ctg}\alpha\pi$, $R = 1/\sin\alpha\pi$ (см. (3.1)). Лемма будет доказана, если показать, что эта функция выпукла при $0 < t < R$. Второе слагаемое в (3.5) имеет, очевидно, положительную вторую производную при всех $\omega > 0$, $t > 0$. Достаточно показать, таким образом, что

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_1t^2) \geqslant 0, \qquad 0 < t < R$$

или, другими словами, показать выпуклость скорости потенциального течения $u_2(0, y)$ по переменной $t = R^2 / y - b$. Перейдем к переменной s

$$\pi - s = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,ctg} y, \qquad y = \operatorname{ctg}\alpha(\pi - s)$$

Легко видеть, что

$$s = 0 \quad \text{при } y = b = \operatorname{ctg}\alpha\pi, \qquad s = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } y = R + b = \operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$u_1(y)t^2 = \frac{1}{\alpha^2\sin^2\alpha\pi}\frac{\sin^2\alpha s}{\sin^2 s}$$

Так как из выпуклости положительной функции следует выпуклость квадрата этой функции, достаточно показать, что при $0 < s < \pi/2$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin\alpha s}{\sin s}\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}[f(s)] = f''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + f'\frac{d^2s}{dt^2} \geqslant 0$$

Имеем

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\alpha}\sin^2\alpha(\pi-s),\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{2}{\alpha}\cos\alpha(\pi-s)\sin^3\alpha(\pi-s)$$

$$f'=\frac{\sin\alpha s}{\sin s}(\alpha\operatorname{ctg}\alpha s-\operatorname{ctg}s),\qquad f''=\frac{\sin\alpha s}{\sin s}[1-\alpha^2+2\operatorname{ctg}s(\operatorname{ctg}s-\alpha\operatorname{ctg}\alpha s)]$$

Следовательно,

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(s)]\sim 1-\alpha^2-2(\alpha\operatorname{ctg}\alpha s-\operatorname{ctg}s)[\operatorname{ctg}s+\alpha\operatorname{ctg}\alpha(\pi-s)]$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(s)]\sim 1-2\,\frac{\alpha\operatorname{ctg}\alpha s-\operatorname{ctg}s}{1-\alpha^2}[\operatorname{ctg}s+\alpha\operatorname{ctg}\alpha(\pi-s)] \tag{3.6}$$

Пользуясь разложением $\operatorname{ctg}x$ при $0<|x|<\pi$ в степенной ряд, находим

$$\frac{\alpha\operatorname{ctg}\alpha s-\operatorname{ctg}s}{1-\alpha^2}=\frac{s}{2}+\left(\frac{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}{1+\alpha}\right)\frac{s^3}{45}+\left(\frac{1+\alpha+\ldots+\alpha^5}{1+\alpha}\right)\frac{2s^5}{945}+\ldots \tag{3.7}$$

Из (3.7) видно, что функция

$$g_1(s,\alpha)=\frac{\alpha\operatorname{ctg}\alpha s-\operatorname{ctg}s}{(1-\alpha^2)s}$$

монотонно возрастает при возрастании s и α. Максимум $g_1(s,\alpha)$ по s при фиксированном α достигается при $s=\pi/2$ и равен

$$g_1\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)=2\,\frac{\alpha\operatorname{ctg}(\alpha\pi/2)}{\pi(1-\alpha^2)} \tag{3.8}$$

Легко видеть, что $g_1(\pi/2,\alpha)\to 1/2$ при $\alpha\to 1$. Второй сомножитель в (3.6)

$$g_2(s,\alpha)=s\operatorname{ctg}s+\alpha s\operatorname{ctg}\alpha(\pi-s)$$

напротив, убывает при увеличении α (и фиксированном s). Действительно,

$$\frac{\partial g_2(s,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{s}{2\sin^2\alpha(\pi-s)}[\sin 2\alpha(\pi-s)-2\alpha(\pi-s)]\leqslant 0$$

При $\alpha\to 1$ функция $g_2(s,\alpha)\to 0$ равномерно по s $(0\leqslant s\leqslant\pi/2)$. Нужно показать, что при всех $0<s<\pi/2$, $0<\alpha<1$

$$2g_1(s,\alpha)\,g_2(s,\alpha)\leqslant 1$$

Рассмотрим сначала случай $1/2\leqslant\alpha<1$. Ясно из сделанных выше замечаний, что при всех $0<s<\pi/2$, $1/2\leqslant\alpha<1$

$$2g_1(s,\alpha)\,g_2(s,\alpha)\leqslant g_2\left(s,\frac{1}{2}\right)=\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}$$

Легко проверить, что максимум $(s/2)\operatorname{ctg}(s/2)$ достигается при $s=0$ и равен 1. В случае $0<\alpha\leqslant 1/2$ имеем

$$2g_1(s,\alpha)\,g_2(s,a)\leqslant 2g_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)g_2(s,0)$$

где через $g_2(s,0)$ обозначен предел $g_2(s,\alpha)$ при $\alpha\to 0$. Из (3.8) имеем

$$g_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3\pi}\approx 0.425$$

Нужно, следовательно, показать, что

$$g_2(s,0)=s\operatorname{ctg}s+\frac{s}{\pi-s}\leqslant 1.17$$

Несложные вычисления показывают, что максимум $g_2(s,0)$ достигается вблизи $s=\pi/4$ и равен приблизительно 1.12. Доказательство леммы закончено.

Поступила 12 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchellor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number, J. of Fluid Mech., 1956, Vol. 1, part 2.
2. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд-во иностр. лит-ры, 1957.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон И. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. лит-ры, 1958.