

УДК 532.526.013.4:533.6.011.55

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВИХРЕЙ ГЁРТЛЕРА В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. В. Боголепов

Центральный аэрогидродинамический институт, 140180 Жуковский

Построена асимптотическая (при больших числах Рейнольдса и Гёртлера) модель нелинейных длинноволновых вихрей Гёртлера, локализованных внутри пограничного слоя около вогнутой поверхности, обтекаемой гиперзвуковым потоком вязкого газа, в режиме слабого вязко-невязкого взаимодействия. Дана оценка максимальной длины волны. Численные решения получены для невязкого локального предела в линейном приближении. Показано, что рост числа Маха набегающего потока оказывает стабилизирующее воздействие на вихри, а изменение числа Прандтля не оказывает на них существенного влияния. Для случая, когда вихри образуют трехслойную возмущенную структуру течения, впервые аналитически показано, что нагрев поверхности оказывает на них стабилизирующее воздействие.

Анализ уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса и Гёртлера позволил создать асимптотическую теорию вихрей Гёртлера [1] в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности [2–8]. При изучении вихрей Гёртлера в сжимаемом пограничном слое следует учитывать влияние таких факторов, как число Маха набегающего потока, температура поверхности, число Прандтля, физико-химические процессы в газе. Особый интерес представляет исследование влияния охлаждения поверхности на динамику вихрей [9–12], так как без учета этого невозможно обеспечить необходимую прочность конструкций летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях полета. В [10] отмечалось слабое стабилизирующее воздействие охлаждения поверхности на вихри, тогда как в [9, 11, 12] отмечено, что охлаждение поверхности оказывает дестабилизирующее воздействие на вихри. Дестабилизирующее воздействие охлаждения поверхности подтверждено при изучении динамики коротковолновых вихрей в работе [13], где предложено объяснение этого явления. В [14] описан механизм стабилизирующего воздействия увеличения числа Маха на вихри.

В настоящей работе в линейном приближении исследуется динамика длинноволновых вихрей Гёртлера около вогнутой поверхности, обтекаемой гиперзвуковым потоком вязкого газа, в режиме слабого вязко-невязкого взаимодействия при больших числах Рейнольдса и Гёртлера.

1. Пусть вогнутая поверхность обтекается равномерным потоком вязкого газа. Предполагается, что ее безразмерная кривизна мала:  $k = L/R \ll 1$  ( $R$  — радиус кривизны поверхности,  $L$  — расстояние от ее передней кромки до точки зарождения вихрей), число Маха набегающего потока  $M_\infty \gg 1$ , число Рейнольдса велико ( $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty \gg 1$ ), но ламинарно-турбулентный переход еще не происходит. Здесь  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$ ,  $\mu_\infty$  — плотность, скорость, вязкость газа в набегающем потоке. В дальнейшем все линейные размеры относятся

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00462) в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта 00-15-96070).

к  $L$ , давление  $p$  и энтальпия  $h$  — к  $\rho_\infty u_\infty^2$  и  $u_\infty^2$  соответственно, остальные параметры — к своим значениям в набегающем потоке.

Предполагается также, что возмущения давления за счет вытесняющего действия пограничного слоя  $\Delta p_\delta$  и искривления поверхности  $\Delta p_k$  малы по сравнению с давлением газа в набегающем потоке:

$$\Delta p_\delta \sim \delta/M_\infty \ll 1/M_\infty^2, \quad \Delta p_k \sim k/M_\infty \ll 1/M_\infty^2$$

( $\delta$  — толщина пограничного слоя). В пограничном слое с характерными размерами  $\Delta x \sim 1$  и  $\Delta y \sim \delta$  (ось  $x$  направлена вдоль поверхности, ось  $y$  — по нормали к ней) для функций течения справедливы оценки режима слабого гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия [15]

$$u \sim h \sim 1, \quad v \sim \delta, \quad p \sim \rho \sim 1/M_\infty^2, \quad \mu \sim M_\infty^2, \quad \delta \sim M_\infty^2/\text{Re}_\infty^{1/2}, \quad (1.1)$$

где  $u, v$  — компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ . При получении этих оценок использовались линейная зависимость коэффициента вязкости от энтальпии

$$\mu = AM_\infty^2 h \quad (1.2)$$

и уравнение состояния для совершенного газа

$$\gamma p = (\gamma - 1)\rho h, \quad (1.3)$$

где  $A$  — постоянная;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей.

Введем вертикальную координату типа Лиза — Дородницына

$$n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^y \rho dy. \quad (1.4)$$

С использованием оценок (1.1) и соотношений (1.2), (1.3) запишем известные автотельные уравнения пограничного слоя

$$u'' + \varphi u' = 0, \quad \varphi = \int_0^n u dn, \quad \frac{h''}{\text{Pr}} + \varphi h' = -u'^2, \quad (1.5)$$

$$u(0) = \varphi(0) = 0, \quad h(0) = h_w \quad \text{или} \quad h'(0) = 0, \quad u(\infty) = 1, \quad h(\infty) = 1/((\gamma - 1)M_\infty^2),$$

где  $(\cdot)' = d/dn$ ; индекс  $w$  соответствует величинам на вогнутой поверхности; число Прандтля  $\text{Pr}$  полагается постоянным. При решении краевой задачи (1.5) получены автотельные профили продольной компоненты скорости  $u_0(n)$  и энтальпии  $h_0(n)$  в невозмущенном пограничном слое в сечении  $x_0 \sim 1$ .

**2.** Как известно, при превышении критического значения числа Гёртлера  $G_\infty = 2(\text{Re}_\infty^{1/2}/M_\infty^2)(L/R)$  двумерный ламинарный пограничный слой около вогнутой поверхности может потерять устойчивость [1]. Тогда внутри него появляются вытянутые в направлении потока стационарные вихри Гёртлера, и двумерное течение становится трехмерным. Ниже исследуется развитие таких вихрей с длиной волны, превышающей толщину пограничного слоя, при больших значениях числа Гёртлера  $G_\infty \sim \varkappa/\delta \gg 1$  ( $k = \varkappa K$ ,  $K \sim 1$ ,  $\delta \ll \varkappa \ll 1$ ), когда вихри заведомо существуют.

Рассматривается возмущенная вихревая область течения с характерными поперечными размерами  $\Delta y \sim \delta$  и  $\Delta z \gg \delta$  (ось  $z$  перпендикулярна плоскости  $xy$ ) на конечном расстоянии  $x_0 \sim 1$  от передней кромки вогнутой поверхности. Считается, что возмущенная вихревая область занимает весь пограничный слой, вихри локализованы внутри него и функции течения (см. (1.1)) имеют следующие порядки:

$$u \sim h \sim 1, \quad p \sim \rho \sim 1/M_\infty^2, \quad \mu \sim M_\infty^2. \quad (2.1)$$

При построении многослойных схем течения данную область как основную часть пограничного слоя в литературе обычно обозначают цифрой 2 [16], внешнюю по отношению к ней слабо возмущенную область равномерного набегающего потока — 1, а внутреннюю пристенную часть пограничного слоя — 3.

Пусть образование вихрей вызывает нелинейные возмущения в пограничном слое (например,  $\Delta u \sim u \sim 1$ ). Тогда в поле центробежных сил возникает дополнительное возмущение давления  $\Delta p$ , которое индуцирует компоненту скорости  $w$  в направлении оси  $z$ :

$$\Delta p \sim k\rho u^2 \Delta y \sim \varkappa \delta / M_\infty^2, \quad w \sim (\Delta p / \rho)^{1/2} \sim (\varkappa \delta)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Так как возмущенная вихревая область существенно трехмерная, из уравнения неразрывности получают оценки для ее характерного поперечного размера  $\Delta z$  и вертикальной компоненты скорости  $v$

$$\Delta z \sim w \Delta x / u \sim (\varkappa \delta)^{1/2} \Delta x, \quad v \sim u \Delta y / \Delta x \sim \delta / \Delta x, \quad (2.3)$$

где  $(\delta / \varkappa)^{1/2} \ll \Delta x \leq 1$  — характерный продольный размер возмущенной вихревой области. При  $\Delta x \sim 1$  из (2.3) следует оценка для максимального характерного поперечного размера возмущенной вихревой области (или максимальной длины волны вихрей Гёртлера в газе)

$$\Delta z_* \sim (\varkappa \delta)^{1/2}.$$

Сопоставление порядков величин конвективных и диссипативных членов уравнений Навье — Стокса ( $\rho u u_x \sim (\mu u_y)_y / \text{Re}_\infty$ ) показывает, что вязкость в возмущенной вихревой области необходимо учитывать только при  $\Delta x \sim 1$ , а при  $\Delta x \ll 1$  вязкие эффекты несущественны.

При рассмотрении трехмерных возмущенных областей пограничного слоя с характерными поперечными размерами  $\Delta z \gg \delta$  необходимо учитывать их возможное взаимодействие с внешними слабо возмущенными областями равномерного набегающего потока, где  $\rho \sim u \sim 1$  (см., например, [17]). Для взаимодействия таких областей необходимо, чтобы в них порядок величины вертикальной компоненты скорости  $v$  сохранялся постоянным [16]. В данном случае внешней будет область 1 с характерными размерами  $(\delta / \varkappa)^{1/2} \ll \Delta x \leq 1$  и  $\Delta y \sim \Delta z \sim (\varkappa \delta)^{1/2} \Delta x \gg \delta$ . Оценки показывают, что в ней индуцируется возмущение давления  $\Delta p \sim \rho v w \Delta y / \Delta x \sim \varkappa^{1/2} \delta^{3/2} / \Delta x$ , которое при  $\Delta x \gg (\delta / \varkappa)^{1/2}$  меньше по порядку величины, чем индуцируемое около внешней границы возмущенной вихревой области 2 (см. (2.2)). Это означает, что во внешней области 1 возмущения, индуцируемые в возмущенной вихревой области 2, только затухают и отсутствует обратное воздействие возмущений из области 1 на область 2.

Оценки (2.1)–(2.3) позволяют ввести новые переменные  $x = x_0 + \Delta x x_2$ ,  $y = \delta y_2$ ,  $z = (\varkappa \delta)^{1/2} \Delta x z_2$  и асимптотические разложения функций течения для возмущенной пространственной вихревой области 2

$$\begin{aligned} u &= u_2 + \dots, & v &= (\delta / \Delta x) v_2 + \dots, & w &= (\varkappa \delta)^{1/2} w_2 + \dots, \\ p &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \dots + \frac{\varkappa \delta}{M_\infty^2} p_2 + \dots, & \rho &= \frac{\rho_2}{M_\infty^2} + \dots, & h &= h_2 + \dots, & \mu &= M_\infty^2 \mu_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь и далее в разложении для  $p$  опускаются несущественные члены, от которых не зависит поперечная компонента скорости  $w$ .

Подставляя разложения (2.4) в уравнения Навье — Стокса и в (1.2), (1.3) и осуществляя предельный переход

$$M_\infty \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varkappa \rightarrow 0, \quad M_\infty \delta \rightarrow 0, \quad M_\infty \varkappa \rightarrow 0, \quad \delta \ll \varkappa \ll 1, \quad (2.5)$$

получаем, что в первом приближении течение в области 2 описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial(\rho_2 w_2)}{\partial z_2} = 0, \\
& \rho_2 \left( u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \right) = \Delta x \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right), \\
& \frac{\delta}{\varkappa} \rho_2 \left( u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right) + \Delta x^2 \left( K \rho_2 u_2^2 + \frac{\partial p_2}{\partial y_2} \right) = 0, \\
& \rho_2 \left( u_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \right) + \frac{\partial p_2}{\partial z_2} = \Delta x \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial y_2} \right), \\
& \rho_2 \left( u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial h_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial h_2}{\partial z_2} \right) = \Delta x \left[ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \mu_2 \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \right) + \mu_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right)^2 \right], \\
& (\gamma - 1) \rho_2 h_2 = 1, \quad \mu_2 = A h_2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

При  $\Delta x \sim 1$ , когда характерные размеры пограничного слоя и возмущенной вихревой области 2 одинаковы по порядку величины и в ней надо учитывать вязкие эффекты, на вогнутой поверхности выполняются обычные условия непротекания и прилипания

$$u_2 = v_2 = w_2 = 0, \quad h_2 = h_{2w} \quad \text{или} \quad \frac{\partial h_2}{\partial y_2} = 0 \quad (y_2 = 0), \tag{2.7}$$

а на внешней границе этой области (из-за отсутствия ее взаимодействия с внешней областью 1) — те же условия, что и на внешней границе двумерного пограничного слоя Прандтля:

$$u_2 \rightarrow 1, \quad w_2 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 1/[(\gamma - 1)M_\infty^2] \quad (y_2 \rightarrow \infty). \tag{2.8}$$

Кроме того, в сечении  $x = x_0$  выполняются начальные условия

$$\begin{aligned}
& u_2 = u_0(y_2), \quad v_2 = \Delta x A^{1/2} (\gamma - 1)^{1/2} v_0(y_2), \quad w_2 = 0, \quad h_2 = h_0(y_2), \\
& p_2 = -\frac{K}{\gamma - 1} \int_0^{y_2} \rho_0 u_0^2 dy_2, \quad \rho_2 = \frac{\rho_0(y_2)}{\gamma - 1}, \quad \mu_2 = A \mu_0(y_2) \quad (x_2 = 0),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

а решение удовлетворяет условию периодичности в поперечном направлении

$$f(x_2, y_2, z_2) = f(x_2, y_2, z_2 + \lambda), \quad f \equiv \{u_2, v_2, w_2, p_2, \rho_2, h_2, \mu_2\}, \tag{2.10}$$

где  $\lambda$  — длина волны вихрей.

Решение краевой задачи (2.6)–(2.10) описывает нелинейное развитие длинноволновых вихрей Гёртлера при  $\Delta z \sim (\varkappa \delta)^{1/2} \Delta x \gg \delta$ , когда они занимают весь гиперзвуковой пограничный слой ( $\Delta y \sim \delta$ ), а число Гёртлера велико ( $G_\infty \sim \varkappa/\delta \gg 1$ ). Если характерная протяженность возмущенной вихревой области мала по сравнению с характерной длиной, на которой происходит изменение функций течения в пограничном слое ( $\Delta x \ll 1$ ), то задача становится локальной, эволюция вихрей происходит в плоскопараллельном потоке, в уравнениях (2.6) отсутствуют диссипативные члены и на вогнутой поверхности необходимо учитывать только условия непротекания. Тогда для удовлетворения условиям прилипания вблизи поверхности можно рассмотреть дополнительно вязкий подслой. Если же характерная протяженность вихревой области соизмерима с протяженностью пограничного слоя ( $\Delta x \sim 1$ ), то необходимо учитывать “нарастание” пограничного слоя [3].

В (2.6)–(2.10) переменные  $x_2, y_2, z_2, v_2, w_2, \rho_2, \mu_2, p_2$  отнесем к величинам  $\lambda/(2\pi K^{1/2} A^{1/4}(\gamma-1)^{1/4}), A^{1/2}(\gamma-1)^{1/2}, \lambda/(2\pi), 2\pi K^{1/2} A^{3/4}(\gamma-1)^{3/4}/\lambda, K^{1/2} A^{1/4}(\gamma-1)^{1/4}, 1/(\gamma-1), A, KA^{1/2}/(\gamma-1)^{1/2}$  соответственно, в качестве вертикального масштаба возмущенной вихревой области примем ту же величину  $A^{1/2}(\gamma-1)^{1/2}$ , что и для вертикальной координаты пограничного слоя  $n$  около вогнутой поверхности (1.4). В новых переменных (индекс 2 опускается) краевая задача принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\Delta x}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\delta}{\varepsilon} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \Delta x^2 \lambda_1^2 \left( \rho u^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= 0, \\ \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\Delta x}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \rho \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right) &= \frac{\Delta x}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \rho h &= 1, \quad \mu = h, \\ u = v = w = 0, \quad h = h_w \quad \text{или} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (y = 0), \\ u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 1/[(\gamma-1)M_\infty^2] \quad (y \rightarrow \infty), \\ u = u_0(y), \quad v = \frac{\Delta x}{\text{Re}} v_0(y), \quad w = 0, \quad p = - \int_0^y \rho_0 u_0^2 dy, \\ \rho = \rho_0(y), \quad \mu = \mu_0(y), \quad h = h_0(y) \quad (x = 0), \\ f(x, y, z) = f(x, y, z + 2\pi), \quad f \equiv \{u, v, w, p, \rho, h, \mu\}, \\ \text{Re} = 2\pi K^{1/2} A^{1/4}(\gamma-1)^{1/4}/\lambda, \quad \lambda_1 = \lambda/(2\pi A^{1/2}(\gamma-1)^{1/2}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где  $\text{Re} \sim 1$  — местное число Рейнольдса;  $\lambda_1 \geq 1$  — отношение длины волны вихрей к масштабу толщины пограничного слоя.

**3.** Примем, что характерный продольный размер возмущенной вихревой области  $\Delta x \sim (\delta/\varepsilon)^{1/2} \ll 1$ . Тогда из (2.3) следует, что ее поперечные размеры будут одинаковы по порядку величины  $\Delta y \sim \Delta z \sim \delta$ . Отношение длины волны вихрей к толщине пограничного слоя можно задавать значением параметра  $\lambda_1 \geq 1$ . В этом случае продольное изменение функций течения в пограничном слое несущественно, эволюция вихрей происходит в плоскопараллельном потоке, в уравнениях (2.11) отсутствуют диссипативные члены, на вогнутой поверхности необходимо выполнение только условия непротекания. При этих условиях имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \lambda_1^2 \left( \rho u^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= 0, \quad \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} &= 0, \quad \rho h = 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
v = 0 \quad (y = 0), \quad u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 1/[(\gamma - 1)M_\infty^2] \quad (y \rightarrow \infty), \\
u \rightarrow u_0(y), \quad v \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0, \quad p \rightarrow - \int_0^y \rho_0 u_0^2 dy, \quad \rho \rightarrow \rho_0(y), \quad h \rightarrow h_0(y) \quad (x \rightarrow -\infty), \\
f(x, y, z) = f(x, y, z + 2\pi), \quad f \equiv \{u, v, w, p, \rho, h\}.
\end{aligned}$$

Для малых возмущений течения в пограничном слое возможна линеаризация краевой задачи относительно начальных условий:

$$\begin{aligned}
u = u_0(y) + \alpha U + \dots, \quad v = \alpha V + \dots, \quad w = \alpha W + \dots, \\
p = - \int_0^y \frac{u_0^2}{h_0} dy + \alpha P + \dots, \quad h = h_0(y) + \alpha H + \dots, \quad \rho = \frac{1}{h_0(y)} - \alpha \frac{H}{h_0^2(y)} + \dots, \quad \alpha \ll 1
\end{aligned} \tag{3.2}$$

(здесь учтено последнее соотношение в (3.1) для плотности  $\rho$ ). После применения линеаризации (3.2), использования нормально-модового представления решения [18] и введения новой вертикальной переменной

$$F(x, y, z) = F(y) \exp(\beta x)(\sin z, \cos z), \quad n_0(x_0, y) = \frac{1}{\sqrt{2x_0}} \int_0^y \frac{dy}{h_0} \tag{3.3}$$

краевая задача (3.1) сводится к одному уравнению в обыкновенных производных для функции  $V_1 = V/u_0$

$$\begin{aligned}
V_1'' + 2 \left( \frac{u_0'}{u_0} - \frac{h_0'}{h_0} \right) V_1' - \frac{h_0^2}{\Lambda^2} V_1 = \frac{1}{B^2} \left( h_0' - \frac{2u_0' h_0}{u_0} \right) V_1, \\
V_1'(0) = V_1(\infty) = 0, \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{(2x_0)^{1/2}}, \quad B = \frac{\beta}{(2x_0)^{1/4}}, \quad (\cdot)' = \frac{d}{dn_0}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Решение краевой задачи (3.4) позволяет определить ее собственные функции  $V(n_0)$  (вертикальную компоненту вихревой скорости) и собственные значения  $B$  (инкремент амплитуды вихря).

Численное решение (3.4) получено методом обратных итераций со смещением [19] для первых трех вихревых мод и различных функций  $u_0(n_0)$  и  $h_0(n_0)$  в пограничном слое, удельная теплоемкость  $\gamma = 1,4$ .

На рис. 1, а, б представлены зависимости инкрементов  $B_1$  и  $B_2$  для первых двух мод от относительной длины волны вихрей  $\Lambda \geq 1$  при  $\text{Pr} = 1$  и  $M_\infty = 5; 15,8; 50$  (кривые 2–4). Температура поверхности в 10 раз превышает температуру набегающего потока ( $T_w = 10T_\infty$ ), что соответствует пределу прочности материала поверхности. Кривая 1 рассчитана для пограничного слоя жидкости. Следует отметить принципиальное различие в поведении зависимостей для первой моды и всех последующих. Во-первых, инкремент  $B_1$  увеличивается с ростом  $M_\infty$  при всех значениях  $\Lambda$ , тогда как инкременты старших мод  $B_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ), наоборот, уменьшаются с его ростом (за исключением диапазона небольших значений  $M_\infty$  и  $\Lambda$ , который уменьшается с увеличением номера моды  $m$ ). Во-вторых, при всех значениях  $M_\infty$  инкремент  $B_1$  монотонно увеличивается с ростом  $\Lambda$ , а инкременты  $B_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) практически не зависят от  $\Lambda$  (за исключением того же диапазона значений  $M_\infty$  и  $\Lambda$ ). Подобное поведение вихрей получено из аналитического решения [5, 8] при исследовании центробежной неустойчивости пограничного слоя жидкости при интенсивном отсосе [20], когда толщина слоя постоянна:  $B_1 = \Lambda^{1/2}$ ,

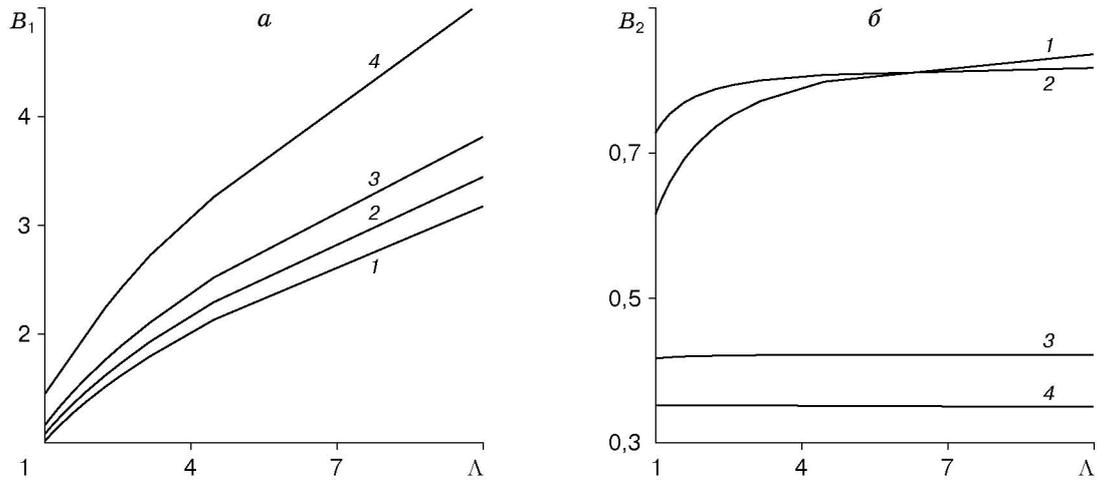


Рис. 1

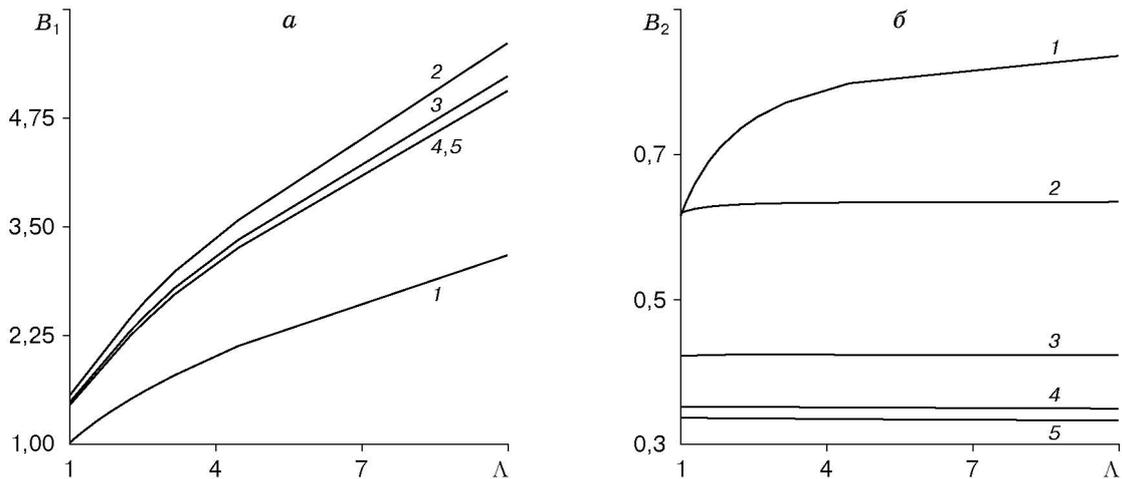


Рис. 2

$B_m \approx \sqrt{2/(m^2 - 1)}$ ,  $m = 2, 3, \dots$ ,  $\Lambda \gg 1$ . Такой характер изменения  $B_1$  означает, что при увеличении длины волны вихрей первая длинноволновая мода отделяется от последующих и ее рост по линейному закону должен происходить на меньших характерных расстояниях.

Увеличение  $M_\infty$  приводит к нагреванию пограничного слоя, увеличению его толщины ( $\delta \sim M_\infty^2 / \text{Re}_\infty^{1/2} \sim M_\infty^{3/2} \delta_f$ ) и характерной протяженности возмущенной вихревой области ( $\Delta x \sim (\delta/\varkappa)^{1/2} \sim M_\infty^{3/4} \Delta x_f$ ) по сравнению с пограничным слоем жидкости (индекс  $f$  соответствует параметрам жидкости). Это вызывает уменьшение приведенной к характерной длине (порядка единицы) скорости роста вихрей

$$Ve \sim B/\Delta x \sim B/(M_\infty^{3/4} \Delta x_f),$$

поскольку увеличение числителя незначительно и определяющим является увеличение знаменателя [14]. Этим же объясняется стабилизирующее влияние увеличения числа Маха  $M_\infty$  на длинноволновые вихри Гёртлера.

На рис. 2, *a, б* показано влияние безразмерной энтальпии поверхности  $h_0(0)$  на инкременты первых двух мод  $B_1$  и  $B_2$  при  $M_\infty = 50$  и  $\text{Pr} = 1$  (кривая 1 рассчитана для жидкости, кривая 2 — для теплоизолированной поверхности при  $h'_0(0) = 0$ , кривые 3–5 — при  $h_0(0) = 0,1; 0,01; 0$ ). Видно, что нагрев поверхности приводит к незначительному увеличе-

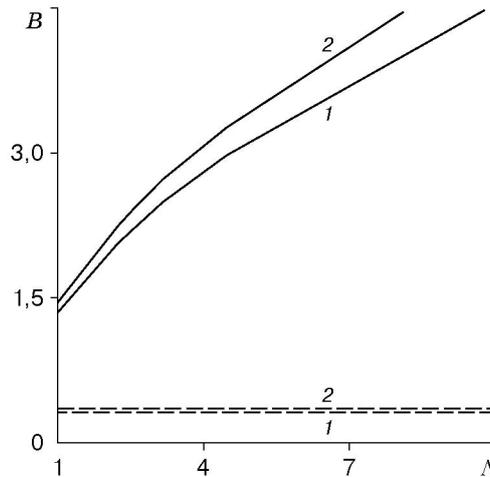


Рис. 3

нию инкремента первой моды  $B_1$ , инкременты старших мод  $B_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) возрастают примерно в два раза от значений для абсолютно холодной поверхности при  $h_0(0) = 0$  до значений для теплоизолированной поверхности при  $h'_0(0) = 0$ . Однако известно, что при нагреве поверхности увеличивается толщина пограничного слоя [20] и, следовательно, возрастают характерные размеры вихрей. Поэтому не удастся однозначно оценить влияние нагрева поверхности на скорость роста вихрей  $Ve$ . (В [9, 11, 12] отмечалось слабое стабилизирующее воздействие нагрева поверхности на длинноволновые вихри.)

На рис. 3 показано влияние числа Прандтля  $Pr$  на инкременты  $B$  для двух старших мод (сплошные кривые —  $B_1$ , штриховые —  $B_2$ ) при  $M_\infty = 50$  и  $T_w = 10 T_\infty$ . Увеличение  $Pr$  от 0,5 до 1 (кривые 1, 2) приводит к увеличению инкрементов для первой моды и практически не влияет на инкременты старших мод (кривые, полученные для третьей моды, практически неразличимы и на рис. 3 не приведены).

Согласно оценкам (2.3) характерная протяженность вихревой области пропорциональна относительной длине волны вихрей, поэтому скорость роста вихрей  $Ve \sim V/\Delta x \sim V/\Lambda$  уменьшается с ростом  $\Lambda$  (определяющей величиной в этой дроби также является знаменатель).

На рис. 4, а–в представлены профили собственных функций  $V(n_0)$  при  $\Lambda = 10$  для первой, второй и третьей моды соответственно (кривые 1 рассчитаны для жидкости, кривые 2–4 соответствуют  $M_\infty = 5; 15,8; 50; Pr = 1, T_w = 10 T_\infty$ ). Из уравнения (3.4) следует, что  $V \sim \exp(-h_0 n_0/\Lambda)$  при  $n_0 \rightarrow \infty$ . Поэтому затухание собственных функций значительно уменьшается с увеличением  $M_\infty$  (так как  $h_0 \sim 1/M_\infty^2$  при  $n_0 \rightarrow \infty$ ) и относительной длины волны вихрей  $\Lambda$ . Однако увеличение числа  $M_\infty$  вызывает соответствующее растяжение вертикальной координаты  $n_0$  (см. (3.3)) и не приводит к увеличению значений физической переменной  $y$ , при которых происходит затухание вихрей. Однако с увеличением длины волны вихри на линейной стадии развития все больше выходят за внешнюю границу пограничного слоя, и их затухание происходит на расстояниях  $\Delta y \sim \Delta z \sim (\alpha\delta)^{1/2} \Delta x \gg \delta$ . Это обстоятельство отмечалось в [3] и связано с использованием нормально-модового представления решения (3.3).

4. Рассмотрим развитие длинноволновых вихрей, которые вносят только малые возмущения (например,  $\Delta u \ll u \sim 1$ ) в основную часть пограничного слоя (область 2) и могут индуцировать нелинейные возмущения (например,  $\Delta u \sim u \ll 1$ ) в его пристенной

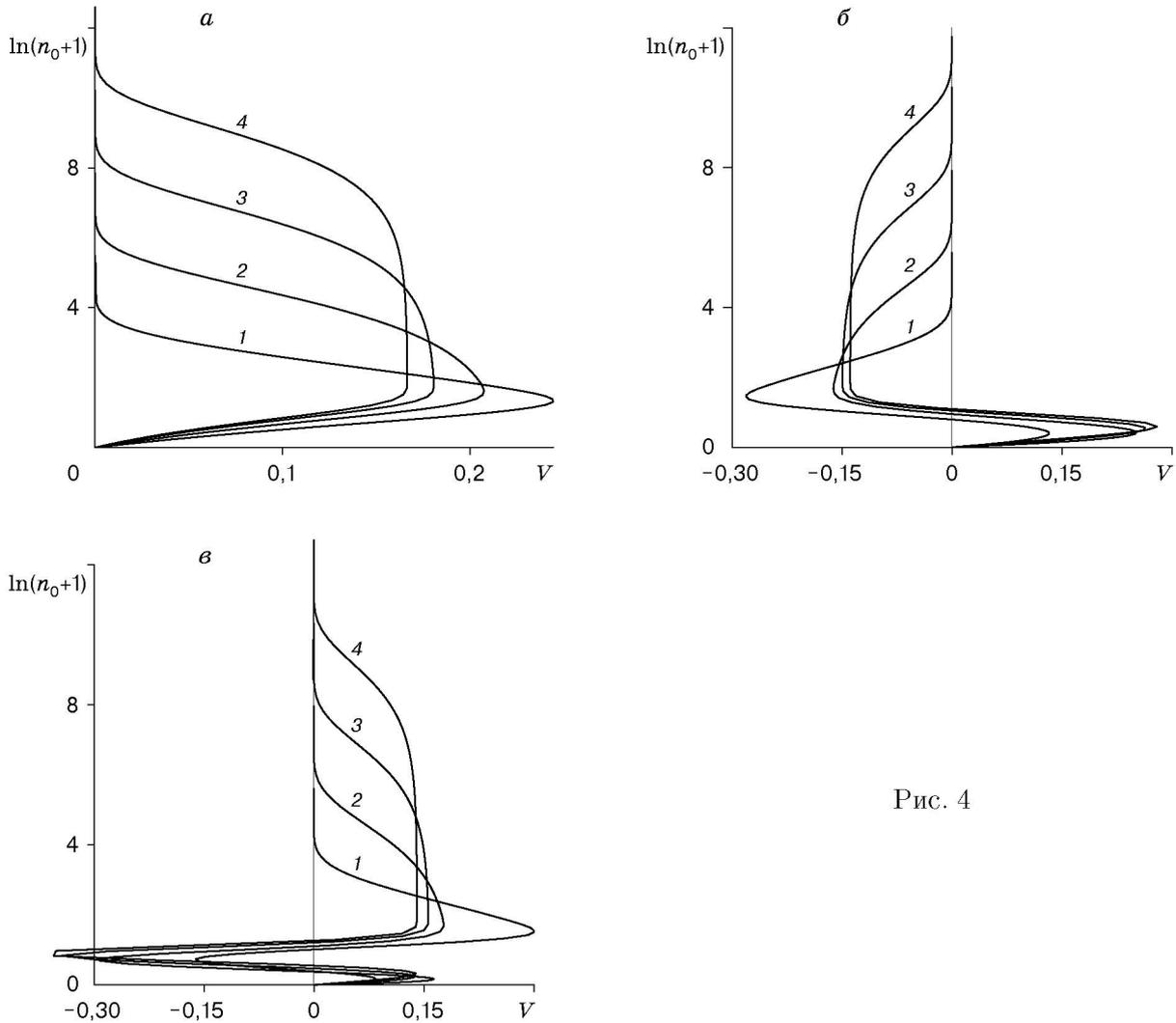


Рис. 4

части (области 3). Принимается, что коэффициент трения

$$C_\tau = \frac{\delta}{M_\infty^2} c = \frac{\mu}{Re_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$$

и коэффициент теплообмена

$$C_q = \frac{\delta}{M_\infty^2} \frac{b}{Pr} = \frac{\mu}{Re_\infty Pr} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w$$

( $b$  и  $c$  — постоянные) сохраняют порядки величин в области 3 при  $\Delta y / \delta \ll 1$ . Тогда из (1.2), (1.3) находятся распределения продольной компоненты скорости  $u$  и энтальпии  $h$  в этой части невозмущенного пограничного слоя

$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{b} \left( \frac{2b}{A} \frac{\Delta y}{\delta} + h_w^2 \right)^{1/2} - \frac{c}{b} h_w, & h &= \left( \frac{2b}{A} \frac{\Delta y}{\delta} + h_w^2 \right)^{1/2}, \\ u &\approx \frac{c}{Ah_w} \frac{\Delta y}{\delta}, & h &\approx h_w + \frac{b}{Ah_w} \frac{\Delta y}{\delta} \quad \text{при} \quad \left( \frac{\Delta y}{\delta} \right)^{1/2} \ll h_w \leq 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Полагая, что течение в области 3 вязкое пространственное и нелинейное, из сопоставления основных членов уравнений Навье — Стокса ( $Re_\infty \rho u \partial u / \partial x \sim \partial(\mu \partial u / \partial y) / \partial y$ ,

$\partial(\rho u)/\partial x \sim \partial(\rho v)/\partial y \sim \partial(\rho w)/\partial z$ ,  $\Delta p \sim \rho w^2$ ) при использовании приближенных соотношений (4.1) можно получить оценки толщины области 3, вертикальной и поперечной компонент скорости и возмущения давления

$$\Delta y \sim h_w \delta \Delta x^{1/3}, \quad v \sim \frac{h_w \delta}{\Delta x^{1/3}}, \quad w \sim \frac{\Delta z}{\Delta x^{2/3}}, \quad \Delta p \sim \frac{\Delta z^2}{M_\infty^2 h_w \Delta x^{4/3}}. \quad (4.2)$$

Оценки (4.2) позволяют ввести новые переменные  $x = x_0 + \Delta x x_3$ ,  $y = h_w \delta \Delta x^{1/3} y_3$ ,  $z = \Delta z z_3$  и асимптотические разложения функций течения для пристенной части возмущенной вихревой области

$$\begin{aligned} u &= \Delta x^{1/3} u_3 + \dots, & v &= \frac{h_w \delta}{\Delta x^{1/3}} v_3 + \dots, & w &= \frac{\Delta z}{\Delta x^{2/3}} w_3 + \dots, \\ p &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \dots + \frac{\Delta z^2}{M_\infty^2 h_w \Delta x^{4/3}} p_3 + \dots, & \rho &= \frac{\rho_w}{M_\infty^2 h_w} + \dots, \\ h &= h_w + \Delta x^{1/3} h_3 + \dots, & \mu &= M_\infty^2 h_w \mu_w + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя разложения (4.3) в уравнения Навье — Стокса и в (1.2), (1.3) и осуществляя предельный переход (2.5) при  $\Delta x^{1/3} \ll h_w \leq 1$ , получаем, что в первом приближении течение в области 3 описывается системой уравнений для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} &= 0, & \frac{\partial p_3}{\partial y_3} &= 0, \\ \rho_w \left( u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) &= \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \rho_w \left( u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} &= \mu_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}, \\ \rho_w \left( u_3 \frac{\partial h_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial h_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial h_3}{\partial z_3} \right) &= \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h_3}{\partial y_3^2}, \\ (\gamma - 1) \rho_w &= 1, & \mu_w &= A. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На вогнутой поверхности выполняются обычные условия непротекания и прилипания

$$u_3 = v_3 = w_3 = h_3 = 0 \quad (y_3 = 0), \quad (4.5)$$

а начальные условия для этой области получаются из сращивания с решением для пристенной части невозмущенного пограничного слоя (4.1)

$$u_3 \rightarrow (c/A) y_3, \quad h_3 \rightarrow (b/A) y_3, \quad v_3, w_3, p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty). \quad (4.6)$$

В области 2 с характерной толщиной  $\Delta y \sim \delta$ , где порядки величин продольной компоненты скорости  $u$ , энтальпии  $h$ , плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$  определяются из (1.1), возмущение давления  $\Delta p$  создается за счет центробежных эффектов и имеет тот же порядок величины, что и в области 3:

$$\Delta p \sim k \rho u \Delta u \Delta y \sim \varkappa \delta \Delta u / M_\infty^2 \sim \Delta z^2 / (M_\infty^2 h_w \Delta x^{4/3}).$$

Тогда из сопоставления порядков величин основных членов уравнений Навье — Стокса следуют оценки для возмущений компонент скорости

$$\Delta u \sim \Delta z^2 / (h_w \Delta x^{4/3} \varkappa \delta), \quad v \sim \Delta z^2 / (h_w \Delta x^{7/3} \varkappa), \quad w \sim \Delta z / (h_w \Delta x^{1/3}). \quad (4.7)$$

Оценки (4.7) позволяют ввести новые переменные  $x = x_0 + \Delta x x_3$ ,  $y = \delta y_2$ ,  $z = \Delta z z_3$  и асимптотические разложения функций течения для основной части пограничного слоя

$$u = u_0(y_2) + \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{4/3} \varkappa \delta} u_2 + \dots, \quad v = \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{7/3} \varkappa} v_2 + \dots, \quad w = \frac{\Delta z}{h_w \Delta x^{1/3}} w_2 + \dots,$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \dots - \frac{\varkappa \delta}{M_\infty^2} K \int_0^{y_2} \rho_0 u_0^2 dy_2 + \frac{\Delta z^2}{M_\infty^2 h_w \Delta x^{4/3}} p_2 + \dots, \quad (4.8)$$

$$\rho = \frac{\rho_0(y_2)}{M_\infty^2} + \frac{\Delta z^2}{M_\infty^2 h_w \Delta x^{4/3} \varkappa \delta} \rho_2 + \dots, \quad h = h_0(y_2) + \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{4/3} \varkappa \delta} h_2 + \dots,$$

где индекс 0 соответствует параметрам течения в невозмущенном пограничном слое.

Подставляя разложения (4.8) в уравнения Навье — Стокса и в (1.2), (1.3) и осуществляя предельный переход (2.5) при  $\Delta x^{1/3} \ll h_w \leq 1$  и  $\delta^{1/2}/\varkappa^{1/2} \ll \Delta x \ll \Delta z/(\varkappa^{1/2} \delta^{1/2})$ , получаем, что в первом приближении течение в области 2 описывается системой линейных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + u_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial x_3} + \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + v_2 \frac{d\rho_0}{dy_2} &= 0, \\ u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + v_2 \frac{du_0}{dy_2} = 0, \quad 2K\rho_0 u_0 u_2 + K\rho_2 u_0^2 + \frac{\partial p_2}{\partial y_2} &= 0, \\ \rho_0 u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{\partial p_2}{\partial z_3} = 0, \quad u_0 \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + v_2 \frac{dh_0}{dy_2} &= 0, \\ (\gamma - 1)\rho_0 h_0 = 1, \quad \rho_0 h_2 + \rho_2 h_0 &= 0, \end{aligned}$$

которая допускает частичное интегрирование:

$$u_2 = D \frac{du_0}{dy_2}, \quad v_2 = -u_0 \frac{\partial D}{\partial x_3}, \quad \rho_2 = D \frac{d\rho_0}{dy_2}, \quad h_2 = D \frac{dh_0}{dy_2}, \quad (4.9)$$

$$p_2 = p_2|_{y_2 \rightarrow \infty} + KD(M_\infty^2 - \rho_0 u_0^2), \quad D = D(x_3, z_3).$$

Из последнего соотношения в (4.9) следует, что за счет центробежных эффектов в области 2 возмущение давления  $p_2$  увеличивается по мере приближения к внешней границе пограничного слоя ( $p_2|_{y_2 \rightarrow \infty} \sim M_\infty^2$ ). Поэтому в возмущенной области 1 внешнего равномерного набегающего потока с характерными размерами  $\delta \ll \Delta y \sim \Delta z \ll \Delta x \ll 1$ , где продольная компонента скорости  $u \sim 1$ , плотность газа  $\rho \sim 1$  и его энтальпия  $h \sim 1/((\gamma - 1)M_\infty^2)$ , возмущение давления имеет следующий порядок величины:

$$\Delta p \sim \Delta z^2 / (h_w \Delta x^{4/3}).$$

Сопоставление порядков величин основных членов уравнений Навье — Стокса позволяет получить оценки для возмущений функций течения и ввести в области 1 новые переменные  $x = x_0 + \Delta x x_3$ ,  $y = \Delta z y_1$ ,  $z = \Delta z z_3$  и асимптотические разложения

$$u = 1 + \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{4/3}} u_1 + \dots, \quad v = \frac{\Delta z}{h_w \Delta x^{1/3}} v_1 + \dots, \quad w = \frac{\Delta z}{h_w \Delta x^{1/3}} w_1 + \dots,$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \dots - \varkappa \Delta z K y_1 + \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{4/3}} p_1 + \dots, \quad (4.10)$$

$$\rho = 1 + \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{4/3}} \rho_1 + \dots, \quad h = \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2} + \frac{\Delta z^2}{h_w \Delta x^{4/3}} h_1 + \dots$$

Подставляя разложения (4.10) в уравнения Навье — Стокса и в (1.2), (1.3) и осуществляя предельные переходы (2.5) при  $\Delta x^{1/3} \ll h_w \leq 1$  и  $\delta^{1/2}/\varkappa^{1/2} \ll \Delta x \ll \Delta z/(\varkappa^{1/2}\delta^{1/2})$ , получаем, что в первом приближении для области 1 справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_3} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_1}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial p_1}{\partial x_3} &= 0, \\ M_\infty^2 (\gamma - 1) h_1 + \rho_1 &= \gamma M_\infty^2 p_1, \end{aligned} \quad (4.11)$$

которые могут быть преобразованы к волновому уравнению для возмущения давления  $p_1$

$$\frac{M_\infty^2}{M_c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z_3^2}, \quad M_c \sim \frac{\Delta x}{\Delta z} \gg 1. \quad (4.12)$$

Отношение характерных продольного и поперечного размеров возмущенной вихревой области определяет критическое число Маха  $M_c$  (при  $M_\infty \sim M_c$  характерные размеры возмущенной вихревой области по порядкам величин равны размерам конуса Маха).

Сращивание асимптотических разложений (4.3) и (4.8) в областях 3 и 2 при учете соотношений (4.1) и (4.9) позволяет получить недостающие внешние краевые условия для области 3 и условие их нетривиального взаимодействия:

$$\begin{aligned} u_3 \rightarrow (c/A)(y_3 + D), \quad w_3 \rightarrow 0, \quad h_3 \rightarrow (b/A)(y_3 + D) \quad (y_3 \rightarrow \infty), \\ p_3 = p_2|_{y_2=0} = p_2|_{y_2 \rightarrow \infty} + K D M_\infty^2, \quad \Delta z \sim h_w \varkappa^{1/2} \delta^{1/2} \Delta x^{5/6}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для нетривиального взаимодействия областей 2 и 1 необходимо, чтобы в них сохранялся постоянным порядок величины вертикальной компоненты скорости  $v$  [16]. Это возможно при условии

$$\Delta z \sim \varkappa \Delta x^2. \quad (4.14)$$

Выполняя сращивание асимптотических разложений (4.8) и (4.10), с учетом соотношений (4.9), (4.11), (4.13) и (4.14) получим

$$\begin{aligned} v_1|_{y_1=0} = v_2|_{y_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\partial D}{\partial x_3}, \quad p_2|_{y_2 \rightarrow \infty} = M_\infty^2 p_1|_{y_1=0}, \\ p_3 = M_\infty^2 (p_1|_{y_1=0} + K D), \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 D}{\partial x_3^2} \quad (y_1 = 0). \end{aligned} \quad (4.15)$$

При одновременном выполнении условий (4.13) и (4.14) для возмущенной вихревой области с характерными размерами

$$\Delta x \sim h_w^{6/7} (\delta/\varkappa)^{3/7}, \quad \Delta z \sim h_w^{12/7} \varkappa^{1/7} \delta^{6/7} \quad (4.16)$$

реализуется полная трехслойная структура течения [5–8, 21]. В этом случае течение в пристенной области 3 описывается уравнениями (4.4), граничными и начальными условиями (4.5), (4.6) и (4.13). Возмущение давления  $p_3$  определяется из соотношения (4.15), которое складывается из возмущений давления за счет вытесняющего действия пограничного слоя ( $p_1|_{y_1=0}$ ) и центробежных эффектов ( $KD$ ). Эти составляющие находятся из совместного

решения задачи для области 3 и волнового уравнения (4.12) для области 1 при выполнении условия (4.15) на ее внутренней границе и условий ограниченности возмущений на ее внешних границах. Естественно, решения в областях 3 и 1 должны удовлетворять условию периодичности в поперечном направлении (см. (2.10)).

Отнесем переменные  $y_1, p_1, x_3, y_3, z_3, u_3, v_3, w_3, p_3, h_3, D$  к величинам  $\lambda/(2\pi), \lambda^3 A^6(\gamma - 1)^3/(8\pi^3 K M_\infty^2 c^2 l^{10}), cl^3/(A^2(\gamma - 1)), l, \lambda/(2\pi), cl/A, A(\gamma - 1)/l, \lambda A(\gamma - 1)/(2\pi l^2), \lambda^2 A^2(\gamma - 1)/(4\pi^2 l^4), bl/A, \lambda^2 A^2(\gamma - 1)/(4\pi^2 K M_\infty^2 l^4)$  соответственно. Тогда краевая задача (2.10), (4.4)–(4.6), (4.13) и (4.15) для области 3 принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \\ u = v = w = h = 0 \quad (y = 0), \\ u, h \rightarrow y + \gamma_1 D, \quad w \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty), \quad u, h \rightarrow y, \quad v, w, p, D \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \\ p = \gamma_2 p_1 \Big|_{y_1=0} + D, \\ u(x, y, z) = u(x, y, z + 2\pi), \quad v(x, y, z) = v(x, y, z + 2\pi), \quad w(x, y, z) = w(x, y, z + 2\pi), \\ h(x, y, z) = h(x, y, z + 2\pi), \quad p(x, z) = p(x, z + 2\pi), \quad D(x, z) = D(x, z + 2\pi), \\ \gamma_1 = \lambda^2 A^2(\gamma - 1)/(4\pi^2 l^5 K M_\infty^2), \quad \gamma_2 = \lambda A^4(\gamma - 1)^2/(2\pi l^6 K c^2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где обозначения прежние, индекс 3 опущен, толщина слоя 3 отнесена к произвольной величине  $l$ . Краевая задача для области 1 следующая:

$$\begin{aligned} \gamma_3 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \quad (y_1 = 0), \\ p_1(x, y_1, z) = p_1(x, y_1, z + 2\pi), \quad \gamma_3 = \lambda^2 A^4(\gamma - 1)^2 M_\infty^2/(4\pi^2 l^6 c^2 M_c^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Краевые задачи (4.17) и (4.18) содержат три параметра подобия:  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Первый параметр определяет степень взаимодействия областей 3 и 2, второй — областей 2 и 1, а третий — режим взаимодействия вязкого и невязкого течений. Последнее обстоятельство отличает рассматриваемую задачу о трехслойном возмущенном течении, возникающем при развитии длинноволновых вихрей Гёртлера в гиперзвуковом пограничном слое около вогнутой умеренно охлажденной поверхности, от аналогичной задачи для несжимаемой жидкости [5–8]. Поэтому в задаче (4.17) уравнение для возмущения энтальпии  $h$  можно решать отдельно.

Последующая линеаризация решения краевой задачи (4.17) относительно начальных условий и использование нормально-модового представления решений (3.3) в областях 3 и 1 позволяют свести ее и (4.18) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \beta U + V' + W = 0, \quad \beta y U + V = U'', \\ \beta y W - D[1 - \gamma_2 \beta^2/(1 + \gamma_3 \beta^2)^{1/2}] = W'', \\ U = V = W = 0 \quad (y = 0), \quad U \rightarrow \gamma_1 D, \quad W \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $D$  — постоянный коэффициент в представлении вида (3.3);  $(\cdot)' = d/dy$ .

Система уравнений (4.19) может быть сведена к одному уравнению для функции  $\beta U' + W'$ , решение которого выражается через функцию Эйри  $\text{Ai}(y/\beta^{1/3})$  [22]. При этом имеет место следующее дисперсионное соотношение:

$$\gamma_2 \beta^2/(1 + \gamma_3 \beta^2)^{1/2} - 3\gamma_1 \text{Ai}'(0)\beta^{5/3} = 1. \quad (4.20)$$

Соотношение (4.20) отличается от соответствующего выражения для жидкости только наличием параметра  $\gamma_3$  (см., например, [5, 8]). Однако из (4.12) и (4.16) следует, что критическое число Маха  $M_c \sim h_w^{-6/7}$ , поэтому  $\gamma_3 \sim h_w^{12/7}$ . При охлаждении поверхности и уменьшении  $h_w$  уменьшается также параметр  $\gamma_3$ , соотношение (4.20) преобразуется к виду, соответствующему несжимаемой жидкости, инкремент  $\beta$  не зависит от  $h_w$  и приведенная к характерной длине (порядка единицы) скорость роста вихрей

$$Be \sim \beta/\Delta x \sim (\beta/h_w^{6/7})(\varepsilon/\delta)^{3/7}$$

увеличивается как за счет охлаждения поверхности, так и за счет уменьшения толщины пограничного слоя  $\delta$ . Таким образом, аналитически показано, что охлаждение поверхности приводит к увеличению скорости роста длинноволновых вихрей Гёртлера.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Görtler H.** Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1940. Bd 2, N 1. S. 1–26.
2. **Hall P.** Taylor — Görtler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // J. Fluid Mech. 1982. V. 124. P. 475–494.
3. **Hall P.** The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 41–58.
4. **Боголепов В. В., Дегтярев Л. М., Дроздова О. М., Липатов И. И.** Асимптотическая структура вихрей Тейлора — Гёртлера в пограничном слое. М., 1988. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 156).
5. **Боголепов В. В., Липатов И. И.** Асимптотический анализ развития вихрей Гёртлера в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности. Жуковский, 1990. (Препр. / ЦАГИ; № 8).
6. **Тимошин С. Н.** Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гёртлера // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 1. С. 32–41.
7. **Denier J. P., Hall P., Seddougui S.** On the receptivity problem for Görtler vortices: vortex motions induced by wall roughness // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1991. V. 335. P. 51–85.
8. **Боголепов В. В., Липатов И. И.** К асимптотической теории вихрей Гёртлера в пограничном слое жидкости // ПМТФ. 1992. № 3. С. 58–68.
9. **Kobayashi R., Kohama Y.** Taylor — Görtler instability of compressible boundary layers // AIAA J. 1977. V. 15, N 12. P. 1723–1727.
10. **El-Hady N. M., Verma A. K.** Görtler instability of compressible boundary layers // AIAA J. 1984. V. 22, N 10. P. 1354, 1355.
11. **Spall R. E., Malik M. R.** Görtler vortices in supersonic and hypersonic boundary layers // Phys. Fluids. 1989. V. 1, N 11. P. 1822–1835.
12. **Fu B. Y., Hall P., Blackaby N.** On the Görtler instability in hypersonic flows: Sutherland law fluids and real gas effects // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1993. V. 342. P. 325–377.
13. **Боголепов В. В.** Исследование спектра коротковолновых вихрей Гёртлера в газе // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 67–76.
14. **Боголепов В. В.** О развитии вихрей Гёртлера в гиперзвуковом пограничном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 5. С. 73–81.
15. **Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.** Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

16. Труды ЦАГИ. Жуковский, 1974. Вып. 1529: Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений / В. Я. Нейланд.
17. Боголепов В. В. Исследование режимов пространственного течения около искривленной поверхности // ПМТФ. 1989. № 1. С. 87–93.
18. Smith A. M. O. On the growth of Taylor — Görtler vortices along highly concave walls // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13, N 3. P. 233–262.
19. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
20. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
21. Боголепов В. В., Липатов И. И. Влияние сжимаемости на развитие вихрей Тейлора — Гёртлера при больших числах Рейнольдса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 36–47.
22. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 29/1 2001 г.*

---